计算流体力学基础

苏铭德　黄素逸

清华大学出版社

计算流体力学基础

苏铭德　黄素逸



清华大学出版社

（京）新登字 158 号

内 容 提 要

本书是力学及相关专业高年级大学生和研究生“计算流体动力学”课程的教材。在 A 篇中简要介绍了几种主要流场的数学模型。在 B 篇中详细介绍了建立差分格式的基本方法、差分格式的稳定性和收敛性及其分析，并介绍了几种常用的离散化方法的基本思路及其理论分析，其中有特征线法，有限元法，有限解析法，谱方法等。C 篇则着重介绍这些方法在不同流场中的应用，以及针对不同问题所需采用的特殊措施。最后还简要地介绍了一些近年来发展起来的新的数值方法及其特点，供读者进一步开展计算流体动力学研究参考。

图书在版编目（CIP）数据

计算流体力学基础/苏铭德，黄素逸编著，-北京：清华大学出版社，1997
ISBN 7-302-02440-5

Ⅰ．计… Ⅱ．①苏… ②黄… Ⅲ．计算流体力学-基础理论 Ⅳ．035

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 02693 号

出版者：清华大学出版社（北京清华大学校内，邮编 100084）
印刷者：北京大中印刷厂
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：787×1092 1/16　**印张**：31.5　**字数**：825 千字
版　次：1997 年 3 月第 1 版　1997 年 3 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-02440-5/O・179
印　数：0001－3000
定　价：29.80 元

前　言

电子计算机的出现和迅速发展大大改变了科学技术发展的进程。流体力学的发展也因此出现了崭新的面貌。计算流体力学应运而生，新的计算方法层出不穷，每年的文献成千上万，目不暇接，计算流体力学的发展日新月异，前途似锦。可以预料，用电子计算机形象而又细致地再现复杂流体流动的理想已将不再是遥远的梦想了。

本书旨在为流体力学专业的大学生和研究生提供一本关于计算流体动力学的教材。书中在概述了几种流场的数学模型以后着重介绍了目前计算流体力学中最基本最常用的计算方法。特别强调方法的物理、数学背景，力图帮助读者建立这些方法中用到的基本概念，并且建立它们之间的关系，以便使读者达到触类旁通，举一反三的目的。在C篇中以大量的篇幅介绍各种方法在计算不同流动问题时会遇到的问题和解决的途径、其中包括网格生成及其求解引起的误差，并且分别介绍了无粘流、有粘流，不可压缩流和可压缩流以及工程中经常遇到的一些复杂流动的计算，其中有一些章节包括了作者的一些研究成果。通过这些章节的讨论使读者对于计算流体动力学在工程中的作用及具体应用方法有一个全面的了解。应当指出，计算流体动力学是一门实践性和应用性都很强的学科。读者为了深入理解各种方法的应用范围和解决实际问题时求解遇到的问题，唯一有效的方法是实践，在此作者愿与读者共勉之，在该篇结束时还简要介绍了近年来发展的新方法和新方向，供读者参考。

本书在编写过程中得到多位专家的热情指导和支持、原稿由核工业部研究生院华大平教授和金德圭教授细心审阅，另由于清华大学出版社的全力支持，使本书得以出版。在此作者向他们表示最深切的谢意。本书全部插图由清华大学出版社的描图小姐悉心绘制，在此作者表示衷心感谢。

由于作者才疏学浅，本书错误在所难免，敬请广大读者不吝赐教。

苏铭德　黄素逸

1997.1 于清华园

目 录

C篇 流场的数值计算

附录 流场的图像显示

A篇　数值模拟和数学模型

第1章　关于数值模拟

1.1　数值模拟的概念

数值模拟也叫计算机模拟。它以电子计算机为手段，通过数值计算和图像显示的方法，达到对工程问题和物理问题乃至自然界各类问题研究的目的。

正如P.J.Roache所指出，在计算机上实现一个特定的计算，非常类似于履行一个物理实验。这时分析人员已跳出了数学方程的圈子来对待物理现象的发生，就像做一次物理实验。

数值模拟实际上应该理解为用计算机来做实验。比如某一特定机翼的绕流，通过计算并将其计算结果在荧光屏上显示，可以看到流场的各种细节：如激波是否存在，它的位置、强度、流动的分离、表面的压力分布、受力大小及其随时间的变化等。通过上述方法，目前人们已能清楚地看到激波的运动、涡的生成与传播。总之数值模拟可以形象地再现流动情景，与做实验没有什么区别。

从上面的例子可以看到，数值模拟包含以下几个步骤：

首先要建立反映问题（工程问题、物理问题等）本质的数学模型。具体说就是要建立反映问题各量之间的微分方程及相应的定解条件。这是数值模拟的出发点。没有正确完善的数学模型，数值模拟就无从谈起。牛顿型流体流动的数学模型就是著名的纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程（简称NS方程）及其相应的定解条件。它及其简化后的数学模型将是本书研究的主要目标。

数学模型建立之后，需要解决的问题是寻求高效率、高准确度的计算方法。由于人们的努力，目前已发展了许多数值计算方法。本书将介绍目前最新发展的数值方法及其出发点。对于读者来说，分析各种方法的出发点是十分重要的。这有助于人们去寻求新的计算方法。计算方法不仅包括微分方程的离散化方法及求解方法，还包括贴体坐标的建立，边界条件的处理等。这些过去被人们忽略或回避的问题，现在受到越来越多的重视和研究。

在确定了计算方法和坐标系后，就可以开始编制程序和进行计算。实践表明这一部分工作是整个工作的主体，占绝大部分时间。由于求解的问题比较复杂，比如NS方程就是一个非线性的十分复杂的方程，它的数值求解方法在理论上不够完善，所以需要通过实验来加以验证。正是在这个意义上讲，数值模拟又叫数值试验。应该指出这部分工作决不是轻而易举的。

在计算工作完成后，大量数据只能通过图像形象地显示出来。因此数值的图像显示也是

一项十分重要的工作。目前人们已能把图作得像相片一样逼真。利用录像机或电影放映机可以显示动态过程，模拟的水平越来越高，越来越逼真。

以上这些步骤构成了数值模拟的全过程。其中数学模型的建立是理论研究的课题，一般由理论工作者完成。图像显示一般可由图像工作者完成。但在一些特定的情况下，数值模拟工作者也应当参加和进行计算机的作图工作。这是数值模拟中不可缺少的一个环节。

1.2 数值模拟产生的背景及其作用

16 世纪工业革命推动了自然科学的巨大发展，各种各样的自然规律被发现。牛顿奠定了力学的理论和数学分析的基础；伽利略开创了实验研究的范例。从此自然科学的研究在理论和实验两个方面得到了充分的发展。理论研究在探索大自然的奥秘及其发展的基本规律中发挥了重要的作用。实验研究则为理论研究提供了依据，并为揭示新的规律提供信息。这两种方法一直相辅相成、互相促进，推动科学不断发展。

随着研究的不断深化和问题本身的复杂化，理论研究受到了限制。实验研究同样也遇到了困难。电子计算机的产生和发展，使数值模拟这种研究手段应运而生。流体力学的发展证实了这一点。

理论流体力学从 18 世纪到 20 世纪中叶有了非常巨大的发展。尤其是随着航空事业的发展，人们早已在实验的基础上揭示了空气运动及其与飞行器相互作用的一般规律，并建立了流体运动所遵循的足够普遍和精确的方程——NS 方程，以及适用于各种不同范围的一些近似方程，求得了一些可以简化为线性方程及某些简单边界条件下的比较简单的解析解，及某一些简化条件下的摄动解。

但由于 NS 方程是非线性的，实际问题又比较复杂，因此精确解和摄动解只能用于分析流场的某些基本特性和现象，很难用于实际工程。比如一架飞机表面在飞行时的压力分布这类实际问题在飞机设计中十分重要，但几乎不可能用解析法或摄动法得到，长期以来理论只能作估算，大量问题还是靠风洞试验来解决。理论研究越来越不能满足实际问题的需要。

正是这个原因，实验流体力学得到了迅速的发展。从 50 年代起各国都十分重视实验设备的建设和实验技术的发展。为了对型号设计能直接提供可靠数据，很多风洞都有较大的尺寸。如美国 NASA 低速风洞实验段截面为 40 英尺×40 英尺，前苏联 ЦАГИ 低速风洞试验段截面为 12m×14m，美国拥有试验段截面为 16 英尺×16 英尺的跨声速风洞。超声速风洞试验段截面为 2m×2m，而高超声速风洞试验段也达 1m×1m。与此同时，各种特种风洞也纷纷建造起来，而且仍有发展和扩大的趋势。实验技术也飞速发展，如激光测速技术、全息技术、各种新型传感器、流场显示技术，电子计算机的数据处理技术等均有改善和提高，而实验费用也越来越昂贵。一架飞机的研制和实验研究的耗费几乎按指数规律上升。图 A.1.1 所示的是

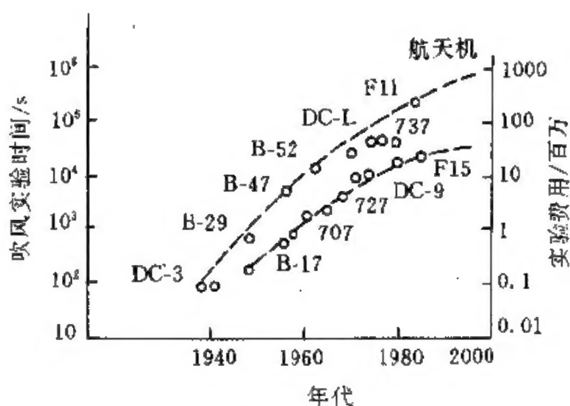


图 A.1.1

飞机及航天机吹风时间及费用的增长势头。按这一趋势估计，一架航天机吹风要花 10 年时间，耗资 1 亿美元以上。

实验研究无疑比较接近实际，但也有不足之处，比如洞壁、支架等干扰是无法避免和消除的。对于十分复杂的流动，如不定常流、高温和有化学反应流，气弹性变形流等都很难做实验，而且实验次数总是有限的，尺寸和实验条件的改变困难大、周期长。因此单凭实验研究也不能完全满足生产实际的需要。

由于高速电子计算机的出现，数值模拟这一手段使精确的空气动力设计由理想变为现实。与图 A.1.1 的趋势相反，图 A.1.2 表明计算的费用以指数规律下降，平均每 8 年下降为原来的 1/10。30 年来下降到原来的近 1/10000。计算机的计算速度也有了极大的提高。CDC-7600 浮点运算速度达 4×10^7次/s，IBM-370 为 4×10^6次/s，Cray-I 为 10^9次/s。最近日本、美国等还在研究制造更大和更快的计算机。除了超级巨型机的发展外，微处理机也有很大发展。由于计算机的发展，一些问题用数值模拟比做实验在时间和费用上都省得多，如道格拉斯公司对两个前缘形状不同的三元临界机翼的阻力特性分别进行计算和风洞试验，所得结果相近，但实验花了两年，耗资 60 万美元，而计算只花 4 天，花费 1 万美元。

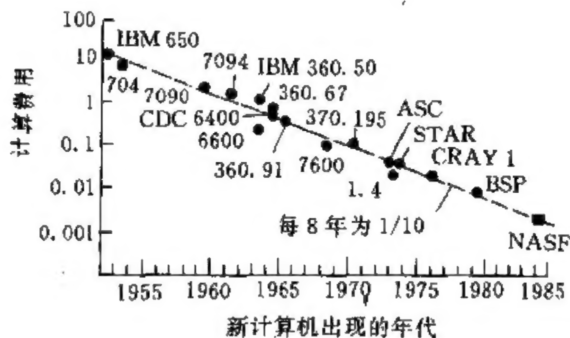


图 A.1.2

由于图形系统的出现和不断的完善，数值模拟的逼真性不断提高，它完全可以作为流动研究的一个手段，部分地替代一些实验研究。

1.3 数值模拟的意义、局限性和前景

由上述讨论可知，当问题本身遵循的规律比较清楚，所建立的数学模型比较准确并为实践证明能反映问题本质时，数值模拟具有较大的优越性。这是因为数值模拟具有耗费少，时间短，省人力等优点，便于优化设计，比实验研究更自由、更灵活，并且还能对实验难以量测的量做出估计，比如星体内部温度的推测、可控反应堆温度场分布、航天飞机飞行和返回时的复杂流场等。对核反应堆失水事故的模拟、反应堆在地震等特种条件下安全性的分析，这些都是实验研究难以模拟的情况。

数值模拟的另一个特点是具有很好的重复性，条件易于控制，可以重复模拟过程，这对湍流的数值模拟尤为重要。通过数值模拟还可以发现一些新的现象，比如两个孤立波相互作用的一些特性就是通过数值模拟首先被发现的。

由于数值模拟的优越性，所以得到越来越广泛的应用。不仅在航天航空工业中，也在其他工业中得到广泛的应用，比如核工程设备的设计和优化、水击分析、气轮机压缩机的设计与流场分析、石油输送管道的设计与优化、近海工程的设计、分析和优化、天气预报、海浪和风暴潮的预报等，都广泛应用数值模拟。

另一方面，数值模拟也有一定的局限性，面临不少问题。

首先是要有准确的数学模型。这不是所有问题都能做到的。对于不少问题，在其机理尚

未完全搞清楚之前，数学模型很难准确化。比如高速水流的气蚀现象、分层流界面的掺混问题、多相流各相间的相互作用、非牛顿流体的本构关系、物理化学流动中的复杂规律等，都难以用准确的数学模型加以描写，人们经常借助于各种半经验性的模型，这就大大地影响了数值模拟的正确性和可靠性。

其次是数值模拟中对数学方程进行离散化处理时，需要对计算中所遇到的稳定性、收敛性等进行分析。这些分析方法大部分对线性方程是有效的，对非线性方程来说只有启发性，没有完整的理论。对于边界条件影响的分析，困难就更大一些。所以计算方法本身的正确与可靠也要通过实际计算加以确定。在计算过程中有时还有一定的技巧性。因此为了验证计算结果的正确性，还必须与相应的实验研究结果进行比较。

再次，数值模拟本身还受到电子计算机本身条件的限制，即计算机运行速度和容量大小的限制、有些问题尽管已经有了成熟的数值模型，但是完全实现模拟并不现实。湍流运动的数值模拟是一个典型的例子。它的数学模型就是经典的纳维-斯托克斯方程。但由于流动是不定常的、三维的，各种涡的尺度变化很大，如果要详细描写湍流运动，至少需要在空间布置 $Re^{9/4}$ 个网格点，计算 $Re^{1/2}$ 个时间步长，每个点有 4 个变量（最少的情况），对于 $Re=10^4$ 的中等 Re 数流动而言，Cray-I 的 CPU 时间将为 10^4 小时。可见计算工作量之大是不现实的。因此为了能完全模拟湍流运动，还必须大力发展计算机，同时还要努力改进计算方法，提高计算效率。

总而言之，在强调数值模拟优越性的同时，也必须看到它的局限性，应该把它放在适当的位置。它与理论分析、实验研究相辅相成，作为研究流体流动的一个重要手段。

为了克服上述种种局限，不断提高数值模拟的能力和效益，目前出现了一些值得注意和令人鼓舞的新发展方向和前景。

在数学模型方面，人们开始注意一种全新的、根本不是由连续介质概念出发的完全离散的模型，即格子机。现在已有原子格子机和分子格子机等大体相近而又有区别的模型。在这种模型中，人们把流体看作由大量质点构成的，它们做类似于分子和原子的运动，它们之间的相互作用是十分简单的，因此运算也变得十分简单。但是质点的个数将是十分庞大的。利用这种模型人们可以描写流体的运动，而且已经取得了一些成果。为了有效地利用这种模型，人们需要设计专用的计算机。研究表明，该方法受到小 Re 数和低 M 数的限制，1992 年以来人们进一步发展了一种实数型格子器 Lattice Boltzman 方程，这是一种介于上述格子机和 NS 方程之间的一种全新的方法，已开始应用于一些复杂的流场的数值模拟，是一种全新的很有前途的方法，值得注意。

当然，目前人们最大量应用的仍是由偏微分方程离散化的方法来模拟流场，所以数值方法仍然是最主要的研究课题。目前主要在两个方向上发展。一是继续改进和设计新的计算方法。为了模拟复杂的、可压缩不定常、有间断（如激波）和有湍流的流动，人们设计了各种方法，如通量校正传输、通量分裂、守恒律系单调上风格式（MUSCL）、总变差减少法（TVD），有限元通量校正传输等方法，为世人瞩目。在计算水波，特别是破碎波方面，人们采用活动有限元法、自由拉格朗日法、无结构网格法。为快速求解椭圆型方程，人们发展了各种直接和半直接求解的方法、谱方法和多重网格法。我国数值流体力学工作者也作出了许多贡献，张涵信发展并广泛使用了反扩散法及无参数无振荡的耗散格式（NND），实践证明是行之有效的。黄兰洁 1980 年的工作被认为是 TVD 的一种早期格式，吴江航提出 L_∞ 收敛有限元-差分混合格式，沈孟育对有限体积法进行了改进。苏铭德将大涡模拟方法首先引入国内，并

且对复杂湍流运动进行了数值模拟。在另一方向上，人们考虑到并行机和向量机的出现，尽可能地采用适用于向量运算的计算方法。值得庆幸的是流体力学中的数值计算都可以实现或部分实现并行运算，这就为计算速度的提高开辟了广阔的前景、这一方向已经得到了人们的广泛重视。

向量计算及并行计算机的出现是计算机的一次重要革命。在计算中经常有大量的循环计算，它们有时是重复的而又互不相干的。这就可以同时进行计算，就好像几个人同时进行计算或在一流水线上分别做各自的计算，然后将结果汇总。这种方法突破了目前的困境，因为计算机内信号的传递速度约为光速的 1/5。目前大规模集成电路的进一步微型化在技术上困难越来越大，进一步提高计算机运算速度面临很大的困难，事实上计算机运行速度提高的速率已有下降的趋势。目前 Cray 机的运行速度已达 10^9 次/s，再提高有困难。而向量机可在不提高运行速度的情况下使计算速度成倍地上升，人们对此给予极大的重视。近年来人们进一步将计算机联合运行，出现并行机，一个复杂的大型问题可以分成若干区在并行机的不同部位同时进行计算，从而使计算速度进一步提高。

其次，人们为了进一步提高数值模拟的效果，在图像显示方面也有了新的发展，已出现了录像设备和计算机直接联机的装置，计算结果可以通过高分辨率电视屏幕显示。所有这一切使模拟更加逼真。

总之，数值模拟尽管仍然有不少局限性，但在人们的努力下，其潜在的能力将得到不断的发挥，应用范围将不断扩大，前景是十分乐观的。数值模拟将以其自身的特点和独特的功能，与理论分析及实验研究一起，成为流体力学研究的重要手段。

参 考 文 献

1. Richartmayer RD. Morton KW. Difference Methods for Initial-Value Problems. New York: J. Wiley & Sons, 1967
2. Peyret R, Taylor TD. Computational Methods for Fluid Flow. Springer-Verlag, 1967
3. Holt M. Numerical Methods in Fluid Dynamics. Springer-Verlag, 1980
4. Boris JP. New Directions in Computational Fluid Dynamics. in: Ann., Rew. Fluid Mech., 1989, 21: 341—385
5. Anderson DA, Tannehill JC. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Hemisphere Publishing Corporation, 1984

第2章　流场的数学模型

为了对流体流动进行数值模拟，首先要建立流体流动的数学模型。

所谓物理问题或工程问题的数学模型就是描写这些问题的各种量之间的数学关系，它们一般以微分方程（或积分型方程）出现，有时也附以一些代数方程。为确定这些方程的解还必须给出定解条件。这些方程连同定解条件一起就构成了数学模型。

为了确定数学模型，首先要确定描写问题的物理量或其他量，然后根据一些普遍的自然规律及与问题有关的特殊规律建立各量间的关系式，它们可以是微分方程，也可以是由理论分析或实验研究得到的各量间的定量关系(可以是微分方程或代数方程)。最后给出定解条件。

反映流体流动的量主要是速度（向量）、压力、密度、温度、熵、焓等物理量。流动所遵循的一般自然规律为质量守恒定律、动量守恒定律、能量守恒定律和热力学第一、二定律。如果流场与电磁场，化学反应等有关，还要遵循与此相关的定律。另外还要遵循由理论分析或实验研究所确定的规律，如热传导定律、相变规律、物性与状态参数之间的关系等。

在建立数学模型过程中，人们会碰到二种情况。一种情况是数学模型过于复杂，尽管它是精确的，但是人们无法求解。这时人们需要根据实际问题的特点对数学模型进行简化，这时的数学模型尽管是近似的，但它可以模拟流动的主要方面。另一种情况是有些规律在理论上难以分析，实验研究又比较困难，精确的规律尚不清楚、这时就需要引入一些模型，这些模型在某些方面反映了流场的实际情况。比如关于雷诺应力与流场速度分布之间的关系采用湍流应力模型，在两相流、非牛顿流、物理化学流中也都需要采用各种不同类型的模型。在这种情况下，数值模拟的效果很大程度上取决于模型的正确性和精确程度。同时可以看到，随着电子计算机的发展和科学技术的进步，数学模型将日益完善。

除了建立基本方程和基本关系式外，还需要给出定解条件。这也是一个十分困难的事。实际上不同类型的问题需要完全不同的定解条件。流体力学基本方程需要什么样的定解条件才能保证解的存在和唯一是一个尚未解决的问题。这需要人们对物理问题本身的特性有清晰的了解，才能对定解条件和数值方法有正确的认识。

本章介绍建立数学模型的一般方法，常见的流体力学的几种数学模型和定解条件的确立。

2.1　建立数学模型的基本方法

这里介绍的是连续介质力学数学模型建立的一般方法。描写流体运动的物理量所遵循的关系有二类，一类是由理论分析或实验研究得到的关系式，如气体的状态方程、热传导的富利埃定律、应力张量和应变速率张量之间的关系(线性的牛顿关系和非线性的非牛顿关系)等。这些定律和关系将在本章直接被引用。另一类关系是由自然界普遍规律得到的，一般是一些偏微分方程，人们常称它们为基本方程。本节讨论建立这些基本方程的方法。

建立基本方程的最常用的方法大体如下：首先在流场内任意地选取一控制体，这一控制体是想像的、任意的，并且对于所选用的坐标系是相对静止的，如图 A.2.1 所示。控制体的体积记作 V，它的表面记作 S，表面的外法向记作 $\boldsymbol{n}$，其长度为单位长。流体流动的速度记作

$\boldsymbol{V}$，它是空间位置 $\boldsymbol{r}$ 及时间 t 的函数。流体的密度记作 ρ_0，然后考虑在时间 t 到 $t+\Delta t$ 时间间隔内通过控制体表面流体物理量（质量、动量、能量）的通量、体内物理量的变化以及控制体外流体对体内流体的作用量、三者之间可根据守恒定理得到平衡关系，这种关系是积分型式的。最后利用场论方法将表面积分转换为体积分。当控制体连续地收缩到一个点就得到了微分型的基本方程。

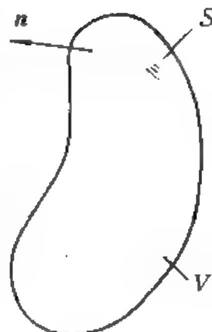


图 A.2.1

首先讨论连续方程的建立。连续方程是基于质量守恒定律得到的。在 t 到 $t+\Delta t$ 时间间隔内，在 Δt 足够小的情况下，通过控制面流出控制体的质量为

$$\oint_S \rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \delta S \cdot \Delta t$$

这里面积元记作 δS，这是因为它与时间 t 无关。下面公式中 δV 为体积元，与时间也无关。在这一时间间隔内控制体内由于密度随时间变化而使质量增加的量为

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta V \cdot \Delta t$$

在没有其它质量来源的情况下，由质量守恒定律可知，控制体内质量的下降应当等于流出控制体的质量，故有平衡关系式：

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta V \cdot \Delta t = -\oint_S \rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \delta S \cdot \Delta t$$

约去 Δt 后得方程

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta V + \oint_S \rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \delta S = 0 \tag{A.2.1.1}$$

这就是积分型的连续方程。将控制体取作坐标网格单元，积分用平均量与面元面积或体元体积相乘来代替，就构成了有限体积法的基本思想。

利用奥-高定理，面积分可以改写为体积分

$$\oint_S \rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n} \delta S = \int_V \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) \delta V$$

将它代入（A.2.1.1）式可得

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) \right] \delta V = 0$$

由于控制体是任意选取的，所以当被积分量为连续变化时必有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0 \tag{A.2.1.2}$$

这就是微分型的连续方程。

动力学方程和能量方程分别由动量守恒定律和能量守恒定律得到的。

动力学方程的建立。

在 Δt 时间间隔内通过控制体表面 S 向控制体外流出的流体动量为

$$\oint_S (\rho \boldsymbol{V}) \cdot (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) \delta S \cdot \Delta t$$

由外界流体在控制体表面处对控制体内流体作用的冲量为

$$\oint_S \sigma_n \delta S \cdot \Delta t$$

其中$\boldsymbol{\sigma}_n$为S面处作用于控制体内流体的表面应力。在外界体积力作用于控制体内流体的冲量为

$$\int_V \rho \boldsymbol{f} \delta V \cdot \Delta t$$

其中$\boldsymbol{f}$是作用于单位质量上的向量力。在同一时间间隔内控制体内流体动量的增加为

$$\int_V \frac{\partial(\rho \boldsymbol{V})}{\partial t} \delta V \cdot \Delta t$$

根据动量定律，各量间的平衡可得方程

$$\int_V \frac{\partial(\rho \boldsymbol{V})}{\partial t} \delta V \cdot \Delta t = \left[- \oint_S \rho \boldsymbol{V}(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) \delta S + \oint_S \boldsymbol{\sigma}_n \delta S + \int_V \rho \boldsymbol{f} \delta V \right] \cdot \Delta t$$

约去Δt即得积分型动量方程

$$\int_V \frac{\partial(\rho \boldsymbol{V})}{\partial t} \delta V + \oint_S \rho \boldsymbol{V}(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) \delta S = \oint_S \boldsymbol{\sigma}_n \delta S + \int_V \rho \boldsymbol{f} \delta V \tag{A.2.1.3}$$

由于

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$$

其中$\boldsymbol{\sigma}$为应力张量，它是一对称张量，利用奥-高定理可得

$$\oint_S \boldsymbol{\sigma}_n \delta S = \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \delta S = \int_V \mathrm{Div} \boldsymbol{\sigma} \delta V \tag{A.2.1.4}$$

另外利用连续方程有

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial(\rho \boldsymbol{V})}{\partial t} \delta V &= \int_V \boldsymbol{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta V + \int_V \rho \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} \delta V \\ &= \int_V - \boldsymbol{V} \cdot [\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V})] \delta V + \int_V \rho \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} \delta V \end{aligned}$$

将上述关系代入（A.2.1.3）式可得

$$\begin{aligned} \int_V \rho \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} \delta V + \int_V \boldsymbol{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta V - \int_V - \boldsymbol{V} \cdot [\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V})] \delta V + \oint_S \rho \boldsymbol{V}(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) \delta S \\ = \int_V (\mathrm{Div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{f}) \delta V \end{aligned}$$

考虑到场论公式

$$\int_V [(\boldsymbol{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}(\nabla \cdot \boldsymbol{V})] \delta V = \oint_S \boldsymbol{a} V_n \delta S \tag{A.2.1.5}$$

取$\boldsymbol{a} = \rho \boldsymbol{V}$，再代入前一式即得

$$\int_V \rho \left[\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{V} \right] \delta V = \int_V (\mathrm{Div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{f}) \delta V$$

考虑到

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{V} \equiv \frac{\mathrm{d} \boldsymbol{V}}{\mathrm{d} t}$$

以及控制体的任意性即可得微分型的动量方程：

$$\rho \frac{\mathrm{d} \boldsymbol{V}}{\mathrm{d} t} = \rho \boldsymbol{f} + \mathrm{Div} \boldsymbol{\sigma} \tag{A.2.1.6}$$

能量方程的建立。

这里假定流体与外界的能量交换只限于机械能和热能。在有其他能量交换时可加入相应项。

在 Δt 时间间隔内，控制体内流体能量由于外界体积力做功所增加的量为

$$\int_V \rho \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{f} \delta V \cdot \Delta t$$

外界流体对控制体内流体通过表面力所做的功为

$$\oint_S \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{V} \delta S \cdot \Delta t$$

流体通过控制体表面向外流出的能量（动能和内能）为

$$\oint_S \rho\left(\frac{V^2}{2}+e\right)(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) \delta S \cdot \Delta t$$

由于热传导通过控制体表面从外界得到的热能为

$$\oint_S k \frac{\partial T}{\partial n} \delta S \cdot \Delta t$$

流体由于外界激体加热（如辐射等）所得热量为

$$\int_V \rho q_k \delta V \cdot \Delta t$$

流体在此期间增加的能量为

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{V^2}{2}+e\right)\right] \delta V \cdot \Delta t$$

根据能量守恒定律可得到能量平衡方程为（约去 Δt）

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{V^2}{2}+e\right)\right] \delta V=\int_V \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{V} \delta V+\oint_S \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{V} \delta S-\oint_S \rho\left(\frac{V^2}{2}+e\right) V_n \delta S$$

$$+\oint_S k \frac{\partial T}{\partial n} \delta S+\int_V \rho q_k \delta V \qquad (\text{A}.2.1.7)$$

这就是积分型的能量方程。

考虑到应力张量是对称的，利用奥-高定理有

$$\oint_S \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{V} \delta S=\oint_S (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{V} \delta S=\oint_S \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{V}) \delta S=\int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{V}) \delta V$$

此外还有

$$\oint_S k \frac{\partial T}{\partial n} \delta S=\int_V \nabla \cdot (k \nabla T) \delta V$$

$$\oint_S \rho\left(\frac{V^2}{2}+e\right) V_n \delta S=\int_V \nabla \cdot\left[\rho\left(\frac{V^2}{2}+e\right) \boldsymbol{V}\right] \delta V$$

（A.2.1.7）式可改写为

$$\int_V\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{V^2}{2}+e\right)\right]+\nabla \cdot\left[\rho \boldsymbol{V}\left(\frac{V^2}{2}+e\right)\right]\right\} \delta V$$

$$=\int_V\left[\rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{V}+\rho q_k+\nabla \cdot(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{V})+\nabla \cdot(k \nabla T)\right] \delta V$$

同样由于 V 的任意性可得微分型的能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{V^2}{2}+e\right)\right]+\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{V}\left(\frac{V^2}{2}+e\right)\right]$$
$$=\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V}+\rho q_k+\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{V})+\nabla\cdot(k\nabla T) \tag{A.2.1.8}$$

以上（A.2.1.1），（A.2.1.3），（A.2.1.7）构成了三个积分型基本方程，（A.2.1.2），（A.2.1.6），（A.2.1.8）则构成了微分型的基本方程。应该指出，这几个方程是不封闭的，还需要附加其他关系才能得到完整的封闭方程。

2.2 流体流动的几个主要数学模型

一般说描述流体流动的基本方程是NS方程，但它比较复杂，所以人们针对不同问题进行了简化。本节将介绍NS方程及其在不同情况下简化所得的方程。关于边界条件将在下节介绍。

2.2.1 NS方程

前面已经介绍了基本方程的建立。为使方程封闭，必须附加其他条件。一个重要的附加关系是应力张量和变形速率之间的关系。对于牛顿流体，这关系呈线性关系，具体形式为

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{I}+\left(\mu'-\frac{2}{3}\mu\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{S} \tag{A.2.2.1}$$

其中 p 为压力，$\boldsymbol{I}$ 为单位张量，μ 为流体粘性系数，μ' 为流体膨胀粘性系数，$\boldsymbol{S}$ 为流体变形速率张量。一般将上式简写为

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\tau} \tag{A.2.2.2}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 称作剪应力张量、将它代入（A.2.1.6）及（A.2.1.8）式可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{1}{\rho}\mathrm{Div}\boldsymbol{\tau} \tag{A.2.2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{V^2}{2}+e\right)\right]+\nabla\cdot\left[\rho\boldsymbol{V}\left(\frac{V^2}{2}+e\right)\right]$$
$$=\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V}+\rho q_k-\nabla\cdot(p\boldsymbol{V})+\rho\Phi+\nabla\cdot(k\nabla T)+\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{Div}\boldsymbol{\tau} \tag{A.2.2.4}$$

其中
$$\Phi=\left(\mu'-\frac{2}{3}\mu\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{V})^2+2\mu S_{ij}S_{ij} \tag{A.2.2.5}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Div}\boldsymbol{\tau}=\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i\\&\boldsymbol{\tau}=\left(\mu'-\frac{2}{3}\mu\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{S}\end{aligned}\right\} \tag{A.2.2.6}$$

对于 i，j 重复下标有求和约定。在直角坐标下有

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{A.2.2.7}$$

(A.2.2.3) (A.2.2.4) 与连续方程 (A.2.1.1) 一起构成牛顿流体流动的基本方程，称为 NS 方程。另外需要给出以下补充关系：

状态方程

$$p = p(\rho, T)$$
$$e = e(\rho, T)$$

物性系数与状态参数的关系

$$\mu' = \mu'(\rho, T)$$
$$\mu = \mu(\rho, T)$$
$$k = k(\rho, T)$$

为以后使用方便，一般将 NS 方程写成守恒型和非守恒型二种。在直角坐标下的形式为：

非守恒型

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} + B\frac{\partial U}{\partial y} + C\frac{\partial U}{\partial z} = R \qquad (A.2.2.8)$$

其中
$$U = (\rho, u, v, w, e)^{T}$$

$$A = \begin{bmatrix} u & \rho & & & \\ & u & & & \\ & & u & & \\ & & & u & \\ & & & & u \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} v & & \rho & & \\ & v & & & \\ & & v & & \\ & & & v & \\ & & & & v \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} w & & & \rho & \\ & w & & & \\ & & w & & \\ & & & w & \\ & & & & w \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\right\} \\ f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right]\right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\right\} \\ f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right]\right\} \\ -\frac{p}{\rho}(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) + \frac{\Phi}{\rho} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + q_k\right] \end{bmatrix}$$

守恒型

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = R \qquad (A.2.2.9)$$

其中

$$U=\left(\rho,\rho u,\rho v,\rho w,\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right)^{\mathrm{T}}$$

$$F=\begin{bmatrix}\rho u\\ p+\rho u^2+\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\\ \rho uv-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ \rho uw-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ (E_s+p)u-\left[2\mu u\frac{\partial u}{\partial x}+\mu v\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\mu w\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{2}{3}\mu u(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-k\frac{\partial T}{\partial x}\right]\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\ p+\rho v^2+\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\\ \rho vw-\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ (E_s+p)v-\left[\mu u\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2\mu v\frac{\partial v}{\partial y}+\mu w\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{2}{3}\mu v(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-k\frac{\partial T}{\partial y}\right]\end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix}\rho w\\ \rho uw-\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \rho vw-\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ p+\rho w^2+\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\\ (E_s+p)w-\left[\mu u\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\mu v\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+2\mu w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{2}{3}\mu w(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-k\frac{\partial T}{\partial z}\right]\end{bmatrix}$$

$$R=(0,\rho u,\rho v,\rho w,\rho(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V}+q_k))^{\mathrm{T}}$$

其中

$$E_s=e+\frac{V^2}{2}\quad \mu'=0$$

2.2.2 对流方程

严格说来，研究由于流动引起的热交换，或由于热引起的流体流动都可以直接求解NS方程，但从上面叙述可见NS是相当复杂的，直接求解很困难，一般需要作一些简化。

由温差引起的流动叫自然对流，一般说它们的流动速度不大，可以引用Boussinesq近似，认为：

(1) 流体可以看作不可压的，即由于压力变化引起的密度变化可以忽略不计。密度的差异只是由温差引起的；(2) 物性参数，如比热、热传导系数等都是常数，它们取流场平均温度时的相应值；(3) 由于温度变化引起的密度可近似表示为

$$\rho=\rho_0(1-\alpha\Delta T) \tag{A.2.2.10}$$

α 为热膨胀系数；(4) 流体是牛顿型的，流体内部没有热源，耗散和热辐射也均被略去。

根据上述假定，连续方程具有如下形式：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{A.2.2.11}$$

由于 α 和 ΔT 均不大，所以密度变化不大，记 $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$，作用于流体的重力为

$$\rho \boldsymbol{f} = -\rho g \boldsymbol{k} = -(\rho_0 + \Delta\rho) g \boldsymbol{k} = -\rho_0 g \boldsymbol{k} - \Delta\rho \cdot g \boldsymbol{k}$$

其中 g 为重力加速度。与（A.2.2.10）式比较可得 $\Delta\rho = -\alpha\rho_0\Delta T$，代入动力学方程可得

$$\rho_0 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p - \rho_0 g \boldsymbol{k} + \mu\nabla^2 \boldsymbol{V} + \alpha\rho_0\Delta T g \boldsymbol{k}$$

在分析海洋暖流时还要考虑地球的旋转，这时要考虑科氏力。考虑到压力 p 可以分成二部分：一部分与重力平衡，一部分是对流引起的，仍以 p 表示，于是上式可改写为

$$\rho_0 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p + \mu\nabla^2 \boldsymbol{V} + \rho_0\alpha\Delta T g \boldsymbol{k} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V} \tag{A.2.2.12}$$

这就是热对流的动力学方程。而能量方程则简化为

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\frac{p}{\rho}(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) + \frac{1}{\rho}\Phi + \frac{1}{\rho}k\nabla^2 T + q_k$$

由于

$$\frac{p}{\rho}(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) = \frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

故上式改写为

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\rho}\right) \equiv \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho}\Phi + \frac{1}{\rho}k\nabla^2 T + q_k$$

利用 Boussinesq 假定可得简化方程

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\rho}\nabla^2 T \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\rho c_p}\nabla^2 T \tag{A.2.2.13}$$

（A.2.2.11～A.2.2.13）组成了热对流的基本方程组。

2.2.3 不可压缩流动

在上面讨论中虽然流动假定为不可压缩的，但不同位置流体由于温度不同而造成密度不同。这在讨论对流时是十分必要的，但在许多流动中温度差别引起的流动是微不足道的。这时，如果流速比声速小得多时（如流速不到声速的 0.2～0.3 倍时），流体的密度变化可以忽略不计，这时流动可视为不可压流动，其特点是密度为常数，连续方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{A.2.2.14}$$

动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mu\nabla^2 \boldsymbol{V} \tag{A.2.2.15}$$

能量方程为

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\rho}\nabla^2 T + q_k + \frac{1}{\rho}\Phi \tag{A.2.2.16}$$

上面三个方程即为不可压缩流体流动的基本方程。能量方程是独立于其他方程之外的，所以可以单独求解。

由于连续方程中不出现密度项，求解时会有所不便，故人们引入向量流函数 $\boldsymbol{\psi}$，使

$$\boldsymbol{V} = \nabla \times \boldsymbol{\psi} \tag{A.2.2.17}$$

这时连续方程自动满足。动力学方程可以改写为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+((\nabla \times \psi)\cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot \nabla)(\nabla \times \psi)=\nabla \times \boldsymbol{f}+\upsilon\nabla^2\boldsymbol{\Omega}\\&\boldsymbol{\Omega}=\nabla(\nabla \cdot \psi)-\Delta\psi\end{aligned}\right\} \tag{A.2.2.18}$$

在平面流动时 $\Omega=\zeta R$，ζ 为 Ω 的大小。上述方程简化为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y}=\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}+\upsilon\Delta\zeta\\&\Delta\psi=-\zeta\end{aligned}\right\} \tag{A.2.2.19}$$

流函数的方法在平面问题时经常引用，其优点是消除了压力项，但带来了 ζ 的边界条件问题。此外，以上公式中 $\upsilon=\frac{\mu}{\rho}$ 为运动粘性系数。

2.2.4 边界层方程和抛物化方程

在高雷诺数流动中，物体壁面附近存在一层很薄的粘性起很大作用的薄层，即边界层。在边界层内速度沿壁面法向梯度很大，速度大体上与壁面平行。而在边界层外粘性作用就小得多，可以近似看作无粘性流动。边界层厚度 $\delta\sim L/\sqrt{Re}$，L 为流动的特征长度，Re 为雷诺数。在二维自然坐标下，边界层方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v_S}{\partial t}+\frac{v_S}{h}\frac{\partial v_S}{\partial S}+v_n\frac{\partial v_S}{\partial n}=-\frac{1}{\rho h}\frac{\partial p}{\partial S}+\upsilon\frac{\partial^2 v_S}{\partial n^2}\\&\frac{v_S^2}{R}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\\&\frac{1}{h}\frac{\partial v_S}{\partial S}+\frac{\partial v_n}{\partial n}+\frac{v_n}{hR}=0\end{aligned}\right\} \tag{A.2.2.20}$$

其中前二式为动力学方程，$h=1+n/R$，R 为壁面曲率半径，n 为壁面法向距离。这里假定流体不可压。

边界层方程具有抛物型方程的特性，具有明显的特征流动方向。近年来人们还提出一种抛物化方程。由于作法不一，所得的抛物化方程也是不同的。一个比较简单的作法是当流动沿某一方向时，该方向选作 x，z 方向，而另一方向 y 上的速度与主流方向速度相比小很多，这时假定导数项 $\partial^2/\partial x^2,\partial^2/\partial z^2,\partial^2/\partial x\partial y,\partial^2/\partial z\partial y,\partial^2/\partial y\partial z$ 均为小量且可以略去，于是可得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0\\&\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial \rho uu}{\partial x}+\frac{\partial \rho uv}{\partial y}+\frac{\partial \rho uw}{\partial z}=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&\frac{\partial \rho v}{\partial t}+\frac{\partial \rho uv}{\partial x}+\frac{\partial \rho vv}{\partial y}+\frac{\partial \rho vw}{\partial z}=\rho f_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\&\frac{\partial \rho w}{\partial t}+\frac{\partial \rho uw}{\partial x}+\frac{\partial \rho vw}{\partial y}+\frac{\partial \rho ww}{\partial z}=\rho f_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\&\frac{\partial \rho e}{\partial t}+u\frac{\partial \rho e}{\partial x}+v\frac{\partial \rho e}{\partial y}+w\frac{\partial \rho e}{\partial z}=-\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\Phi}{\rho}\end{aligned}\right\} \tag{A.2.2.21}$$

其中

$$\Phi = \frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

这个方程也叫薄层方程，具有抛物型性质。

2.2.5 欧拉方程

上面叙述已经指出，在远离物面处，流体的粘性作用很小，可以忽略不计，于是可以得到无粘性流体的基本方程，称作欧拉方程。向量形式为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0 \\ &\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p \\ &\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e + \frac{V^2}{2}\right) = \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{V} - \nabla \cdot (p\boldsymbol{V}) \end{aligned}\right\} \tag{A.2.2.22}$$

最后一个方程也可由热力学方程得到。因为无粘流时有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{A.2.2.23}$$

s 为熵，完全气体时有

$$s = c_V \ln \frac{p}{\rho^\gamma}$$

为以后使用方便可写出（A.2.2.22）的散度形式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = R \tag{A.2.2.24}$$

其中

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E_s)^{\mathrm{T}}$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E_s + p)u \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ \rho vw \\ (E_s + p)v \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ p + \rho w^2 \\ (E_s + p)w \end{bmatrix}$$

非散度型为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A\frac{\partial V}{\partial x} + B\frac{\partial V}{\partial y} + C\frac{\partial V}{\partial z} = Q \tag{A.2.2.25}$$

其中

$$V = (\rho, u, v, w, p)^{\mathrm{T}}$$

$$A = \begin{bmatrix} u & \rho & & & \\ & u & & & \frac{1}{\rho} \\ & & u & & \\ & & & u & \\ -a^2 u & & & & u \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} v & & \rho & & \\ & v & & & \\ & & v & & \frac{1}{\rho} \\ & & & v & \\ -a^2 v & & & & v \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} w & & & \rho & \\ & w & & & \\ & & w & & \\ & & & w & \frac{1}{\rho} \\ -a^2 w & & & & w \end{bmatrix}$$

$$Q = (0, f_x, f_y, f_z, 0)^{\mathrm{T}}$$

当来流速度均匀，产生的激波又不很强烈时，流动可以视作无旋的，可引入速度势 φ，使

$$\boldsymbol{V} = \nabla \varphi$$

这时定常流动的速度势满足方程

$$(a^2 - u^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + (a^2 - v^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + (a^2 - w^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

$$+ 2uv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + 2uw\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + 2vw\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} = 0 \qquad (A.2.2.26)$$

这就是所谓的全位势方程。在亚声速或小超声速时，小扰动流动位势方程为

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial z^2} = 0 \qquad (A.2.2.27)$$

跨声速时小扰动方程为

$$\left[K - (\gamma + 1)\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right]\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial z^2} = 0 \qquad (A.2.2.28)$$

不难看出，$M_\infty \to 0$ 时即为不可压缩的情况，它的位势方程为

$$\Delta\varphi = 0 \qquad (A.2.2.29)$$

这是一个典型的椭圆型方程，即 Laplace 方程。

2.2.6 水波运动、明渠流和水击

水波运动是一种在重力作用下有自由面的水运动。水一般视为不可压缩流体。由于重力作用是有位的，流体的粘性不大，其作用可以忽略，所以流场可以看作是有位的、无旋的，故有

$$\boldsymbol{V} = \nabla\varphi \qquad (A.2.2.30)$$

代入连续方程即得

$$\Delta\varphi = 0 \qquad (A.2.2.31)$$

自由面的位置一般是未知的，其上一般有二个条件，一个是运动学条件：

$$w - u\frac{\partial\zeta}{\partial x} - v\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\zeta}{\partial t} = 0 \qquad (A.2.2.32)$$

其中 ζ 为自由面的位置，另外一个是动力学条件：

$$p_{自由面} = 常数$$

利用伯努利方程可得上述条件的表达式为

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + g\zeta + \frac{p_a}{\rho} = 0 \quad (z = \zeta) \qquad (A.2.2.33)$$

在水波幅度比较小时，非线性项可以忽略，于是运动学条件和动力学条件分别简化为

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \qquad (A.2.2.34)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=0} + g\zeta + \frac{p_a}{\rho} = 0 \qquad (A.2.2.35)$$

当水的深度不大，水的波长比水深度大很多时，人们采用浅水波理论，其中假定水的速度沿深度方向不变，而且沿深度方向的速度分量 w 略去不计。记 h 为水的深度，由上述假设，可建立浅水波运动连续方程：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \qquad (A.2.2.36)$$

和动力学方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial hu}{\partial t}+\frac{\partial hu^2}{\partial x}+\frac{\partial huv}{\partial y}&=-gh\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{(\tau_{wind})_x}{\rho}-\frac{(\tau_w)_x}{\rho}\\\frac{\partial hv}{\partial t}+\frac{\partial huv}{\partial x}+\frac{\partial hv^2}{\partial y}&=-gh\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{(\tau_{wind})_y}{\rho}-\frac{(\tau_w)_y}{\rho}\end{aligned}\right\}\qquad(A.2.2.37)$$

其中τ_{wind}为表面风切应力；τ_w则为水底的摩擦阻力。这里假定水底是水平的，在有坡度时还要加上与坡度有关系的项。当流动只有一维时则为明渠流基本方程。

一般情况下，水被视为不可压缩流体，但在水击流动中，水必须考虑为可压缩流体。水击流动的研究对核反应堆的安全性分析具有重要的意义。

在研究水击流动时，人们做如下的假设：(1) 流动视作一维的，即管截面上的物理量取平均值；(2) 流体是可压缩的，但压缩性非常小，故压力与密度关系呈线性；(3) 管的截面积可以是变化的，并与当地的压力有关。根据以上假定有：

$$\rho=\rho_0\left(1+\frac{p}{K}\right)\qquad(A.2.2.38)$$

其中K为水的体积弹性模量。另外还有

$$\Delta d=\frac{\Delta\sigma_{stress}}{E}d=\frac{d\Delta p}{2TE}d=\frac{\Delta p}{2TE}d^2\qquad(A.2.2.39)$$

其中Δp为管内外压力差，E为管壁的杨氏模量，T为管壁的厚度。

利用以上假定，可以得到水击运动的连续方程：

$$\frac{\partial h}{\partial t}+V\frac{\partial h}{\partial x}+\sqrt{\frac{C^2}{g}}\frac{\partial h}{\partial x}-V\frac{\partial z}{\partial x}=0\qquad(A.2.2.40)$$

其中h为流体运动的静压头与管道截面标高之和，V为流动速度，z为截面标高，g为重力加速度，C由

$$\frac{g}{\gamma C^2}=\frac{1}{K}+\frac{d}{TE}\qquad(A.2.2.41)$$

确定，其中$\gamma=\rho g$，ρ为水的密度。

动力学方程为

$$\gamma\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\tau}{A/L}+\rho\frac{\partial V}{\partial t}-\rho V\frac{\partial V}{\partial x}=0\qquad(A.2.2.42)$$

其中τ为管壁切应力，L为管截面湿周边，A为管截面积，(A.2.2.40，A.2.2.42) 为水击运动的基本方程，在水管中还存在各种形式的接头和阀门以及水容器等，所以对于不同器件要作不同处理，这里不作详细介绍。

2.2.7 湍流

湍流运动是一种十分复杂的流动，100多年来的艰苦努力仍然没有能够攻克这一顽固堡垒，至今仍然看不到解决的前景。所以目前人们仍只能借助于一些半经验的工程模型来研究。电子计算机的出现为数值模拟湍流运动带来了希望，要完全实现这一愿望仍然有很多困难，有待电子计算机速度进一步提高和容量进一步扩大。

这里介绍雷诺方程及工程模型。

对NS方程关于时间进行平均可以得到雷诺方程。下面限于不可压缩湍流运动。一物理量对时间平均定义为

$$\overline{\phi} = \frac{1}{T}\int_0^T \phi dt$$

其中 T 为时间间隔（相对于脉动周期而言比较长）。物理量本身与时均值之差为脉动量，记作 ϕ'，显然有

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \quad \overline{\overline{\phi}} = \overline{\phi} \quad \overline{\phi'} = 0$$

$$\overline{\phi_1 + \phi_2} = \overline{\phi_1} + \overline{\phi_2} \quad \overline{\phi_1\phi_2} = \overline{\phi_1}\cdot\overline{\phi_2} + \overline{\phi'_1\phi'_2}$$

将这些平均方法应用于 NS 方程可得雷诺方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{w}}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial\overline{u}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{u}\,\overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{u}\,\overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{u}\,\overline{w}}{\partial z} = \overline{f}_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{xx} - \overline{u'u'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{yx} - \overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{zx} - \overline{u'w'})}{\partial z} \\
&\frac{\partial\overline{v}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{u}\,\overline{v}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{v}\,\overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{v}\,\overline{w}}{\partial z} = \overline{f}_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{xy} - \overline{u'v'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{yy} - \overline{v'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{zy} - \overline{v'w'})}{\partial z} \\
&\frac{\partial\overline{w}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{u}\,\overline{w}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{v}\,\overline{w}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{w}\,\overline{w}}{\partial z} = \overline{f}_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{xz} - \overline{u'w'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{yz} - \overline{v'w'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{zz} - \overline{w'w'})}{\partial z} \\
&\frac{\partial\overline{T}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{T}\,\overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{T}\,\overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{T}\,\overline{w}}{\partial z} + \frac{\partial\overline{T'u'}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{T'v'}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{T'w'}}{\partial z} \\
&= \frac{k}{\rho c_V}\left(\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\overline{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\overline{T}}{\partial z^2}\right) + \frac{\overline{q}_k}{c_V} + \frac{\overline{\Phi}}{\rho c_V}
\end{aligned}\right\}$$

(A.2.2.43)

其中$\overline{u'u'}$，$\overline{u'v'}$，……，$\overline{w'w'}$称作雷诺应力项，$\overline{T'u'}$，$\overline{T'v'}$，$\overline{T'w'}$表示由于流体微团脉动引起的热量传递。以上这些量都是未知的，因此（A.2.2.43）式是不封闭的。为使方程封闭，需加上它们与平均量之间的关系，这些关系一般是半经验的和带有启发性的，称为湍流模型。目前有许多不同类型的模型，归纳起来有以下几种：

1. 一阶封闭模型（零方程模型）

首先引入记号 $\tau_{ij}^* = -\rho\overline{v'_i v'_j}$。零方程模型主要有以下几个不同模型：

(1) $-\overline{u'v'} = \nu_T\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial y}$　　Boussinesq 涡量粘性模型

(2) $-\overline{u'v'} = l^2\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial y}\left|\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right|$　　Prandtl 混合长度理论

(3) $-\overline{u'v'} = k\Delta\overline{u}\cdot\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial y}$　　Prandtl 尾迹混合长度理论

(4) $-\overline{u'v'} = k^2\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial y}\left|\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial y}\right|^3\Big/\left|\dfrac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}\right|^2$　　Kármán 局部相似混合长度理论

(5) $\dfrac{\tau_{ij}^*}{\rho} = \nu_T\left(\dfrac{\partial\overline{v}_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial\overline{v}_j}{\partial x_i}\right) - \dfrac{2}{3}\delta_{ij}k$　　δ_{ij} 为 Kroneker 算符

$$\left.\begin{aligned}
&k = \frac{1}{2}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \\
&\nu_T = C_\mu k^2/\varepsilon \\
&\varepsilon = \nu\overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_l}\frac{\partial v'_i}{\partial x_l}}
\end{aligned}\right\}\text{雷诺比拟模型}$$

(A.2.2.44)

2. 二阶封闭模型

主要有以下几种方法：

(1) k-ε 模型

在前面提到的雷诺比拟模型中的 k，ε 需要另行确定，所用的方程如下：

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial k}{\partial t}+\bar{v}_i\frac{\partial k}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left[c_k\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_l}+v\frac{\partial k}{\partial x_l}\right]-\overline{v'_iv'_l}\frac{\partial v_i}{\partial x_l}-\varepsilon \qquad (A.2.2.45)$$

其中 $c_k\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_l}+v\frac{\partial k}{\partial x_l}$ 为湍流动能扩散项；$\overline{v'_iv'_l}\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_l}$ 为湍流动能生成项；ε 为湍流动能耗散速率。

$$c_k=0.09\sim 0.11$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{v'_iv'_j}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left[c_k\frac{P^2}{\varepsilon}\frac{\partial\overline{v'_iv'_j}}{\partial x_l}+v\frac{\partial\overline{v'_iv'_j}}{\partial x_l}\right]+P_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon$$

$$-c_1\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{v'_iv'_j}-\frac{2}{3}\delta_{ij}k\right)-c_2\left(P_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}P_k\right)$$

其中

$$P_{ij}=-\left(\overline{v'_iv'_m}\frac{\partial\bar{v}_j}{\partial x_m}+\overline{v'_jv'_m}\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_m}\right)$$

$$P_k=-\overline{v'_nv'_m}\frac{\partial\bar{v}_n}{\partial x_m}$$

$$P=P_{ii}$$

$$c_k=0.09\sim 0.11\quad c_1=1.5\sim 2.2\quad c_2=0.4\sim 0.5 \qquad (A.2.2.46)$$

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left(c_\varepsilon\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}+v\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}\right)-c_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{k}\overline{v'_iv'_j}\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_j}-c_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon}{k}$$

$$c_\varepsilon=0.07\sim 0.09\quad c_{\varepsilon1}=1.41\sim 1.45\quad c_{\varepsilon2}=1.9\sim 1.92 \qquad (A.2.2.47)$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}\,\overline{v'_iT'}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left(c_T\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial\overline{v'_iT'}}{\partial x_l}+\alpha\frac{\partial\overline{v'_iT'}}{\partial x_l}\right)-\left(\overline{v'_iv'_l}\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_l}+\overline{v'_lT'}\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_l}\right)$$

$$-c_{T_1}\frac{\varepsilon}{k}\overline{v'_iT'}+c_{T_2}\overline{v'_mT'}\frac{\partial\bar{v}_j}{\partial x_m}$$

其中

$$c_T=0.07\quad c_{T_1}=3.2\quad c_{T_2}=0.5 \qquad (A.2.2.48)$$

以上方程中 k，ε 方程是基本的，其它量由它们计算出来。以上模型比较复杂，可再作一些简化。

一个方程模型

$$\varepsilon=k^{3/2}/l$$

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left[(c_k\sqrt{k}\,l)\frac{\partial k}{\partial x_l}\right]-\overline{v'_iv'_l}\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_l}-\frac{k^{3/2}}{l}-\frac{\sqrt{k}}{l}\overline{v'_iv'_j}$$

$$=c_\mu\frac{\sqrt{k}}{l}\left(\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{v}_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}k^{3/2}/l \qquad (A.2.2.49)$$

l 是与所研究的问题有关的尺度

$$-\overline{v'_i T'} = c_\mu \sqrt{k}\, l \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} / P_{r_t}$$

其中 $c_\mu = 0.09 \quad P_{r_t} = 0.8 \sim 1.3$(湍流 Prandtl 数)

二个方程模型

由

$$\left.\begin{aligned} &(1-c_2)P_{ij} - c_1 \frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{v'_i v'_j} - \frac{2}{3}\delta_{ij}k\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}(\varepsilon - c_2 P_k) = 0 \\ &\overline{v'_l v'_i}\frac{\partial T}{\partial x_l} + c_{T_1}\frac{\varepsilon}{k}\overline{v'_i T'} + (1-c_{T_2})\overline{v'_m T'}\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_m} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (A.2.2.50)$$

求解得 $\overline{v'_i v'_j}$，$\overline{v'_i T'}$，代入（A.2.2.45，A.2.2.47）可得 k，ε 方程，然后求解。

(2) k-ε-E（E-涡量）模型

$$\left.\begin{aligned} &-\overline{v'_i v'_j} = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}k \\ &-\overline{v'_i T'} = \frac{c_\mu}{P_{r_t}}\frac{\partial T}{\partial x_i} \quad c_\mu = 0.09 \end{aligned}\right\} \quad (A.2.2.51)$$

由以上二式得到的 $\overline{v'_i u'_j}$，$\overline{v'_i T'}$ 代入（A.2.2.45，A.2.2.47）可得关于 k，ε 的方程。

(3) 雷诺应力模型

就是直接解（A.2.2.44～A.2.2.47）诸方程求得 $\overline{v'_i v'_j}$ 等量的方法。

其它还有如大涡模型，代数模型则不再作一一介绍。以上模型中比较简单的在工程上能实际应用的模型有时简称工程模型。

应当指出，湍流模型有时有针对性和局限性，普遍适用的模型有待进一步探索。

2.2.8 两相流

多相流是自然界和工业装置中常见的流动现象，自然界中降雨下雪、风沙、泥沙流等，工业装置如锅炉、冷凝器、蒸汽发生器、汽轮机涡轮等设备中均为多相流，在多相流中存在多种物相，如液相、气相和固相。同一相也可以有不同种类的流体，可见多相流是比较复杂的，甚至描述这种流动都是比较困难的。在这里只能简要地介绍二相流动的数学模型，并假定只有一种物质，可以进行相变。二相流需要六个方程：二个连续方程、二个动力学方程和二个能量方程，如果其中一相处于饱和，问题可以得以简化，可减少一个能量方程。

二相流的连续方程在一维情况下可以写作

$$\frac{\partial}{\partial t}[\alpha\rho_g A + (1-\alpha)\rho_f A] + \frac{\partial}{\partial z}\{[\alpha\rho_g w_g + (1-\alpha)\rho_f w_f]A\} = 0 \quad (A.2.2.52)$$

其中 ρ_g 为气相密度，ρ_f 为液相密度，α 是气相所占体积比例，w_g 为气相速度，w_f 为液相速度、A 为一维管道截面积，这一方程是由二个相各自列出的连续方程在质量守恒条件下合成的。

类似地动量守恒定律也可以得到一个新的动力学方程：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\{[\alpha\rho_g w_g + (1-\alpha)\rho_f w_f]A\} + \frac{\partial}{\partial z}\{[\alpha\rho_g w_g^2 + (1-\alpha)\rho_f w_f^2]A\} + A\frac{\partial p}{\partial z} \\ &\quad + [\alpha\rho_g + (1-\alpha)\rho_f]gA\cos\phi + F_R = 0 \end{aligned} \quad (A.2.2.53)$$

其中 p 为压力，g 为重力加速度，φ 为管轴与重垂线的夹角，F_R 为单位长度上的摩擦力。

能量方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\{[\alpha\rho_g e_g + (1-\alpha)\rho_f e_f]A\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\{[\alpha\rho_g w_g h_g + (1-\alpha)\rho_f w_f h_f]A\} = \frac{\dot{Q}}{\Delta z} \qquad (A.2.2.54)$$

其中 e_g 为气相单位质量内能，e_f 为液相单位质量内能，h_g，h_f 为相应的焓，$\dot{Q}$ 为外界加热功率。

需要指出，以上方程是不封闭的，还需补充方程，如相变规律，不同相流体间的摩擦等。这些都要相应的模型，如均匀模型、漂移模型和二流体模型等，关于它们的介绍可参考有关专著。

2.3 边界条件的分析和发展方程的特征分析

在数学方程建立以后，为确定解，必须给出定解条件。对于非定常问题，定解条件包括起始条件和边界条件。起始条件就是在某一起始时刻给出速度、压力、密度、温度等的分布。这条件有时并不好给，比如湍流运动就难以给出，这时需要人为地根据实验给出。但一般计算表明，只要给出的初值符合一定要求时，它对以后计算结果的统计平均量影响不大，所以问题并不严重。对于定常问题，并不需要初始条件，但实际计算中对于非线性方程需要进行迭代，这一过程也可以看作某一非定常问题的渐近过程，因此初始条件就是迭代过程的初值。以后为了讨论方便起见，本书主要讨论非定常过程，定常过程作为非定常过程的渐近结果，二个过程就以统一的方式加以讨论。

除上述起始条件外还需要边界条件。在流体力学中，由于问题不同，边界条件的种类也是很多的，难以一一罗列。更困难的问题在于边界上究竟应当给多少个条件才是合适的，这个问题目前尚未解决。本节只能介绍最常见的一些边界条件。另外介绍一个有启发性的边界条件个数确定的方法。至于什么样的边界条件才是合适的，这个问题比较复杂，只作简单介绍，有待读者深入研究。

首先讨论流场常见的边界及边界条件。

1. 来流边界（进口边界）

比如在讨论飞行器绕流时需要给出来流条件。一般说，设 x 方向与飞行器飞行方向平行，则来流边界为 $x=-\infty$ 处。在其上应该给出流场各种参数的进口值，比如压力 p_∞，密度 ρ_∞，速度 V_∞ 或马赫数 M_∞，温度 T_∞ 等，这种绕流问题一般称作外流。在工程上还有不少内流，如管道流动，汽轮机内部流动等。这时进口也应当给上述各种参数的值。由于内流的纵向坐标一般与几何条件有关，如管道轴线的形状，叶栅槽道中心线等，所以一般还要给出进口流速的方向。

2. 下游边界条件（出口边界）

一般说出口或下游边界上的值应当通过计算得到，但有些情况下需要给出，或作一些人为的假定。比如外流问题中，如果流动是亚声速的，流场假定无粘性，则下游足够远处可认为飞行器引起的扰动量趋于零。另外在飞行器尾缘有光点或曲率变化很快的尾缘处，应给出 Kutta-Жуковский 条件。对于超声速，则下游不必给出边界条件。对于粘性流体流动，下游条

件的给出比较困难。一种方法是足够远处假定各种物理量变化很小。最近一种比较新的方法是给出开边界条件，即略去耗散项和用特征分析的方法给出出口条件。

3. 壁面边界

壁面是流场中最常见的边界。对于粘性流体，一般采用粘附条件，即认为壁面处流体速度与壁面该处的速度相同。当壁面是固定时，流体速度就是零。对于无粘性流体流动，则边界条件为滑移条件，即壁面上的流体对于壁面可以有相对切向滑移，但法向速度则需相同。这就是说流体总是紧挨着壁面，它们之间不出现真空区。

除了上述速度条件外，还应当给出温度条件。最常见的方法是给出壁面温度，并假定壁面处的流体温度与壁面温度相同。也可以给出壁面处的热流量大小，或者说给出 $\partial T/\partial n$ 的大小。最简单的条件为绝热条件，即 $\partial T/\partial n=0$。比较更为复杂的条件是给出由于流体和固体在壁面处的温差引起的热交换，即给出$\dfrac{\partial T}{\partial n}+\alpha T$ 的值。以上三种不同的给法一般称作三类边界条件。

4. 自由边界

在与水波、渗流等有关的问题中存在自由边界。自由边界的特点是边界本身形状事先不知道，通过求解方程组同时确定边界的形状。自由边界的条件一般分为运动学和动力学二种边界条件。运动学边界条件基于这样的假定给出的：即位于自由面上的流体质点总是位于自由面。根据这一假定，若自由面的方程为

$$f(x,y,z,t)=0$$

则 $\mathrm{d}t$ 后仍有

$$f(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z,t+\mathrm{d}t)=0$$

根据微分理论有

$$\frac{\partial f}{\partial x}u+\frac{\partial f}{\partial y}v+\frac{\partial f}{\partial z}w+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \qquad (f(x,y,z,t)=0)$$

一般自由面方程可写为

$$z=\zeta(x,y,t)$$

于是自由面条件可以写作

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}-w=0 \qquad (z=\zeta(x,y,t)) \tag{A.2.3.1}$$

这就是自由面上的运动学条件。

自由面上的动力学条件一般为给定其上的压力值，即

$$p=p_a \qquad (z=\zeta(x,y,t)) \tag{A.2.3.2}$$

应当指出，自由面上的边界条件是非线性的，对于一些问题可以作简化，得到近似的线性边界条件。

5. 间断面边界

流场中最常见的是二种间断：切向间断和法向间断。当二种流体不相掺混而又有相对滑移时就出现切向间断。一般将流体认为是无粘性的，这时间断面上沿切向速度可以有一间断，但法向速度及压力在二侧是相等的。一般说间断面形状是不确定的。上述自由面可以看作是切向间断面的一个特例（在一侧无流体或密度接近于零）。

另一种常见的间断为法向间断。激波是法向间断的最重要例子。激波上的条件由积分型式给出，即

$$\left.\begin{array}{ll}\text{切向速度无间断} & [v_T]=0 \\ \text{法向流量无间断} & [\rho v_n]=0 \\ \text{法向动量无间断} & [p+\rho v_n^2]=0 \\ \text{能量无间断} & [i+\frac{1}{2}\rho v_n^2]=0\end{array}\right\} \tag{A.2.3.3}$$

在这里认为激波是不动的。如果激波是运动的，则用 v_n 要用 N-v_n 来代替，N 为激波面运动速度在激波面法向的分量。上式中 [·] 表示激波面二侧值的差。由于法向间断条件在用来确定二侧值时仍可能出现几种可能，为使其间断二侧值的确定是唯一的，还需在物理上加上其他条件，比如流体微团通过激波时熵值必须是增加的。

由于激波位置也是未知的，所以给求解带来了很多的困难，气体动力学计算中处理激波计算是一个首要的问题。

除了以上几个主要类型的边界条件外，还有其它类型的边界条件，这里不一一介绍。

在求解方程时需要在所有边界上给出必要的边界条件。这就需要解决这样的问题：在各边界上需要给出几个边界条件，给什么样的边界条件才能使解是存在并且是唯一确定的，这二个问题并不是很容易解决的。由于实际问题的复杂性，一般性的理论目前尚未建立，对于上述的第二个问题更加困难和需要作进一步的研究。对于上述第一个问题，这里只进行有启发性的讨论，更加深入的研究可参考有关文献。

下面讨论发展型拟线性偏微分方程边界条件个数的确定。描写不定常物理场的方程叫做发展型方程。前面已经指出，定常情况可以看作不定常情况的渐近过程，所以只需要讨论发展方程。

为了便于讨论，首先研究模型问题。最简单的模型问题有三个：双曲型弦振动方程，抛物型热传导方程和椭圆型的 Laplace 方程。

(1) 双曲型方程

弦振动方程为典型的双曲型方程，具有如下形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{A.2.3.4}$$

设 $\varphi=\partial u/\partial t$，$\psi=\partial u/\partial x$，上式可降为一阶偏微分方程组：

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial x}-\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=0\end{array}\right\}\text{或}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varphi \\ \psi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\varphi \\ \psi\end{pmatrix}=0 \tag{A.2.3.5}$$

用向量矩阵形式可以表示为

$$A_t\frac{\partial U}{\partial t}+A_x\frac{\partial U}{\partial x}=0 \tag{A.2.3.6}$$

其中 $U=(\varphi,\psi)^{\mathrm{T}}$，$A_t$，$A_x$，为与上式相对应的矩阵。上式的特征方程为

$$\det|\lambda_t A_t-\lambda_x A_x|=0$$

将 A_t，A_x 具体形式代入展开后得

$$\lambda_t^2-\lambda_x^2=0$$

特征向量的大小并无重要意义。为方便起见，不妨设 $\lambda_t=1$，于是有二个特征向量：

$$\lambda_1=(1,1)\qquad \lambda_2=(1,-1)$$

特征线则与 λ 特征向量正交。在特征线上存在特征相容关系，它联系了特征线上各点间各物理量之间的关系。由于解是沿时间 t 正向发展的，所以特征走向总是沿 t 发展方向前进的，故解的求得也总是与特征走向相吻合的。现假定 (A.2.3.4) 方程在区域 Ω：$(0\leqslant x\leqslant l,\ t>0)$ 内求解，在边界 $x=0$ 及 $x=l$ $(t>0)$ 这二条直线上（见图 A.2.2），特征方向如图实线向量所示，图中虚线向量正向表示了特征走向，它们都应与 t 的正向保持一致。当特征由域内指向边界时建立了一个由域内点函数值推算边界点函数值的关系，因此对应于这种特征走向，不需要边界条件；当特征走向由边界指向域内时，建立了一个由边界点函数值推算域内点函数值的关系，因此在边界上应该给出边界条件。由（图 A.2.2）可以看到，在 $x=0$ 及 $x=l$ 边界上应分别给出一个边界条件。如果将 $t=0$ 的 x 轴看作边界，类似的方法可以看出，特征走向都指向域内，所以在这边界上应当给出二个边界条件，这实际上就是起始条件。同样 $t=T$ 作为一个边界时特征走向都指向边界，所以不需要给出边界条件。

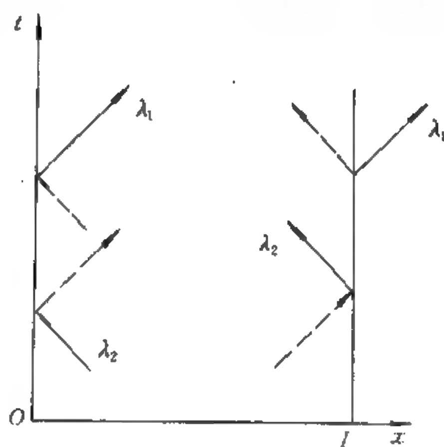


图　A.2.2

上述方法可以推广到多维问题中去。在二维情况下，弦振动方程为膜振动方程所对应，可写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \tag{A.2.3.7}$$

引入 $\partial u/\partial t=\varphi$，$\partial u/\partial x=\psi$，$\partial u/\partial y=\phi$，可得方程组为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial t}=0\\&\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial t}=0\\&\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial t}=0\end{aligned}\right\}$$

它的紧凑形式为

$$A_t\frac{\partial U}{\partial t}+A_x\frac{\partial U}{\partial x}+A_y\frac{\partial U}{\partial y}=0$$

其中 $U=(\varphi,\ \psi,\ \phi)^{\mathrm{T}}$，特征方程为

$$\det|\lambda_t A_t+\lambda_x A_x+\lambda_y A_y|=0$$

展开得

$$\lambda_t(\lambda_t^2-\lambda_x^2-\lambda_y^2)=0$$

相应的特征向量为

$$(0,\cos\theta,\sin\theta),\quad (1,\cos\theta,\sin\theta),\quad (-1,\cos\theta,\sin\theta)$$

现设求解域为如图 A.2.3 所示的一柱形域，它与 $(x,\ y)$ 平面交于 S 域，其边界为 ∂S，特征曲面由与特征向量垂直的平面的包络面构成，显然这是一锥型面，而特征向量本身则构成

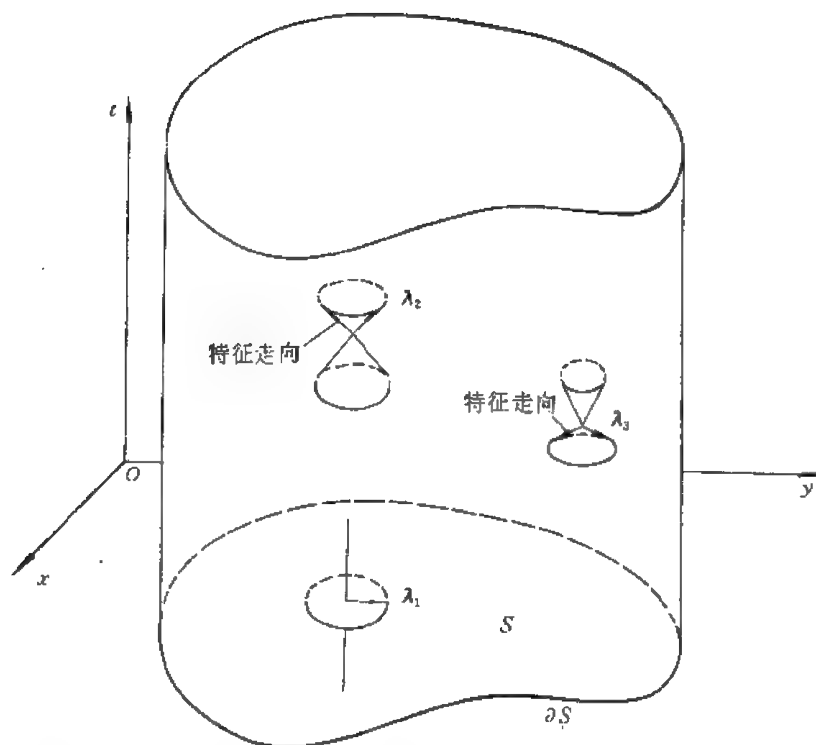


图 A.2.3

一与之对顶的锥面。三个特征对应三个特征面。其中第一个特征向量与 (x, y) 平面平行，所以特征锥面为一个与 t 轴平行的直线，因此落在边界面内，它只涉及到边界上函数值间的关系，所以不需要给出边界条件。其它二个特征向量对应的特征曲面，应当考察其在求解域内部分的走向。由图不难看出，它们之中有一个由域内指向边界，另一个由边界指向域内，因此只需给出一个边界条件。

类似的分析可以推广到三维中去。

(2) 抛物型方程

热传导方程是典型的抛物型方程，有

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{A.2.3.8}$$

这是与上述问题有不同特性的方程。引入 $\varphi = \partial u/\partial t$，$\psi = \partial u/\partial x$，方程可以改写为

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

它的紧凑形式为

$$A_t \frac{\partial U}{\partial t} + A_x \frac{\partial U}{\partial x} = R$$

特征方程为 $\det|\lambda_t A_t + \lambda_x A_x| = 0$

展开可得 $\lambda_x^2 = 0$

相应的特征向量为重特征向量 $\lambda_{1,2} =$ (0, 1)

(A.2.3.8) 式可以看作

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

在 $\varepsilon\to 0$ 时的极限情况，所以重特征是由二个特征向量蜕化而得到的，即 $\lambda_1=(0,\varepsilon)$ 及 $\lambda_2=(0,-\varepsilon)$ 蜕化而得的。因此相应的特征线走向也是一个指向边界，一个指向域向，因此边界上仍需给一个边界条件。这个问题在二维问题时方程具有如下形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{A.2.3.9}$$

引用降阶方法，设 $\partial u/\partial x=\psi$，$\partial u/\partial y=\phi$，$\partial u/\partial t=\varphi$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}&=\varphi\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial t}&=0\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial t}&=0\end{aligned}\right\}$$

特征方程展开后得

$$\lambda_t(\lambda_x^2+\lambda_y^2)=0$$

相应特征向量为 $(0,\cos\theta,\sin\theta)$，$(1,0,0)$，$(-1,0,0)$ 第二、三向量由 $(1,\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)$ 及 $(-1,\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)$ 蜕化而得，它们是重特征（因为互相不独立）。由前知，重特征只要一个边界条件。

(3) 椭圆型方程

Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{A.2.3.10}$$

这不是一个发展方程，但可以看作下述发展方程的渐近：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

这个方程和 (A.2.3.9) 是一致的，所以边界上要给出一个条件。

由上讨论可知，发展方程需要的边界条件个数可以用特征分析的方法得到，其结论为：

当发展方程某特征由边界指向域内时，对应这一特征需要给出一个边界条件，重特征是由一对特征蜕化得到的，需要分析这对特征蜕化前有几个特征是由边界指向域内的，其个数即是应给的边界条件个数。如重特征落在 $t=$常数平面内，则一对重特征对应一个边界条件。当特征落在柱面边界内（即空间边界沿时间方向形成的柱面内）时不必给边界条件。因此边界条件个数等于由边界指向域内特征的个数（包括蜕化前）。

以上结论是通过对模型方程的讨论得到的。所得结论与一般偏微分方程理论是吻合的。所以下面将这一方法推广应用于一般发展方程中去。这种方法是由模型方程的分析得到的，所

以称作有启发性的方法，但未能从理论上得到严格的证明。

发展型拟线性偏微分方程的一般形式为

$$A_t \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} A_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = F \tag{A.2.3.11}$$

其中 U 为 n 维向量，A_t，A_i 为 $n\times n$ 矩阵，它们可以是 t，x_i，U 的函数，该方程的特征方程为

$$\det\left|\lambda_t A_t + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i\right| = 0$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}$ 为 $m+1$ 维的空间向量

(4) 关于可压缩无粘性流动问题

一个有代表性的例子是可压缩无粘性流体绝热流动，它的基本方程为欧拉方程，在二维时可以写作

$$A_t \frac{\partial U}{\partial t} + A_x \frac{\partial U}{\partial x} + A_y \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \tag{A.2.3.12}$$

其中
$$U = (\rho, u, v, p)^{\mathrm{T}}$$

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_x = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ -a^2 u & 0 & 0 & u \end{bmatrix} \quad A_y = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ -a^2 v & 0 & 0 & v \end{bmatrix}$$

它的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda_t + u\lambda_x + v\lambda_y & \rho\lambda_x & \rho\lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_t + u\lambda_x + v\lambda_y & 0 & \frac{1}{\rho}\lambda_x \\ 0 & 0 & \lambda_t + u\lambda_x + v\lambda_y & \frac{1}{\rho}\lambda_y \\ -a^2(\lambda_t + u\lambda_x + v\lambda_y) & 0 & 0 & \lambda_t + u\lambda_x + v\lambda_y \end{vmatrix} = 0$$

展开得
$$d^2\left[d^2 - a^2(\lambda_x^2 + \lambda_y^2)\right] = 0$$

其中 d 为引入的记号，$d=\lambda_t+\lambda_x u+\lambda_y v$。上面这个方程的解为

$$\lambda_t + \lambda_x u + \lambda_y v = 0, \quad 0, \quad a\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}, \quad -a\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}$$

① $\lambda_t+\lambda_x u+\lambda_y v=0$

由于流线轨迹方程为$\frac{dt}{1}=\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$，故流线方向与（1，$u$，$v$）平行，特征向量方向正好与其垂直。所以特征方向与流线方向平行。故这一特征又叫流特征。尽管它是重特征，但它们的原特征也是流特征（即它不是蜕化后得到的）。在进口处，流线显然指向域内，所以需要给出相应的边界条件。由于这里是二个特征，所以要给二个边界条件。在出口处情况正好相反，特征由域内指向边界，所以不必给边界条件。在壁面处，由于流线沿物面或壁面，故特征由边界指向边界，所以也不要求给边界条件。

② $\lambda_t+\lambda_x u+\lambda_y v=a\sqrt{\lambda_x^2+\lambda_y^2}$

由于 $\boldsymbol{\lambda}$ 的长度是不确定的，所以不妨设 $\lambda_x^2+\lambda_y^2=1$，或 $\lambda_x=\cos\theta$，$\lambda_y=\sin\theta$，于是上式改写为 $\lambda_t+u\cos\theta+v\sin\theta=a$，记（1，$u$，$v$）$=\boldsymbol{l}$ 为轨迹向量，（λ_t，$\cos\theta$，$\sin\theta$）$=\boldsymbol{\lambda}$ 为特征向量，于是有

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{l}=a$$

因此特征向量 $\boldsymbol{\lambda}$ 的端点轨迹如图 A.2.4 所示，其中圆柱半径为 1，斜面与 $\boldsymbol{l}$ 方向垂直，它与 P 点的距离为 $a/\sqrt{1+u^2+v^2}$，端点轨迹为一椭圆，特征面为与 $\boldsymbol{\lambda}$ 垂直的平面的包络面。显然，当 $V=\sqrt{u^2+v^2}<a$ 时 $\boldsymbol{\lambda}$ 端点轨迹与过 P 点的水平面不可能有交点，如图所示，$V<a$ 时特征锥在垂直面的一侧。

③ $\lambda_t+\lambda_x u+\lambda_y v=-a\sqrt{\lambda_x^2+\lambda_y^2}$

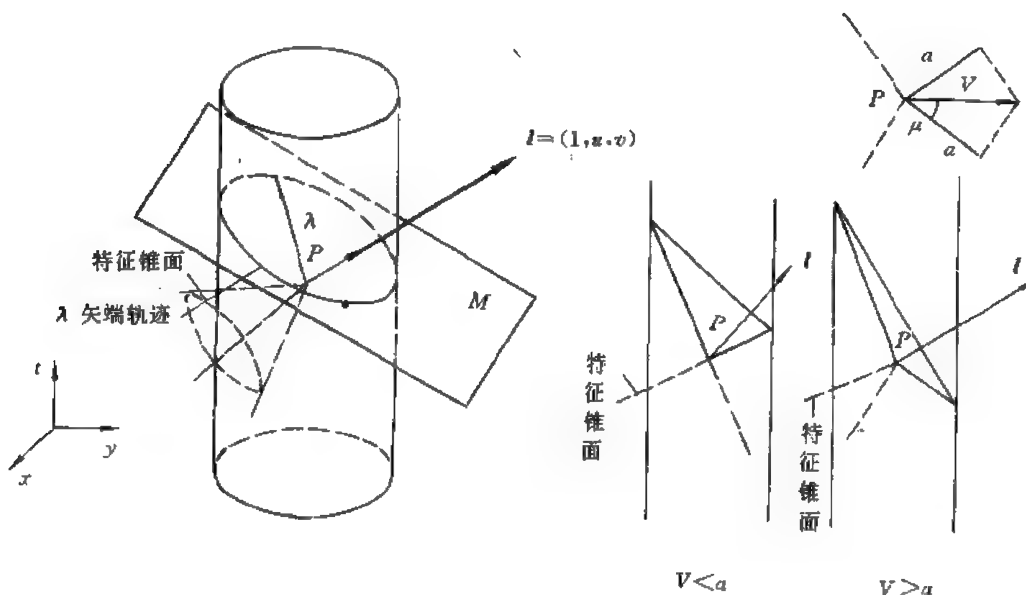


图 A.2.4

这时情况与上述相同，只是方向全部相反。但 $\boldsymbol{l}$ 方向不变。在物面上，因速度与物面相切，故特征锥面必在物面的二侧对称地被划分了。在域内部分，必然一个特征指向边界，另一特征指向域内，所以对应这二个特征只需给一个边界条件就可以了。在进出口上，则可以参考图 A.2.5。当进出口处为亚声速时，因为特征锥都是跨边界的，所以都必有一个特征指向边界，而另一个指向域内，所以亚声速的进出口都要给一个边界条件。

对于超声速流，设进出口速度与边界垂直，这时特征锥一个在域内一个在域外。域外部

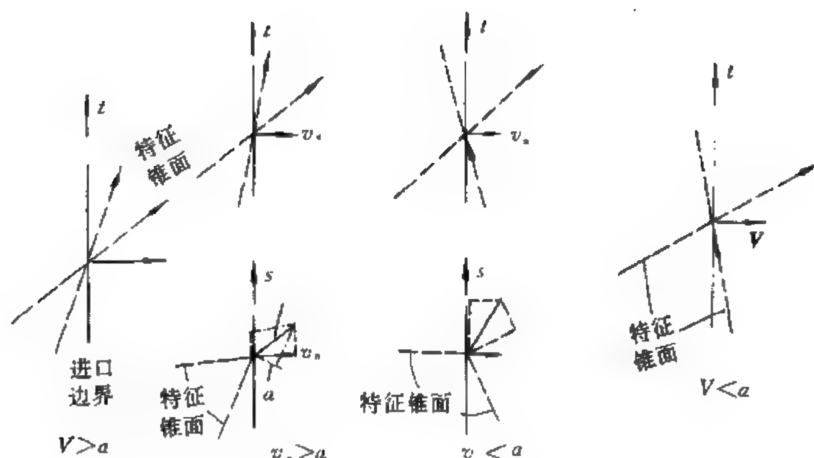


图 A.2.5

分不起作用，只有域内特征起作用。显然特征指向域内时应当给出一个边界条件。另一族特征在域外。如果只考虑域内一个与边界相邻近的点，它出发的特征与边界上特征走向应当是接近的。可以看出，与边界上在域外的那族特征相对应的特征是由边界指向域内的，所以也应该给一个边界条件。因此可见进口速度的法向分量大于声速时应当提二个边界条件。法向分量小于声速时只需提一个边界条件。出口处则法向速度大于声速时不提边界条件，小于声速时需提一个边界条件。

综上所述，由于有四个特征，需要给出边界条件的个数在不同边界上有不同的要求：

物面上只需要一个边界条件；

进口处速度法向分量大于声速时给四个边界条件，小于声速时需给三个边界条件；

出口处速度法向分量大于声速时不需要边界条件，亚声速时需一个边界条件。

（5）不可压缩粘性流动问题

下面讨论不可压缩粘性流体流动NS方程边界条件个数的确定。二维情况，不计体积力时无量纲化方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(A.2.3.13)$$

能量方程暂不列入，因为上述方程可以独立于能量方程而求解。引入

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f\quad\frac{\partial u}{\partial y}=g\quad\frac{\partial v}{\partial x}=h\quad\frac{\partial v}{\partial y}=-f$$

方程可以降价，得下列方程

$$
\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{Re}\frac{\partial g}{\partial y}&=uf+vg\\
-\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{1}{Re}\frac{\partial f}{\partial y}&=uh-vf\\
\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}&=0\\
\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial y}&=0\\
\frac{\partial u}{\partial x}&=f\\
\frac{\partial v}{\partial x}&=h
\end{aligned}\right\}\tag{A. 2. 3. 14}
$$

特征方程为

$$
\begin{vmatrix}
-\lambda_x & -\lambda_t & 0 & \frac{\lambda_x}{Re} & \frac{\lambda_y}{Re} & 0\\
-\lambda_y & 0 & -\lambda_t & -\frac{\lambda_y}{Re} & 0 & \frac{\lambda_x}{Re}\\
0 & 0 & 0 & \lambda_y & -\lambda_x & 0\\
0 & 0 & 0 & \lambda_x & 0 & \lambda_y\\
0 & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \lambda_x & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}=0
$$

展开得

$$
\lambda_x^2(\lambda_x^2+\lambda_y^2)^2=0
$$

由于 $\lambda_x^2+\lambda_y^2=0$ 对应一组重根，应当给一个边界条件，这里有二组，所以需要二个边界条件。而 $\lambda_x=0$ 是由于（A. 2. 3. 14）式中最后二个方程引起的，不难看出，若引用$\frac{\partial u}{\partial y}=g$，$\frac{\partial v}{\partial y}=-f$ 时根变为 $\lambda_y=0$，所以这个根是由于降阶引起的，所以与原问题无关，因此它们不引起对边界条件新的需求。

最后讨论能量方程：

$$
\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\tag{A. 2. 3. 15}
$$

这里未计入澈体加热，因它与所讨论的问题无关。这一方程明显地与热传导方程相似，不难作与之类似的分析，可以得知每个边界上都必须给出一个边界条件。

综上所述，不可压缩粘性流体流动的 NS 方程求解时在各边界上需给出三个边界条件（在不计能量方程时需要二个边界条件）。

由于篇幅的限制，其它方程的讨论读者作为练习自行完成。

上面的讨论只涉及到需要给出几个边界。但什么样的边界条件才是合适的，也就是说什么样的边界条件才能使解是存在唯一，这是一个更加困难的问题。目前有能量判别法、正则

模态分析法等，但这些方法一般是针对线性方程作出的，而且并非一定是充分必要条件，而只是充分条件，也就是说要求过严。

小　结

数学模型包括基本方程及其定解条件。本章着重讨论基本方程的建立。首先介绍了建立基本方程的一般方法，然后介绍了流体力学中最重要的基本方程NS方程及其在一些情况下的简化方程。应该指出简化条件及方法是各式各样的，必须从具体问题入手，作具体分析，并且也介绍了一些复杂流动中采用的模式理论。这种理论具有较多的经验性，为工程界广泛采用。

本章最后讨论了边界条件个数的确定，特别介绍了几个重要的例子。边界条件的给法则是更加复杂的问题，本章提出这个问题是期望得到更多的重视，这在计算中是经常遇到的问题。

参考文献

1. 吴望一．流体力学．北京大学出版社，1982
2. 潘文全主编．流体力学基础．机械工业出版社，1980
3. Chen C J. The Finite Analytic Method in Flows and Heat Transfer. University of Iowa，1987
4. Anderson D A，Tannehill J C，and Pletcher R H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Hemisphere Publishing Corporation，1984
5. Kolev NI. Transiente Zweiphasen-Strömung. Springer-Verlag，1986
6. Robert L Higdon. Intial Boundary Value Problems for Linear Hyperbolic Systems. SIAM Review Vol. 28 NO. 2 June 1986
7. Kreiss H. Initial Bonndary Value Problems for Hyperbolic Systems. Communications on Pure and Applied Mathematics，V. XXⅢ 277
8. Gustafsson B，Sundström A. Incompletely Parabolic Problems in Fluid Dynamics. SIAM J. Appl. Math. 1978，V35 (2)

习　题

利用特征走向分析法确定下列方程在各种边界上需要的边界条件的个数：

(1) 边界层方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_s}{\partial t}+\frac{v_s}{h}\frac{\partial v_s}{\partial s}+v_n\frac{\partial v_s}{\partial n}+\frac{1}{\rho h}\frac{\partial p}{\partial s}-\upsilon\frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2}=0\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}=\frac{v_s^2}{R}\\ \frac{1}{h}\frac{\partial v_s}{\partial s}+\frac{\partial v_n}{\partial n}=-\frac{v_n}{hR}\end{aligned}\right\}$$

(2) 涡量-向量势方程组

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega}-(\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{V}=\nu\nabla^2\boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{V}=\nabla\times\boldsymbol{\Psi} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{\Psi}=0 \\ \boldsymbol{\Omega}=\nabla\times\boldsymbol{V} \end{aligned}\right\}$$

(3) 气体位势流方程

$$(a^2-u^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2uv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+(a^2-v^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

(4) 不定常跨声速小扰动方程为

$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}=\left[K-(\gamma+1)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

B篇 数值计算方法

第1章 发展方程的有限差分法

1.1 发展方程的有限差分法

描写随时间变化的物理过程的数学方程叫做发展方程。比如描写热传导、热扩散、对流运动、湍流运动，物体不定常绕流等的数学方程都是发展方程。对于与时间无关的问题，即定常问题，在物理上往往反映一个平衡态，它可以看作一个非定常过程在无限长（或足够长）时间后的渐近状态，发展方程的研究具有普遍意义。

发展方程可以分成二大类：一类问题与扩散相关的，如热传导、浓度扩散、涡耗散等有关，它们具有抛物型方程的特点；另一类是与波动和波传布相关的，如弦振动、水波等，它们具有双曲型方程的特点。对于复杂运动，这二种特性兼而有之。对上述二类方程的讨论有助于对一般方程的讨论。

下面首先通过几个例子说明发展方程差分方程的建立。

例1 热传导方程及其初边值条件为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad t>0\qquad 0\leqslant x\leqslant L\\&u(x,0)=f(x)\\&u(0,t)=\varphi_1(t)\qquad u(L,t)=\varphi_2(t)\end{aligned}\right\}\tag{B.1.1.1}$$

为确定起见，时间方向的求解范围限于 $0\leqslant t\leqslant T$ 内。T 为某一确定时刻。为了用有限差分法进行离散，首先将求解域 $\{t:(0,T);x:(0,L)\}$ 分别划分为 N 和 J 等分段，构成如图B.1.1所示的网格。网格的节点为离散点，它们的编号为 (j,n)，其中 j 表示 x 方向的序号，n 表示时间方向的序号，它的位置为

$$\left.\begin{aligned}&x_j=\frac{j}{J}L\qquad (j=0,1,2,\cdots,J)\\&t_n=\frac{n}{N}T\qquad (n=0,1,2\cdots,N)\end{aligned}\right\}\tag{B.1.1.2}$$

在 (j,n) 点上的 u 值记作 u_j^n，为建立差分方程，首先要给出导数用差商表示的近似表达式。这里设

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n &\approx \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}\\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n &\approx \frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}\end{aligned}\right\} \tag{B.1.1.3}$$

将它们代入（B.1.1.1）式，并将相应的边界条件也在离散点上取值，则得到差分方程及其边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} \approx \nu\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (n \geqslant 0; j=1,2,\cdots,J-1)\\ &u_j^0 = u(x_j,0) = f(x_j) \quad (j=0,1,\cdots,J)\\ &\left.\begin{aligned}u_0^n &= u(0,t_n) = \varphi_1(t_n)\\ u_J^n &= u(L,t_n) = \varphi_2(t_n)\end{aligned}\right\} \quad (n=1,2,\cdots,N)\end{aligned}\right\} \tag{B.1.1.4}$$

不难看出差分方程可以改写为

$$u_j^{n+1} = \sigma u_{j+1}^n + (1-2\sigma)u_j^n + \sigma u_{j-1}^n \quad (n \geqslant 0; j=1,2,\cdots,J-1) \tag{B.1.1.5}$$

其中

$$\sigma = \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} \tag{B.1.1.6}$$

准确地说，（B.1.1.4）中第一式叫做有限差分方法的差分方程，一般简称差分方程。差分方程和边界条件离散后一起叫做差分格式。由于有些边界条件人们可以用不同方法进行处理，因此同一差分方程与不同的边界条件处理构成不同的差分格式。但习惯上人们称差分方程本身为差分格式，并且由差分方程建立的方法或首先提出及使用的人名来命名。因此这里约定：用有限差分法得到的差分方程叫做差分格式。由于有限差分法只是离散化方法的一种。用其它离散化方法（如有限元法、有限解析法等）得到的代数方程叫做基于某离散化方法的差分方程或离散方程。

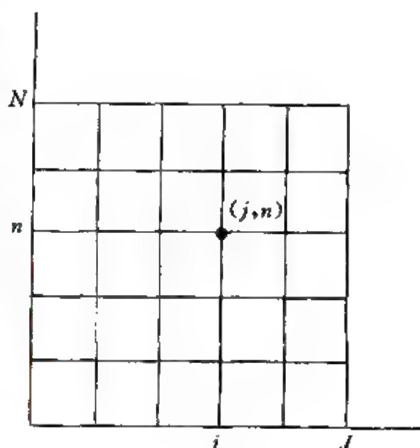


图 B.1.1

根据上述约定，（B.1.1.4）第一式为差分格式。在建立这种差分格式时，时间方向用前向差分；在空间方向用中心差分，所以叫做 FTCS（forward for time; center for space）格式。该格式改写为（B.1.1.5）式后可以明显看到，这一方程可以推进计算，也就是说，由时间 n 层通过简单运算就可以得到时间 $n+1$ 层上的 u 值。

根据台劳公式可以有

$$\left.\begin{aligned}u_j^{n+1} &= u_j^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n \Delta t + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n \Delta t^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_j^n \Delta t^3 + \cdots\\ u_{j\pm1}^n &= u_j^n \pm \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n \Delta x + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n \Delta x^2 \pm \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^n \Delta x^3 + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{B.1.1.7}$$

将它们代入（B.1.1.4）式可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + O(\Delta t) = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + O(\Delta x^2) \tag{B.1.1.8}$$

其中 $O(\Delta t)$，$O(\Delta x^2)$ 分别表示 Δt 量级及 Δx^2 量级的小量。显然（B.1.1.8）与

(B.1.1.4) 是等价的。当 Δt，Δx^2 同时趋于零时，(B.1.1.4) 方程就趋于 (B.1.1.1) 式了。这说明 FTCS 格式在网格加密直止间距趋于零时就趋向于原微分方程。这叫做差分格式与原微分方程相容。如果把 (B.1.1.8) 式改写为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n + O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$$

与原微分方程相比多了二项 $O(\Delta t)$ 和 $O(\Delta x^2)$，这是差分格式建立过程中引进的误差，叫做截断误差。它对于时间是一阶的，对于空间是二阶的。人们称该差分格式在时间方向上具有一阶精度，在空间方向上具有二阶精度。

一个差分格式与微分方程的相容性及截断误差的定义如下：

记 $L_\Delta u_j^n=0$ 为与微分方程对应的差分格式，微分方程记作 $L_u=0$，u 为定义在求解域上的函数。u_j^n 是 u 在网格点 (j, n) 上的值；对于固定点 (x_j, t_n)，引入记号 $(ET)_j^n = L_\Delta u_j^n - (L_u)_j^n$ 表示差分格式的截断误差。若对于一足够光滑的函数 u，当 $\Delta x\to 0$，$\Delta t\to 0$ 时的截断误差对于每一点 (j, n) 都趋于零，则称差分格式 $L_\Delta u_j^n=0$ 逼近微分方程 $L_u=0$，即差分格式与原微分方程相容。

显然差分格式必须与微分方程相容，才能保证用差分格式求得的解为微分方程的近似解。因此相容性是建立差分格式首先应当考虑的必要条件。但是在求解一些定常问题时人们采用可定常问题的渐近过程来得到，而求解这一不定常问题时又采用与微分方程不相容的格式，这也是可以的。但是当渐近解最后得到时，那些不相容的部分自动趋向于零，因此最终差分格式仍与微分方程相容，所得的解与原定常问题的解是一致的。

现在再来讨论前面的差分格式。选 $\Delta x=0.1$，$J=10$，$L=1.0$，$\Delta t=0.005$，$\nu=1$，$T=2$。边界条件和初始条件为

$$u(0,t)=u(1,t)=1 \qquad 0<t<2$$
$$u(x,0)=0$$

这时方程的精确解为

$$u(x,t)=1-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{(2m-1)\pi}\sin\left\{(2m-1)\frac{\pi x}{L}\right\}\cdot\exp\{-\nu(2m-1)^2\pi^2 t\} \tag{B.1.1.9}$$

计算结果和精确解的结果列于图 B.1.2。

为了提高计算精度，选 $\Delta x=0.01$，$J=100$，其它情况不变，计算表明事与愿违。所得的解与真实情况完全不同，这个解根本没有物理意义。这说明盲目提高节点数并不一定能提高解的精度，有时反而破坏了解。因此建立差分格式时除了考虑差分格式的相容性以外，还要考虑它的稳定性、收敛性等特性。关于这些问题将在以后陆续予以讨论。

现在仍然回到差分格式的建立上来。对于同一个微分方程，差分格式不是唯一的。人们可以用不同方法来建立不同的差分格式。如可以在 $\left(j, n+\frac{1}{2}\right)$ 上要求满足

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{n+\frac{1}{2}} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{n+\frac{1}{2}}$$

采用的是时空间均为中心差分，则可得如下的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\frac{\nu}{2}\left[\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}\right] \tag{B.1.1.10}$$
$$(j=1,2,\cdots,J-1),(n=0,1,2,\cdots)$$

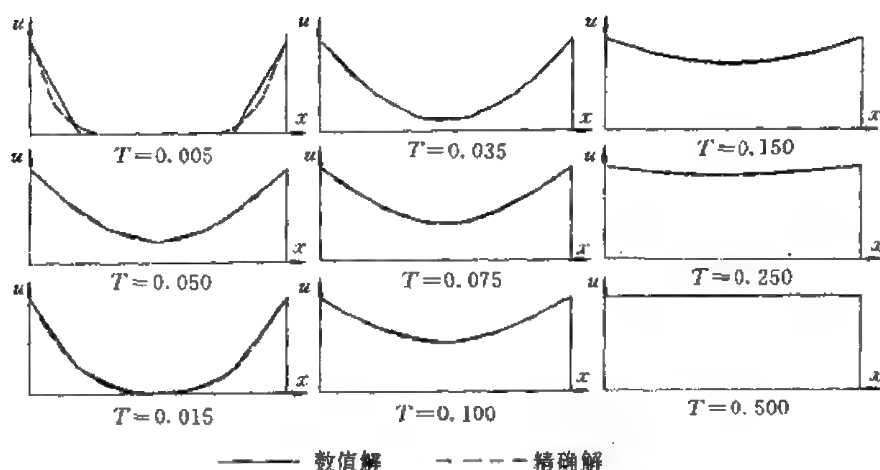


图 B.1.2

或改写为

$$\sigma u_{j+1}^{n+1} - 2(\sigma + 1)u_j^{n+1} + \sigma u_{j-1}^{n+1} = -\sigma u_{j+1}^n + 2(\sigma - 1)u_j^n - \sigma u_{j-1}^n \quad \text{(B.1.1.11)}$$

$$(j = 1,2,\cdots,J-1),(n = 0,1,2,\cdots)$$

注意到这一方程由第 n 时间层计算第 $n+1$ 时间层时不能像前面那样简单地计算，而需要对 $n+1$ 层上的 u^{n+1} 值的联列方程求解得到，可见计算不像上述方程那么简单明显，为区别起见，(B.1.1.4) 称作显式格式，(B.1.1.11) 称作隐式格式。显式格式计算时只需简单的代数运算，隐式格式计算时需求解联列方程。

用 (B.1.1.11) 格式，选用如下参数：

$$\Delta x = 0.1, J = 10, L = 1, \Delta t = 0.005, \nu = 1, T = 2$$

$$\Delta x = 0.01, J = 100, L = 1, \Delta t = 0.005, \nu = 1, T = 2$$

计算表明二套参数都可以得到正确的近似解。采用 (B.1.1.11) 格式计算时间比较长，但精度比较高。该格式称作 Crank-Nicolson 格式。这是一种十分常用的格式。

例 2 解方程

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1, a > 0) \\ &u(x,0) = f(x) \qquad x \geqslant 0 \\ &u(0,t) = \varphi(t) \qquad t \geqslant 0 \\ &(f(0) = \varphi(0)) \end{aligned}\right\} \quad \text{(B.1.1.12)}$$

不难看出，方程的解为

$$u(x,t) = \begin{cases} f(x - at) & x - at \geqslant 0 \\ \varphi\left(t - \dfrac{x}{a}\right) & x - at \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{(B.1.1.13)}$$

显然，当 $x-at=$常数时 $u=$常数。利用这一特点可以建立下面的差分格式：

设 A 点与 $(j, n+1)$ 在 $x-at=$常数的直线上 (图 B.1.3)，故

$$u_j^{n+1} = u_A$$

A 点的坐标为 $x_A = x_j - at$，利用线性插值可以得到

$$u_A = u_{j-1}^n + \frac{x_A - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}(u_j^n - u_{j-1}^n) \tag{B.1.1.14}$$

于是可得差分格式

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n + \frac{x_A - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

将 x_A 值代入并整理得

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \tag{B.1.1.15}$$

可以看出，这里关于空间导数 $\partial u/\partial x$ 采用后向差分公式（与前向差分正好相反）。利用台劳公式，上式可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n + a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n + O(\Delta t) + O(\Delta x) = 0 \tag{B.1.1.16}$$

当 Δx，$\Delta t \to 0$ 时差分格式 (B.1.1.15) 趋近于微分方程 (B.1.1.10)，所以差分格式与微分方程是相容的。以上是 $a>0$ 的情况。当 $a<0$ 时可用类似推导得到

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \qquad a < 0 \tag{B.1.1.17}$$

由此可见，$a<0$ 时空间导数应当用前向差分公式。把上述二个格式结合起来可以有

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a + |a|}{2} \cdot \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + \frac{a - |a|}{2} \cdot \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \tag{B.1.1.18}$$

如果将方程 (B.1.1.12) 与一维无粘性可压缩流体欧拉方程相比较，$a\partial u/\partial x$ 可与 $u\partial u/\partial x$ 相当，a 相当于当地速度 u。由于流动一般上游对下游产生较大的影响，所以 $a>0$ 时采用后向差分及 $a<0$ 时采用前向差分都能比较好地反映这种影响，故 (B.1.1.18) 又向迎风格式或上风格式 (upwind scheme)

作为例子，设起始条件为

$$u(x,0) = \tanh\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$\Delta x = 0.1, \quad \Delta t = 0.01, \quad a = \pm 1$$

计算结果和精确解的比较如图 B.1.4 所示。其中精确解为

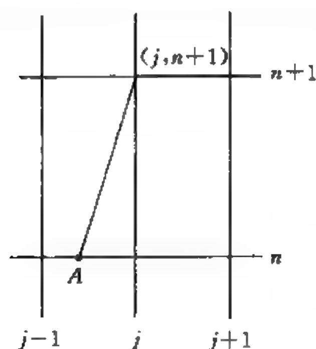
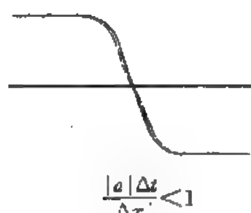


图 B.1.3



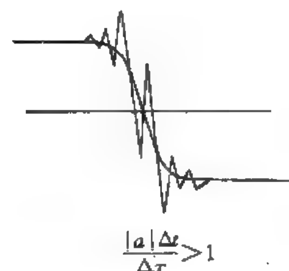


图 B.1.4

$$u(x,t)=\tanh\left(\frac{x\mp t}{5}\right)$$

计算表明，当$\frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$时差分格式（B.1.1.18）的计算结果是比较好的，而$\frac{|a|\Delta t}{\Delta x}>1$时计算结果无意义。

例 3 波动方程及其初边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad 0\leqslant x\leqslant L,t>0\\&u(x,0)=f(x)\\&u_t(x,0)=g(x)\\&u(0,t)=\varphi_1(t)\\&u(L,t)=\varphi_2(t)\end{aligned}\right\}\tag{B.1.1.19}$$

为方便起见，设

$$\frac{\partial u}{\partial t}=p\quad\frac{\partial u}{\partial x}=q\tag{B.1.1.20}$$

于是得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial t}-a^2\frac{\partial q}{\partial x}=0\\&\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial t}=0\\&p(x,0)=g(x),\quad p(0,t)=\varphi_1(t)\\&q(x,0)=f'(x),\quad p(L,t)=\varphi_2(t)\end{aligned}\right\}\tag{B.1.1.21}$$

改写为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}0&-a^2\\-1&0\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=0\tag{B.1.1.22}$$

引入

$$\xi=x-at\quad\eta=x+at\tag{B.1.1.23}$$

则不难得到

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial\xi}+\frac{\partial p}{\partial\eta}\quad\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial\xi}+\frac{\partial q}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-a\frac{\partial p}{\partial\xi}+a\frac{\partial p}{\partial\eta}\quad\frac{\partial q}{\partial t}=-a\frac{\partial q}{\partial\xi}+a\frac{\partial q}{\partial\eta}$$

代入（B.1.1.21）整理可得

$$\left.\begin{aligned}&a\frac{\partial(p+aq)}{\partial\xi}=a\frac{\partial(p-aq)}{\partial\eta}\\&\frac{\partial(p+aq)}{\partial\xi}=-\frac{\partial(p-aq)}{\partial\eta}\end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial(p+aq)}{\partial\xi}=0\\&\frac{\partial(p-aq)}{\partial\eta}=0\end{aligned}\right\}\tag{B.1.1.24}$$

直接积分得

$$p + aq = f_1(\eta)$$
$$p - aq = f_2(\xi)$$

这表明沿 $x+at=$常数（$\eta=$const）曲线上 $p+aq=$ 常数；沿 $x-at=$常数（$\xi=$const）曲线上 $p-aq=$常数。利用这种关系可以建立差分关系，如图 B.1.5 所示，$(j,\ n+1)$ 与 A 点位于 $x-at=$常数线上，与 B 点位于 $x+at=$常数线上，因此

$$\left.\begin{aligned}(p - aq)_j^{n+1} &= (p - aq)_A\\ (p + aq)_j^{n+1} &= (p + aq)_B\end{aligned}\right\} \qquad \text{(B.1.1.25)}$$

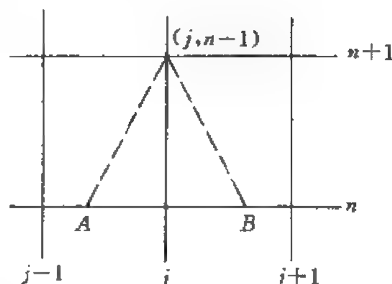


图 B.1.5

由于 $x_A = x_j - a\Delta t \quad x_B = x_j + a\Delta t \quad a > 0$ 利用线性插值法可知

$$(p - aq)_A = (p - aq)_{j-1}^n + \frac{\Delta x - a\Delta t}{\Delta x}$$
$$\times \left[(p - aq)_j^n - (p - aq)_{j-1}^n\right]$$
$$(p + aq)_B = (p + aq)_j^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x}$$
$$\times \left[(p + aq)_j^{n+1} - (p + aq)_j^n\right]$$

将它们代入（B.1.1.25），并将二式相加和相减，整理后得

$$\left.\begin{aligned}\frac{p_j^{n+1} - p_j^n}{\Delta t} &= -\frac{a}{2}\frac{p_j^n - p_{j-1}^n}{\Delta x} + \frac{a}{2}\frac{p_{j+1}^n - p_j^n}{\Delta x} + \frac{a^2}{2}\frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{\Delta x} + \frac{a^2}{2}\frac{q_{j+1}^n - q_j^n}{\Delta x}\\ \frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2}\frac{p_{j+1}^n - p_j^n}{\Delta x} + \frac{1}{2}\frac{p_j^n - p_{j-1}^n}{\Delta x} + \frac{a}{2}\frac{q_{j+1}^n - q_j^n}{\Delta x} - \frac{a}{2}\frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{\Delta x}\end{aligned}\right\}$$

写成矩阵形式为

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\left[\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}_j^{n+1} - \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}_j^n\right] = \begin{bmatrix}-\frac{a}{2} & \frac{a^2}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{a}{2}\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}_j^n - \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}_{j-1}^n\right]$$
$$+ \begin{bmatrix}\frac{a}{2} & \frac{a^2}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{a}{2}\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}_{j+1}^n - \begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}_j^n\right] \qquad \text{(B.1.1.26)}$$

这一公式也可以从另一个角度得到。（B.1.1.22）中关于 $\partial/\partial x$ 项的系数矩阵可以分解如下

$$\begin{bmatrix}0 & -a^2\\ -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & a\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2a} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2a} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1}\Lambda T$$

其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix}-a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & a\end{bmatrix} \Rightarrow \Lambda_- + \Lambda_+$$

这里 Λ_- 为保留负特征而让正特征由零值代替所得的对角阵，Λ_+ 为保留正特征而让负特征由零值代替所得的对角阵。若记

$$\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix}0 & -a^2\\ -1 & 0\end{bmatrix}=A\\
&\text{则 } A=T^{-1}\Lambda T=T^{-1}\Lambda_+T+T^{-1}\Lambda_-T=\begin{bmatrix}-\dfrac{a}{2} & -\dfrac{a^2}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{a}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{a}{2} & -\dfrac{a^2}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{a}{2}\end{bmatrix}\\
&\text{并引入记号}\qquad T^{-1}\Lambda_+T=A_+\quad T^{-1}\Lambda_-T=A_-\\
&U=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix},\quad \frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{\Delta x}=\left(\frac{\delta U}{\delta x_+}\right)_j^n,\quad \frac{U_j^n-U_{j-1}^n}{\Delta x}=\left(\frac{\delta U}{\delta x_-}\right)_j^n,\quad \frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t}=\left(\frac{\delta U}{\delta t}\right)_j^n\end{aligned}\right\}\tag{B.1.1.27}$$

则（B.1.1.22）可写为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}=0\tag{B.1.1.28}$$

（B.1.1.26）式可写为

$$\frac{\delta U}{\delta t}+A_+\frac{\delta U}{\delta x_-}+A_-\frac{\delta U}{\delta t_+}=0\tag{B.1.1.29}$$

由于

$$A_+=\begin{bmatrix}\dfrac{\lambda_1+|\lambda_1|}{2} & \\ & \dfrac{\lambda_2+|\lambda_2|}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{\Lambda+|\Lambda|}{2}$$

$$A_-=\begin{bmatrix}\dfrac{\lambda_1-|\lambda_1|}{2} & \\ & \dfrac{\lambda_2-|\lambda_2|}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{\Lambda-|\Lambda|}{2}$$

进而形式上表示为

$$A_+=\frac{A+|A|}{2},\quad A_-=\frac{A-|A|}{2}$$

因此（B.1.1.29）形式上可写为

$$\frac{\delta U}{\delta t}+\frac{A+|A|}{2}\frac{\delta U}{\delta x_-}+\frac{A-|A|}{2}\frac{\delta U}{\delta x_+}=0\tag{B.1.1.30}$$

可以看到，它与（B.1.1.18）相比，形式上一致。所以它是迎风格式在方程组中的推广，其物理意义是十分明了的。实际上这一格式是由特征上的关系式差分化后得到的。正特征反映了上游对下游的影响，负特征反映了下游对上游的影响，所以相应的导数项用后向和前向的差分格式，即 $\delta u/\delta x_-$ 及 $\delta u/\delta x_+$。作为算例，设 $a=1$，$f(x)=e^{-x^2}$，$g(x)=0$，$-\infty<x<+\infty$，$t>0$，$\Delta x=0.1$，$\Delta t=0.05$，$p(x,0)=0$，$q(x,0)=-2xe^{-x^2}$ 计算结果如图 B.1.6 所示。其中实线是 $t=0$ 时的 $u(x,0)=f(x)$；虚线为 $t>0$ 时不同时刻的分布。

例 4 求解方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad 0\leqslant x\leqslant L\\
&u(x,0)=f(x)\\
&u(0,t)=\varphi_1(t)\quad u(L,t)=\varphi_2(t)\end{aligned}\right\}\tag{B.1.1.31}$$

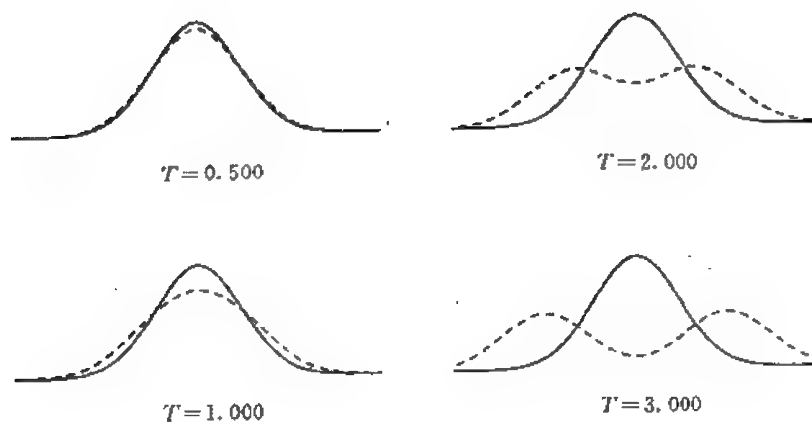


图 B.1.6

本例是例 1 和例 2 的结合，所以差分方程可以由上述二例的格式结合而成，即

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{a+|a|}{2}\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}+\frac{a-|a|}{2}\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}=\nu\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

(B.1.1.32)

利用台劳公式不难证明本格式在空间和时间上均有一阶精度，与原方程相容。

设

$$u(x,0)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}\quad -\infty<x<+\infty$$

其精确解为

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\eta}e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\eta,\quad \eta=\frac{(x-at)^2}{\sqrt{2\nu t}}$$

令 $a=1,\nu=0.1,\Delta t=0.02,\Delta x=0.1$，计算结果如图 B.1.7 所示，其中虚线为精确解，实线为数值解。

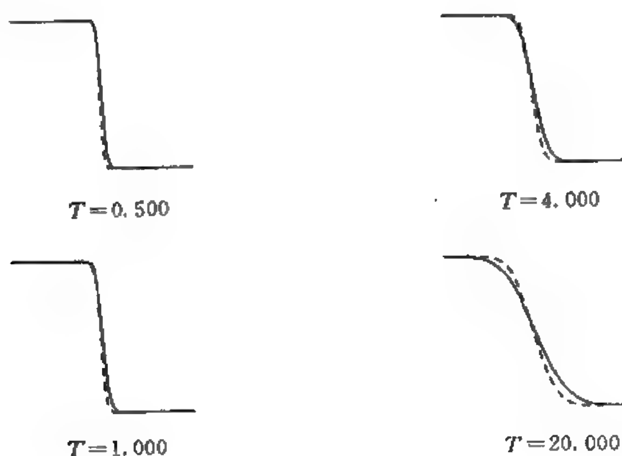


图 B.1.7

根据以上讨论的例子可以看出，差分格式的建立看起来并不困难。事实并非轻而易举。首先人们发现格式存在收敛性与稳定性问题，其次是边界条件的处理。对于流体力学方程组，由于其非线性，还有许多特殊的问题。一个格式的好坏，要从精度、收敛性、稳定性、计算速度及计算量等综合考虑后得出结论。下面首先讨论差分格式的收敛性和稳定性。

1.2 差分格式的收敛性与稳定性

差分格式的收敛性是指差分格式的解在网格无限缩小时趋向原微分方程真解的特性。收敛性的定义如下：

差分格式 $L_\Delta u_j^n=0$ 与微分方程 $L_u=0$ 的解（在 $(x_j,\ t_n)$）之间的差记作 $e_j^n=u_j^n-u(x_j,\ t_n)$。对于相当广泛一类定解函数（初值和边值函数）下都成立

$$u_j^n-u(x_j,t_n)\xrightarrow[\forall_{j,n}]{\Delta x,\Delta t\to 0}0$$

（其中 $\forall_{j,n}$ 表示对于所有的 j 和 n），则称该差分格式的解是收敛的。否则就是不收敛的。

前面讨论的差分方程和微分方程相容是指当 $\Delta x,\Delta t\to 0$ 时差分方程逼近微分方程，并不能保证差分方程的解也收敛到微分方程的解。

仍以（B.1.1.1）式为例，设差分格式为（B.1.1.5），选 $\Delta x=0.1$，$\nu=10^{-2}$，$\sigma=\nu\Delta t/\Delta x^2=1$，这时（B.1.1.5）简化为

$$u_j^{n+1}=u_{j-1}^n-u_j^n+u_{j+1}^n \tag{B.1.2.1}$$

表B.1.1中给出 $x=0.4$，$t=8$ 时的结果（这里设二边端点条件为 $\varphi_1=\varphi_2=100$）

表 B.1.1

N	Δx	$\frac{\Delta t}{\sigma}$	$\sigma=1$	$\sigma=\frac{1}{2}$	$\sigma=\frac{1}{6}$
5	0.2	4	100	50	46.854 0
10	0.1	1	12 200	47.547 91	45.490 47
15	0.067	0.4	1.97×10^8	45.615 30	45.239 97
20	0.05	0.25	∞	45.664 36	45.152 31
25	0.04	0.16		45.247 38	45.111 74
40	0.025	0.062 5		45.195 64	45.067 80
50	0.02	0.04		45.139 47	46.057 66
100	0.01	0.01		45.064 59	45.044 14

$u_{0.4}^8$ 精确值为 45.039 63

计算表明，当 Δt，Δx 减小，但 $\sigma=\nu\Delta t/\Delta x^2$ 保持不变，则当 $\sigma=1$ 时不管它们如何缩小，计算发散的情况不会有任何改善。当 $\sigma=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{6}$ 时则当 Δx，Δt 缩小时趋于精确解。这里还可以看到，对于本例 $\sigma=\frac{1}{6}$ 时收敛速度还更快一些。

下面来分析一下原因。利用台劳公式（B.1.1.7）式，方程（B.1.1.4）式可写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3}{\partial t^3}-\frac{\Delta t^3}{24}\frac{\partial^4}{\partial t^4}+\cdots\right)u$$

$$=\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2\Delta x^2}{4!}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{2\Delta x^4}{6!}\frac{\partial^6}{\partial x^6}+\frac{2\Delta x^6}{8!}\frac{\partial^8}{\partial x^8}+\cdots\right)u \qquad \text{(B. 1. 2. 2)}$$

或简写为算子形式：

$$L_t u = L_x u \qquad \text{(B. 1. 2. 3)}$$

由此易得

$$L_t^m u = L_x^m u \qquad \text{(B. 1. 2. 4)}$$

其上标 m 表示算子运行 m 次，m 为一整数。选 $m=4$，则有

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+\cdots=\nu^4\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}+\cdots$$

选 $m=3$，则

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\frac{3\Delta t}{2}\frac{\partial^4}{\partial t^4}-\cdots\right)u=\nu^3\left(\frac{\partial^6}{\partial x^6}+\frac{\Delta x^2}{4}\frac{\partial^8}{\partial x^8}+\cdots\right)u$$

选 $m=2$ 则

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta t\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\frac{\Delta t^2}{3}\frac{\partial^4}{\partial t^4}+\frac{\Delta t^3}{4}\frac{\partial^5}{\partial t^5}+\cdots\right)u$$

$$=\nu^2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^6}{\partial x^6}+\frac{\Delta x^4}{180}\frac{\partial^8}{\partial x^8}+\frac{\Delta x^6}{144}\frac{\partial^{10}}{\partial x^{10}}+\cdots\right)u$$

由它们分别可以得到 $\partial^4/\partial t^4$，$\partial^3/\partial t^3$、$\partial^2/\partial t^2$ 的表达式，再代回（B. 1. 2. 2）式可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u$$

$$=-\frac{\nu^2}{2}\Delta t\left\{\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\Delta x^2}{6}(1-6\sigma)\frac{\partial^6}{\partial x^6}+\frac{\Delta x^4}{180}\left[1-20(1-\sigma)-\frac{140}{3}\sigma^2\right]\frac{\partial^8}{\partial x^8}\right\}u$$

$$-\frac{\nu^3}{6}\Delta t^2\left\{\frac{\partial^6}{\partial x^6}+\frac{\Delta x^2}{4}(1-6\sigma)\frac{\partial^8}{\partial x^8}\right\}u-\frac{\Delta x^3}{24}\nu^4\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}+\frac{\Delta x^2}{12}\nu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\Delta x^4}{360}\nu\frac{\partial^8 u}{\partial x^8}$$

$$+\cdots \qquad \text{(B. 1. 2. 5)}$$

若令 $\sigma=\frac{1}{6}$，则有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u=E_T=O(\Delta t,\Delta x^4)$$

可见这时截断误差较小，所以有较高的收敛速度。不同的 σ 将有不同的收敛性。自然要问，什么样的 σ 值才使差分格式解收敛到微分方程的解？下面来讨论这个问题。

设差分方程解记作 u_j^n，微分方程的解记作 $(u)_j^n$ 由前面讨论知

$$\left.\begin{aligned}&u_j^{n+1}=\sigma u_{j-1}^n+(1-2\sigma)u_j^n+\sigma u_{j+1}^n\\&(u)_j^{n+1}=\sigma(u)_{j-1}^n+(1-2\sigma)(u)_j^n+\sigma(u)_{j+1}^n+O(\Delta t,\Delta x^2)\cdot\Delta t\end{aligned}\right\}\qquad \text{(B. 1. 2. 6)}$$

二式相减得

$$e_j^{n+1} = \sigma e_{j-1}^n + (1-2\sigma)e_j^n + \sigma e_{j+1}^n + O(\Delta t, \Delta x^2)\cdot\Delta t \tag{B.1.2.7}$$

其中 $e_j^n = (u)_j^n - u_j^n$，令

$$E^{(n)} = \max_{\forall j}\{|e_j^n|\}$$

由（B.1.2.7）知，当 $\sigma \leqslant \frac{1}{2}$ 时

$$|e_j^{n+1}| \leqslant E^{(n)} + O(\Delta t, \Delta x^2)\cdot\Delta t$$

或

$$E^{(n+1)} \leqslant E^{(n)} + O(\Delta t, \Delta x^2)\cdot\Delta t$$

不难用递推法得

$$E^{(n)} \leqslant E^{(0)} + O(\Delta t, \Delta x^2)\cdot n\Delta t$$

在给定时刻 $T=n\Delta t$ 时，假定起始条件无误差（至少是有界的），则有

$$E^{(n)} \leqslant T\cdot O(\Delta t, \Delta x^2)$$

显然当 Δx，$\Delta t \to 0$ 时，$E^{(n)} \to 0$。这就是说 $\sigma \leqslant \frac{1}{2}$ 时差分方程的解收敛到微分方程的解。

差分格式的另一个重要问题是稳定性。差分格式稳定性的概念不是一开始就建立起来的只是当电子计算机问世后，人们广泛地应用有限差分法在电子计算机上求解各种偏微分方程的定解问题时才发现和建立了关于差分格式稳定性的概念。人们在计算中发现，有的差分格式在计算时能够得到较好的结果，而另一些格式所得的结果严重偏离差分方程真解。通过大量实践和分析，人们认识到不同差分格式对于误差的敏感程度是很不相同的。有的方程对误差不很敏感，由于某种原因一旦产生误差，并不无限增长，而是限制在某一范围内，乃至不断衰减。相反，有的方程一旦出现误差，就很快增大，最后湮没了原来的解，计算没有意义。因此稳定性同样是十分重要的，它的定义是：

设在某一时刻 t_0，差分格式在 j 点的解为 $(u)_j^0$，由于某种原因而产生一个误差而得近似解 u_j^0。设二者之差为 $\delta u_j^0 = |(u)_j^0 - u_j^0|$，在以后 $t_n = t_0 + n\Delta t$ 时刻差分方程真解 $(u)_j^n$ 与近似解 u_j^n 之间的差值为 $\delta u_j^n = |(u)_j^n - u_j^n|$，如果存在一个与 n 无关的有限值 K，使得

$$\sup_{\forall j}|\delta u_j^n| \leqslant K\cdot\sup_{\forall j}|\delta u_j^0|$$

则称差分格式为稳定的，否则就是不稳定的。其中 $\sup\limits_{\forall j}$ 表示所有 j 的上确界。

为了理解稳定性的概念，下面来考虑（B.1.1.4）格式的情况，设 $\sigma = \frac{1}{2}$，这时差分格式可以写作

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) \tag{B.1.2.8}$$

设 $n=0$ 时 u_j^0 没有误差，计算过程也无误差，则得到的 u_j^n 将是差分格式的真解。如果在 $n=0$ 的某一点上有误差，而在以后计算中不再引入新的误差，这时把真解记作 u_j^n，近似解记作 $\tilde{u}_j^n$，于是有

$$\tilde{u}_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{j-1}^n + \tilde{u}_{j+1}^n) \tag{B.1.2.9}$$

与（B. 1. 2. 8）相减得

$$\varepsilon_j^{n+1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{j-1}^n + \varepsilon_{j+1}^n)$$

它在 $n=0$ 时只有一个点为 ε，其它点上均为零。计算过程中各点的误差如表 B. 1. 2 所示。从表中不难看到误差是向二边扩散的，但误差值不断减少，当 n 不断增加时误差不会增加。可见格式在 $\sigma=\frac{1}{2}$ 时是稳定的。

表 B. 1. 2

$n \quad j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0						ε					
1					$\frac{1}{2}\varepsilon$	0	$\frac{1}{2}\varepsilon$				
2				$\frac{1}{4}\varepsilon$	0	$\frac{1}{2}\varepsilon$	0	$\frac{1}{2}\varepsilon$			
3			$\frac{1}{8}\varepsilon$	0	$\frac{3}{8}\varepsilon$	0	$\frac{3}{8}\varepsilon$	0	$\frac{1}{8}\varepsilon$		
4		$\frac{1}{16}\varepsilon$	0	$\frac{1}{4}\varepsilon$	0	$\frac{3}{8}\varepsilon$	0	$\frac{1}{4}\varepsilon$	0	$\frac{1}{2}\varepsilon$	
5	$\frac{1}{32}\varepsilon$	0	$\frac{5}{32}\varepsilon$	0	$\frac{5}{16}\varepsilon$	0	$\frac{5}{16}\varepsilon$	0	$\frac{1}{32}\varepsilon$	0	$\frac{1}{32}\varepsilon$

同样格式，取 $\sigma=1$，误差方程为

$$\varepsilon_j^{n+1} = \varepsilon_{j-1}^n - \varepsilon_j^n + \varepsilon_{j+1}^n$$

在同样起始条件下计算结果如表 B. 1. 3

表 B. 1. 3

$n \quad j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0						ε					
1					ε	$-\varepsilon$	ε				
2				ε	-2ε	3ε	-2ε	ε			
3			ε	-3ε	6ε	-7ε	6ε	-3ε	ε		
4		ε	-4ε	10ε	-16ε	19ε	-16ε	10ε	-4ε	ε	
5	ε	-5ε	15ε	-30ε	45ε	-51ε	45ε	-30ε	15ε	-5ε	ε

由表可见，误差不仅向二边扩散，而且误差值也不断增长。当 n 不断上升时，误差会无限增长，所以差分格式在 $\sigma=1$ 时是不稳定的。

显然格式的稳定性不只和格式本身有关，还与格式参数有关。显然不稳定的格式是没有意义的。因此差分格式建立以后，必须对它的收敛性、稳定性作出判断。下一节就来讨论这个问题。

顺便指出，这里讨论的差分格式的稳定性与微分方程本身的稳定性是二个完全不同的概念。

1.3 线性差分格式的 Lax 定理

上一节讨论了差分格式与微分方程的相容性。这是比较简单的。差分格式还存在稳定性和收敛性的问题，这是比较复杂的问题，特别是收敛性问题。为此 Lax 对线性方程进行了分析，提出了线性微分方程的差分格式，其稳定性和收敛性是等价的。这就是说，如果差分格式是稳定的，必定也是收敛的，反之亦然。Lax 定理的内容如下。

对于一个适定的线性微分方程（常微分或偏微分方程）的初值问题，与它相容的差分格式的解收敛到原微分方程解的充分必要条件是该差分格式是稳定的。

这一定理可以用如下形式表示

$$\text{收敛性} \xrightleftharpoons[\text{差分格式与微分方程相容}]{\text{线性方程、适定的初值问题}} \text{稳定性}$$

这里所谓的适定是指微分方程在给定的定解条件下存在唯一解，并且连续依赖于定解条件。

为了证明这一条件，首先引入一些符号。设原微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$$

其中 L 为线性算子，相应的差分格式记作

$$u_{n-1} = L_h u^n$$

若（B.1.3.1）的一个充分光滑的解代入（B.1.3.2）得

$$u^{n-1} = E(\Delta t)u^n + O(\Delta t^{\nu_1+1}) + O(\Delta x^{\nu_2+1})$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = O(\Delta t^{\nu_1}) + O(\Delta x^{\nu_2})$$

ν_1，ν_2 为正数，称（B.1.3.2）与原方程相容，其中 E（Δt）可以看作一个算子，即

$$u^{n+1} = E(\Delta t)u^n$$

它具有如下性质

$$E(0) = I; \quad E(t_1)E(t_2) = E(t_1 + t_2)$$

稳定性的定义是在 $0 \leqslant n\Delta t \leqslant T$ 的范围内存在

$$\| L_h^{(n)} u_j^0 \| < K \| u_j^0 \|$$

其中 $\| \cdot \|$ 表示范数，K 与 j，n 无关的一个有限正数，则称差分格式是稳定的。

又由于 $u(t) = E(t)f$，故适定条件为

$$\| E(t)f \| < K \| f \|$$

收敛的定义为

$$\| u_j^n - u(x_j, t_n) \| = \| [L_h^{(n)} - E(t)]f \| \xrightarrow{\Delta t \to 0} 0$$

有了以上定义，可以来证明 Lax 定理了。

首先证明收敛必稳定（必要性）。

在给定时刻 T，微分方程的真解 $E(t)f$ 是有界的（适定性定义）。当 $0\leqslant n\Delta t\leqslant T$ 时若差分方程收敛，则由收敛性定义知 $\Delta t\to 0$ 时 $L_h^{(n)}f$ 也应是有界的，即存在一个与 f 无关的 K，使

$$\| L_h^n f \| < K \| f \|$$

因为 $u_j^0=f$，故有 $\| L_h^n u_j^0 \| < K \| u_j^0 \|$，即为（B.1.3.4）式，故必稳定。

下面证明稳定必收敛。

由差分格式的相容性知，$\Delta x/\Delta t<a$，$\Delta t\to 0$ 时，$\| [L_h-E(t)]u \| \to 0$，或

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\| [L_h - E(\Delta t)]u \| = 0$$

引入记号

$$[L_h - E(\Delta t)]f = \Psi_{\Delta t}$$
$$[L_h^{(n)} - E(n\Delta t)]f = \Psi_{n\Delta t}$$
$$[L_h^{(n)} - E((n-1)\Delta t)]f = \Psi_{\Delta t}^{(n)}$$

由于

$$\begin{aligned}\Psi_{n\Delta t} &= \Big[L_h^{(n)} - L_h^{(n-1)}E(\Delta t) + L_h^{(n-1)}E(\Delta t) - L_h^{(n-2)}E(2\Delta t) \\ &\quad + L_h^{(n-2)}E(2\Delta t) - \cdots + L_h E((n-1)\Delta t) - E(n\Delta t)\Big] f \\ &= \Big\{ L_h^{(n-1)}[L_h - E(\Delta t)] + L_h^{(n-2)}[L_h - E(\Delta t)]E(\Delta t) + \cdots \\ &\quad + [L_h - E(\Delta t)]E((n-1)\Delta t)\Big\} f \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} L_h^{(m)}[L_h - E(\Delta t)]E((n-1-m)\Delta t)f\end{aligned}$$

由于稳定性条件可知

$$\begin{aligned}\| \Psi_{n\Delta t} \| &= \Big\| \sum_{m=0}^{n-1} L_h^{(m)}[L_h - E(\Delta t)]E((n-1-m)\Delta t)f \Big\| \\ &\leqslant K \Big\| \sum_{m=0}^{n-1}[L_h - E(\Delta t)]E((n-1-m)\Delta t)f \Big\| \\ &\leqslant K\sum_{m=0}^{n-1} \| [L_h - E(\Delta t)]E((n-1-m)\Delta t)f \| \\ &= K\Delta t\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{\Delta t}\| [L_h - E(\Delta t)]E((n-1-m)\Delta t)f \| \\ &= K\, n\Delta t \cdot \max_{\forall m}\left\{\frac{1}{\Delta t}\| [L_h - E(\Delta t)]E((n-1-m)\Delta t)f \| \right\} \\ &\xrightarrow{\Delta t\to 0} 0\end{aligned}$$

故
$$\lim_{\Delta t\to 0}\| [L_h^{(n)} - E(n\Delta t)]f \| = 0$$

即
$$\| [u_h^n - u(x_j,t_n)] \| \xrightarrow{\Delta t\to 0} 0$$

这就证明了差分格式稳定时收敛。

Lax 定理证毕。

根据这一定理，对于适定的线性方程的初值问题，稳定性和收敛性是等价的，所以只要

讨论其中一个问题就可以了。实际上稳定性问题的讨论比收敛性问题的讨论要简单得多，所以下面重点讨论稳定性分析。

需要指出的是本定理只适用于线性方程，对于非线性方程，问题很复杂，至今尚无完整的理论。

1.4 差分格式稳定性分析

差分格式稳定性分析的方法很多，其中大部分应用于线性方程的，这里择要介绍几种。

1.4.1 矩阵分析法

为方便起见，设差分格式可以简写为

$$u^{n+1} = E_h u^n$$

其中 E_h 为一矩阵，u^n 为一向量列，在 $t=0$ 时由于某种原因产生误差 ε^0，得近似解 $\tilde{u}^0=u^0+\varepsilon^0$，假定在以后计算中不再产生新的误差，则以后的近似解应当满足

$$\tilde{u}^{n+1} = E_h \tilde{u}^n$$

其中 $\tilde{u}^{n+1}=u^{n+1}+\varepsilon^{n+1}$，$\tilde{u}^n=u^n+\varepsilon^n$ 该式与上式相减可得

$$\varepsilon^{n+1} = E_h \varepsilon^n$$

利用递推关系不难得到 $\varepsilon^{n+1}=E_h^{(n+1)}\varepsilon^0$ 显然稳定的充要条件是

$$\| \varepsilon^{n+1} \| \leqslant \| \varepsilon^0 \| \cdot K$$

其中 K 为与 n，j 无关的有限常数。为保证 K 的存在，必需有 $\| E_h \| \leqslant 1$。这里 $\| E_h \|$ 是矩阵 E_h 的范数。设 E_h 的特征值为 λ_1，$\lambda_2\cdots$，λ_n（E_h 为 $n\times n$ 方阵），相应的特征向量为 V_1，V_2，$\cdots$，V_n，任意 n 维向量记作 X，则由于 V_1，$V_2\cdots$，V_n 是线性无关的向量，故有

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$$

只有当 x_i 全为零时才能使 X 为零向量。另外

$$E_h X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_h V_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i V_i$$

故 $$\| E_h X \| = \| \sum_{i=1}^{n} x_i E_h V_i \| \leqslant \max_{\forall i}\{|\lambda_i|\} \cdot \| \sum_{i=1}^{n} x_i V_i \| = \max_{\forall i}\{|\lambda_i|\} \| X \|$$

可见当

$$\max_{\forall i}\{|\lambda_i|\} \leqslant 1$$

时有

$$\| E_h X \| \leqslant \| X \|$$

并且有

$$\| E_h^{n+1} X \| \leqslant \| X \|$$

取 X 为 ε^0，则有

$$\| E_h^{n+1} \varepsilon^0 \| \leqslant \| \varepsilon^0 \|$$

所以 E_h 的特征值的绝对值都小于 1 或等于 1 时差分格式是稳定的。这是一个必要而充分的条件。

以（B.1.1.5）式为例，它的 E_h 阵具有如下形式：

$$E_h = \begin{bmatrix} 1-2\sigma & \sigma & & & \\ \sigma & 1-2\sigma & \sigma & & \\ & \sigma & 1-2\sigma & \sigma & \\ & & \sigma & 1-2\sigma & \sigma \\ & & & \sigma & 1-2\sigma \end{bmatrix}$$

它的特征值为

$$\lambda_i = (1-2\sigma) + 2\sigma\cos\frac{(i-1)\pi}{n} = 1 - 4\sigma\sin^2\left(\frac{(i-1)\pi}{n}\right)$$

满足（B.1.4.1）式的条件为

$$|1-4\sigma| \leqslant 1$$

或

$$\sigma \leqslant \frac{1}{2}$$

这就是（B.1.1.5）格式的稳定条件。

需要指出的是矩阵特征值计算一般说都是比较困难的。因此本方法尽管比较严格，实际应用时是比较困难的。

1.4.2 Von Neumann 方法

这是一种简便而又有效的方法。该方法的基本思想是将解作周期延拓，将它用富氏级数表示出来，解的误差也可以作类似的表示。然后考察每一个富氏分量的增长和衰减情况，由此推断解的稳定性，具体说明如下。

设这里讨论（B.1.1.5）式的稳定性，即

$$u_j^{n+1} = \sigma u_{j+1}^n + (1-2\sigma)u_j^n + \sigma u_{j-1}^n$$

它的相应的 $n+1$ 层上的方程为

$$u_j^{n+2} = \sigma u_{j+1}^{n+1} + (1-2\sigma)u_j^{n+1} + \sigma u_{j-1}^{n+1}$$

二式相减，记 $\varepsilon_j^n = u_j^{n+1} - u_j^n$ 则得（B.1.1.5）式相应的误差方程为

$$\varepsilon_j^{n+1} = \sigma\varepsilon_{j+1}^n + (1-2\sigma)\varepsilon_j^n + \sigma\varepsilon_{j-1}^n$$

如果对求解域向 x 的正负方向作周期延拓，u，ε 都可以看作是以 L 为周期的周期函数，它们可以展成富氏级数：

$$\varepsilon_j^{n+1} = \sum_{k=-N/2}^{N/2} a_k^n e^{ikx_j} \quad (x_j = j\Delta x, j = 0,1,\cdots,N)$$

将它代入（B.1.4.3）式得

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2} a_k^{n+1} e^{ikx_j} = \sum_{k=-N/2}^{N/2} a_k^{n+1}[\sigma e^{ik\Delta x} + (1-2\sigma) + \sigma e^{-ik\Delta x}]\sigma e^{ikx_j}$$

或

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2} a_k^{n+1} e^{ikx_j} = \sum_{k=-N/2}^{N/2} a_k^{n+1}[1 + 2(\cos k\Delta x - 1)\sigma]\sigma e^{ikx_j}$$

利用富氏级数各项间的正交性不难得到

$$a_k^{n+1} = a_k^{n+1}\left[1 - 4\sigma\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right]$$

要使 $$|a_j^{n+1}|\leqslant|a_k^n|$$

必须有 $$\left|1-4\sigma\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant 1$$

即 $$\sigma\leqslant\frac{1}{2}$$

而（B.1.4.4）对于任何 k 都成立时，由富利埃级数的理论可以知道必有

$$|\varepsilon_j^{n+1}|\leqslant\left|\sum_{k=-N/2}^{N/2}a_k^{n+1}e^{ikx_j}\right|\leqslant\sum_{k=-N/2}^{N/2}|a_k^{n+1}|\leqslant\sum_{k=-N/2}^{N/2}|a_k^n|\leqslant\cdots\leqslant\sum_{k=-N/2}^{N/2}|a_k^0|$$

说明 $|\varepsilon_j^{n+1}|$ 有上确界。对于每一个点都有相同的不等式，所以 $\|\varepsilon^{n+1}\|$ 有上确界，因此格式是稳定的。

对于这里讨论的问题，这个条件是充分而又必要的条件。这可以作如下的说明。

比如设误差方程可以写作

$$\varepsilon_j^{n+1}=c_{-1}\varepsilon_{j-1}^n+c_0\varepsilon_j^n+c_{+1}\varepsilon_{j+1}^n$$

这里的 ε_j^n 只在离散点上存在，但可以设想一个连续函数 $\varepsilon^n(x)$，使 $\varepsilon^n(x_j)=\varepsilon_j^n$，将这一连续函数代入上面公式，可得

$$\varepsilon^{n+1}(x)=c_{-1}\varepsilon^n(x-\Delta x)+c_0\varepsilon^n(x)+c_{+1}\varepsilon^n(x+\Delta x)$$
$$\varepsilon^0(x)=\varphi(x)$$

这里 $\varphi(x)$ 是 $\varepsilon^0(x)$ 的初值。由上公式可知 $\varepsilon^n(x)$ 与 $\varphi(x)$，Δx，n 有关，$\varepsilon^n(x)$ 是以 L 为周期的函数，但不难作一变换，使周期变为 2π，所以下设周期为 2π。因为 $\varphi(x)$ 是一个有界函数，因此

$$\int_0^{2\pi}\varphi^2(x)\mathrm{d}x<+\infty$$

即二次可积。由富利埃级数理论知道，$\varphi(x)$ 的富氏展式一致收敛到 $\varphi(x)$ 本身，即

$$\varphi(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_ke^{ikx}$$

满足关系 $$\lim_{N\to\infty}\int_0^{2\pi}\left[\varphi(x)-\sum_{k=-N}^{N}c_ke^{ikx}\right]^2\mathrm{d}x=0$$

由于 $$\varepsilon^n(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_k^ne^{ikx}$$

故代入（B.1.4.5）式可得

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}c_k^{n+1}e^{ikx}=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_k^ne^{ikx}(c_{-1}e^{-ik\Delta x}+c_0+c_1e^{ik\Delta x})e^{ikx}$$

或利用正交性有

$$c_k^{n+1}=c_k^ne^{ikx}(c_{-1}e^{-ik\Delta x}+c_0+c_1e^{ik\Delta x})$$

引入记号 $$G(k,\Delta x)=c_{-1}e^{-ik\Delta x}+c_0+c_1e^{ik\Delta x}$$

则有 $$c_k^{n+1}=G(k,\Delta x)e^{ikx}$$

这里 $G(k,\Delta x)$ 与 n 是无关的。利用富氏级数理论知

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varepsilon^n(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_k^n|^2$$

利用（B. 1. 4. 9）式不难得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varepsilon^n(x)|^2\mathrm{d}x = \sum_{-\infty}^{+\infty}|G^n(k,\Delta x)\cdot c_k^0|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty}|G(k,\Delta x)|^{2n}\cdot|c_k^0|^2$$

显然只有当 $\quad |G(k,\Delta x)|\leqslant 1 \qquad \forall k$

时积分才有上确界，也就是说当 $G(k,\Delta x)$ 关于所有的 k 都满足上述不等式时 ε^n 的范数 $\|\varepsilon^n\|$ 才能是有上确界的。（这里范数用二次积分来定义）。于是可知，（B. 1. 4. 10）是 $\|\varepsilon^n\|$ 有上确界的充要条件，因而也是稳定性的充要条件。这里称 $G(k,\Delta x)$ 为放大因子。

现在人们可以看到 von Neumann 方法是很方便的。首先只要将原差分格式中的 u_j^n 改为 ε_j^n，并略去非齐次项（如果有的话），即得误差方程，然后将 ε_j^n 的富氏展式代入误差方程，找出放大因子 $G(k,\Delta x)$，使其在任意 k 下都满足模小于 1 的条件就是差分格式的稳定条件。（B. 1. 1. 5）的稳定条件与这里的分析是一致的。

上面分析的是显式格式。隐式格式的分析是一样的。比如（B. 1. 1. 11）式的误差方程为

$$\sigma\varepsilon_{j-1}^{n+1} - 2(1+\sigma)\varepsilon_j^{n+1} + \sigma\varepsilon_{j+1}^{n+1} = -\sigma\varepsilon_{j-1}^n + 2(\sigma-1)\varepsilon_{j-1}^n - \sigma\varepsilon_{j-1}^n$$

将富氏展式代入得

$$\sum_{k=-N/2}^{N/2}[\sigma e^{-ik\Delta x} - 2(1+\sigma) + \sigma e^{ik\Delta x}]a_j^{n+1}e^{ikx_j}$$
$$= \sum_{k=-N/2}^{N/2}[-\sigma e^{-ik\Delta x} + 2(\sigma-1) - \sigma e^{ik\Delta x}]a_j^n e^{ikx_j}$$

或
$$|a_j^{n+1}| = |a_j^n|\left|\frac{1-2\sigma\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}{1+2\sigma\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}\right|$$

由于
$$G(k,\Delta x) = \left|\frac{1-2\sigma\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}{1+2\sigma\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}\right|\leqslant 1 \qquad \forall k,\Delta x$$

故得差分格式（B. 1. 1. 11）式为无条件稳定的。

1. 4. 3 Hirt 稳定性分析方法

Hirt 在 1968 年提出了一种启发性的分析方法，它没有得到严格的证明，但有一定的物理依据。它非常简便并得到广泛地应用。它的作法是将差分方程中各项在某一点（比如 (n, j) 点）展开，并表示为双曲型近似方程，然后确定该点的影响域和依赖域，再由 CFL（Courant-Friedrich-Lewy）条件判断其稳定性：当计算依赖域大于方程依赖域时差分格式才是稳定的。

如（B. 1. 1. 5）式中各项均在 (n, j) 点展开，则有

$$u_j^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n\Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n\Delta t^2 + \cdots$$
$$= \sigma\left[u_j^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n\Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n\Delta x^2 + \cdots\right] + (1-2\sigma)u_j^n$$
$$+ \sigma\left[u_j^n - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n\Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n\Delta x^2 + \cdots\right]$$

或改写为
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n = \frac{\sigma\Delta x^2}{\Delta t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n - \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n + \cdots$$

注意到 $\sigma = \nu\Delta t/\Delta x^2$，上式可简写为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n-\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n+\cdots$$

略去高阶项即为一双曲型方程，其特征线方程为 $x\pm t\sqrt{\frac{2\nu}{\Delta t}}=\text{const}$ 其决定域如图B.1.8所示。计算依赖域在图中由虚线表示。为使计算依赖域大于微分方程依赖域，应有 $\frac{\Delta x}{\Delta t}\geqslant\sqrt{\frac{2\nu}{\Delta t}}$ 或 $\sigma=\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\leqslant\frac{1}{2}$ 这就是稳定条件。

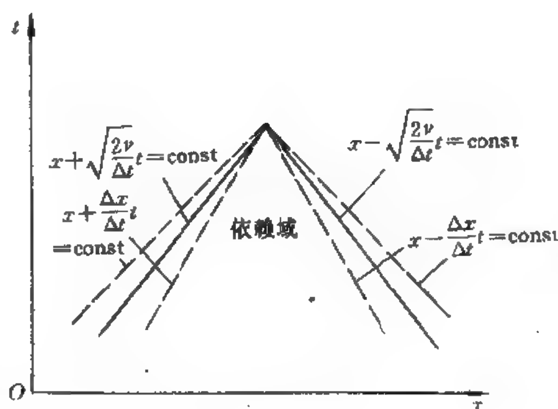


图 B.1.8

由上可见，Hirt 的基本思想是：当计算某一点 u 值时已经包含了物理上应有的各种影响，那计算才能反映问题本身的特性，反之则不然，计算自然也就没有意义了。可见这一方法的思想简单明了，可以推广到非线性方程中去。但这一方法的内涵尚不清楚，不能肯定复杂问题中的有效性。

以上三种方法中以 Von Neumann 方法最简单可靠，以后将主要采用这种方法。

1.5 几种常用的差分格式及其稳定性分析

下面介绍几个发展方程常用的差分格式和它们稳定性分析。

一维发展方程的模式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

其中 $a,\ \nu>0$，$a\frac{\partial u}{\partial x}$ 为对流项，$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 为扩散项。这一方程为一维对流扩散方程。$a=0$ 时变为扩散方程，是抛物型的。$\nu=0$ 时为双曲型方程，又叫对流方程。

1.5.1 扩散方程的几种差分格式

方程形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{B.1.5.1}$$

1. FTCS 差分格式为（见（B.1.1.5））

$$u_j^{n+1}=\sigma u_{j+1}^n+(1-2\sigma)u_j^n+\sigma u_{j-1}^n \tag{B.1.5.2}$$

稳定条件为

$$\sigma\leqslant\frac{1}{2}$$

2. BTCS 差分格式，即时间后向空间中心的格式，为

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\nu\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \tag{B.1.5.3}$$

或写为

$$\sigma u_{j+1}^{n+1}-(1+2\sigma)u_j^{n+1}+\sigma u_{j-1}^{n+1}=u_j^n \tag{B.1.5.4}$$

这就是隐式差分格式。（B.1.1.5）则为显式格式。

列出其误差方程，用富氏展式代入，不难得到

$$a_k^{n+1}\left[-1-4\sigma\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\right]=a_k^n$$

于是

$$G(k,\Delta x)=-\frac{1}{1+4\sigma\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)} \tag{B.1.5.5}$$

显然$|G(k,\Delta x)|\leqslant 1$，故（B.1.5.3）式无条件稳定。

3. Crank-Nicolson 差分格式

这是上述二种格式的组合，即

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\frac{\nu}{2}\left[\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}\right] \tag{B.1.5.6}$$

在上一节中已经分析过，它是无条件稳定的。

一种更为广泛的组合是

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\nu\left[\theta\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}+(1-\theta)\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}\right] \tag{B.1.5.7}$$

它称作混合格式，其放大因子为

$$G(k,\Delta x)=\left|\frac{1-4(1-\theta)\sigma\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}{1+4\theta\sigma\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}\right| \tag{B.1.5.8}$$

稳定条件为

$$\left.\begin{array}{ll}\theta>\frac{1}{2} & \text{无条件稳定}\\ \theta<\frac{1}{2}\text{ 时} & 0<\sigma\leqslant\frac{1}{2-4\theta}\text{ 稳定}\end{array}\right\} \tag{B.1.5.9}$$

利用台劳公式，由（B.1.5.7）式可以得到

$$\begin{aligned}&u_j^{n+1}-u_j^n-\sigma\{\theta(u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1})+(1-\theta)(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)\}\\&=\frac{1}{2}\left\{\Delta t^2\nu^2(1-2\theta)-\frac{\nu\Delta t\Delta x^2}{6}\right\}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j^n+O(\Delta t\Delta x^2,\Delta t^3,\Delta t^2\Delta x^2)\end{aligned}$$

可见一般情况下格式具有 $\Delta t\Delta x^2$ 量级的截断误差。但若取

$$\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{12\sigma}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{6\sigma}\right) \tag{B.1.5.10}$$

则有比较高阶的截断误差。于是人们得到一种新的差分格式：

$$\begin{aligned}\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=&\frac{\nu}{2}\left[\left(1-\frac{1}{6\sigma}\right)(u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1})\right.\\&\left.+\left(1+\frac{1}{6\sigma}\right)(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)\right]\end{aligned} \tag{B.1.5.11}$$

这是一种无条件稳定的差分格式，又叫 Mitchell-Fairweather 差分格式。

4. DuFort-Frankel 格式

如果在空间和时间方面都取中心差分格式，人们自然会想到如下的差分格式：

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}=\nu\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

不幸的是它无条件不稳定。但如作小小的变动就可以得到有实用意义的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}=\nu\frac{u_{j+1}^n-u_j^{n+1}-u_j^{n-1}+u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \tag{B.1.5.12}$$

这是一个具有三个时间层的差分格式，采用 Von Neumann 分析法，步骤同前可得（这里设 $\epsilon_j^n \sim A^n e^{ikx_j}$）

$$\left.\begin{aligned}(1+\sigma)A^{n+1}-2\sigma\cos(k\Delta x)A^n&=(1-\sigma)A^{n-1}\\ A^n&=A^n\end{aligned}\right\} \tag{B.1.5.13}$$

另外有

其中 $\sigma=\frac{2\nu\Delta t}{\Delta x^2}$，(B.1.5.13) 式可以改写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1+\sigma}{1-\sigma} & \frac{2\sigma\cos(k\Delta x)}{1-\sigma}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^{n+1}\\ A^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^n\\ A^{n-1}\end{bmatrix}$$

引入记号 $U^n=(A^n,A^{n-1})^T$，则有

$$U^{n+1}=GU^n \tag{B.1.5.14}$$

其中放大矩阵 G 为

$$G=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1+\sigma}{1-\sigma} & \frac{2\sigma\cos(k\Delta x)}{1-\sigma}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{2\sigma\cos(k\Delta x)}{1+\sigma} & \frac{1-\sigma}{1+\sigma}\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

显然稳定条件为 G 的特征值的绝对值均小于 1。确定 G 特征值的方程为

$$\det|G-\lambda I|=0$$

展开后得

$$\lambda^2+\frac{2\sigma\cos(k\Delta x)}{1+\sigma}\lambda-\frac{1-\sigma}{1+\sigma}=0$$

可得

$$\lambda=\frac{\sigma\cos(k\Delta x)\pm\sqrt{1-\sigma^2\sin^2(k\Delta x)}}{1+\sigma}$$

无论 $\sigma^2\sin^2(k\Delta x)>1$ 或 <1，都不难证明 $|\lambda|\leqslant 1$，故本格式是无条件稳定的。令人遗憾的是本格式截断误差为

$$O(\Delta t^2,\Delta x^2,\Delta t/\Delta x)$$

为使格式与方程相容，必须有 $\Delta t/\Delta x\to 0$，这就大大限制了本方法的应用。

1.5.2 双曲型方程的几种差分格式

方程的基本形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{B.1.5.15}$$

1. 迎风格式

其形式如上一节讨论所得

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{a+|a|}{2}\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}+\frac{a-|a|}{2}\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}=0 \tag{B.1.5.16}$$

设 $a>0$，增长因子为

$$G=1-s+se^{-ik\Delta x}\qquad s=\frac{|a|\Delta t}{\Delta x}$$

由图 B.1.9 不难看出稳定条件为 $s\leqslant 1$。

2. Friedrich-Lax 格式

在建立上风格式时采用了$u_j^{n+1}=u_A$，其中u_A由$(n, j-1)$及(n, j)或(n, j)及$(n, j+1)$之间线插得到。如果u_A是由$(n, j-1)$及$(n, j+1)$二点间线插则得

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n + \frac{\Delta x - a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

或
$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(1+s)u_{j-1}^n + \frac{1}{2}(1-s)u_{j+1}^n \quad \text{(B. 1. 5. 17)}$$

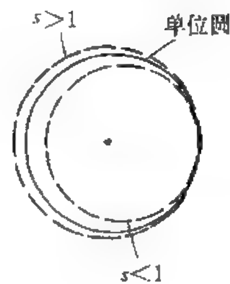


图 B. 1. 9

这就是 Friedrich-Lax 格式，其误差增长因子为

$$G = \cos(k\Delta x) - i \cdot s \cdot \sin(k\Delta x)$$

显然稳定条件为

$$s \leqslant 1 \qquad s = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$$

3. Euler 隐式格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad \text{(B. 1. 5. 18)}$$

不难得到它误差增长因子为

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2\sin^2(k\Delta x)}} \leqslant 1$$

显然本格式为无条件稳定的。

4. 蛙跳式（leap-frog）

它也是一个三层格式，具体形式为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{(B. 1. 5. 19)}$$

其误差增长矩阵为

$$G = \begin{pmatrix} -2 \cdot i \cdot s \cdot \sin(k\Delta x) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

使该矩阵特征值的绝对值均小于 1 的条件为

$$s = \frac{|a|\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1$$

5. Lax-Wendroff 格式及 MacCormack 格式

在建立迎风格式及 Friedrich-Lax 格式时均用线性插值的方法得到u_A。这样在空间方向的误差就比较大，如果用$(n, j+1)$，(n, j)，$(n, j-1)$三点对A点用二次插值方法求，显然精度就比较高。

用n层上$j+1$，j，$j-1$三点建立的插值公式为

$$u^* = u_{j-1}\frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})}{(x_{j-1} - x_j)(x_{j-1} - x_{j+1})} + u_j\frac{(x - x_{j+1})(x - x_{j-1})}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j-1})} + u_{j+1}\frac{(x - x_j)(x - x_{j-1})}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_{j-1})}$$

由于

$$x_A = x_j - a\Delta t \quad x_j = x_{j-1} + \Delta x \quad x_{j+1} = x_j + \Delta x = x_{j-1} + 2\Delta x$$

故有

$$u_A = u_j^n - \frac{s}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{s^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

利用 $u_j^{n+1}=u_A$ 即得 Lax-Wendroff 格式（L-W 格式）

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{s}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{s^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \tag{B. 1. 5. 20}$$

不难分析得知它具有截断误差 $O(\Delta t, \Delta x^2)$，误差增长因子为

$$G = 1 - i\sin(k\Delta x) - 2s^2\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)$$

使 $|G|\leqslant 1$ 的条件为 $s\leqslant 1$，这就是 L-W 格式稳定条件。

格式（B. 1. 5. 20）还可以改写为如下形式：

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\{u_j^n + [u_j^n - s(u_{j+1}^n - u_j^n)] - s[(u_j^n - s(u_{j+1}^n - u_j^n)) - (u_{j-1}^n - s(u_j^n - u_{j-1}^n))]\}$$

或

$$\left.\begin{aligned} \overline{u_j^{n+1}} &= u_j^n - s(u_{j+1}^n - u_j^n) \\ \overline{\overline{u_j^{n+1}}} &= \overline{u_j^{n+1}} - s(\overline{u_j^{n+1}} - \overline{u_{j-1}^{n+1}}) \\ u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_j^n + \overline{\overline{u_j^{n+1}}}) \end{aligned}\right\} \tag{B. 1. 5. 21}$$

这就将一个差分格式分成二步走：第一步为前向差分，第二步为后向差分，最后将所得值与原值平均。由于 $s=\frac{a\Delta t}{\Delta x}$，所以上式进一步改写为

$$\left.\begin{aligned} \overline{u_j^{n+1}} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}[(au)_{j+1}^n - (au)_j^n] \\ \overline{\overline{u_j^{n+1}}} &= \overline{u_j^{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\overline{(au)_j^{n+1}} - \overline{(au)_{j-1}^{n+1}}\right] \\ u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_j^n + \overline{\overline{u_j^{n+1}}}) \end{aligned}\right\}$$

该法可以推广到非线性方程中去。因为原方程可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (au)}{\partial x} = 0$$

记 $au=F$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{B. 1. 5. 22}$$

如 F 为非线性函数，差分格式可以写作

$$\left.\begin{aligned} \overline{u_j^{n+1}} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}[F_{j+1}^n - F_j^n] \\ \overline{\overline{u_j^{n+1}}} &= \overline{u_j^{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\overline{F_j^{n+1}} - \overline{F_{j-1}^{n+1}}\right] \\ u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_j^n + \overline{\overline{u_j^{n+1}}}) \end{aligned}\right\} \tag{B. 1. 5. 23}$$

这就是著名的 MacCormack 显式格式。当 F 为 u 的线性函数时，它与 L-W 格式一致。

1.5.3 对流扩散方程的几个差分格式

对流扩散方程的基本形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{B.1.5.24}$$

对于二个时间层的差分格式，它的一般形式为

$$\alpha_1 u_{j+1}^{n+1}+\alpha_0 u_j^{n+1}+\alpha_{-1}u_{j-1}^{n+1}=a_1 u_{j+1}^n+a_0 u_j^n+a_{-1}u_{j-1}^n$$

首先格式应当与原方程相容，所以α,a之间应当有一定的关系。为得到这些关系，首先将$u_{j\pm1}^{n+1}$ $u_{j\pm1}^n$在（n，j）处台劳展开，将它们代入上式，即可得

$$\begin{aligned}&[(\alpha_1+\alpha_0+\alpha_{-1})-(a_1+a_0+a_{-1})]u_j^n+(\alpha_1+\alpha_0+\alpha_{-1})\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n\Delta t\\&+[(\alpha_1-\alpha_{-1})-(a_1-a_{-1})]\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n\Delta x+\frac{1}{2}[(\alpha_1+\alpha_{-1})-(a_1+a_{-1})]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n\Delta x^2\\&=O(\Delta t^2,\Delta x\Delta t,\Delta x^3,\cdots)\end{aligned} \tag{B.1.5.25}$$

为满足相容，将上式与（B.1.5.24）式比较，可知应当有

$$\left.\begin{aligned}&(\alpha_1+\alpha_0+\alpha_{-1})-(a_1+a_0+a_{-1})=0\\&a(\alpha_1+\alpha_0+\alpha_{-1})=[(\alpha_1-\alpha_{-1})-(a_1-a_{-1})]\frac{\Delta x}{\Delta t}\\&\nu(\alpha_1+\alpha_0+\alpha_{-1})=-\frac{1}{2}[(\alpha_1+\alpha_{-1})-(a_1+a_{-1})]\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\end{aligned}\right\} \tag{B.1.5.26}$$

引入记号

$$s=\frac{a\Delta t}{\Delta x}\quad \sigma=\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\quad (a>0,\nu>0) \tag{B.1.5.27}$$

（B.1.5.26）式可写作

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\s-1&s&s+1\\2\sigma+1&2\sigma&2\sigma+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_0\\\alpha_{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_0\\a_{-1}\end{bmatrix}$$

或解得

$$\left.\begin{aligned}&a_1=\frac{1}{2}(2\sigma-s+2)\alpha_1+\frac{1}{2}(2\sigma-s)\alpha_0+\frac{1}{2}(2\sigma-s)\alpha_{-1}\\&a_0=-2\sigma\alpha_1+(1-2\sigma)\alpha_0-2\sigma\alpha_{-1}\\&a_{-1}=\frac{1}{2}(2\sigma+s)\alpha_1+\frac{1}{2}(2\sigma+s)\alpha_0+\frac{1}{2}(2\sigma+s+2)\alpha_{-1}\end{aligned}\right\} \tag{B.1.5.28}$$

这就是系数间应满足的关系。

为了确定稳定性条件，用 Von Neumann 方法。设$\varepsilon_j^n\sim A^n e^{ikx_j}$，代入相应的误差方程可得

$$A^{n+1}[\alpha_1 e^{ik\Delta x}+\alpha_0+\alpha_{-1}e^{-ik\Delta x}]=A^n[a_1 e^{ik\Delta x}+a_0+a_{-1}e^{-ik\Delta x}]$$

误差增长因子为

$$G=\frac{A^{n+1}}{A^n}=\frac{a_0+(a_1+a_{-1})\cos(k\Delta x)+i(a_1-a_{-1})\sin(k\Delta x)}{\alpha_0+(\alpha_1+\alpha_{-1})\cos(k\Delta x)+i(\alpha_1-\alpha_{-1})\sin(k\Delta x)}$$

不失一般性可以设

$$\alpha_1 + \alpha_0 + \alpha_{-1} = a_1 + a_0 + a_{-1} = 1$$

于是

$$G = \frac{A^{n+1}}{A^n} = \frac{1 - (a_1 + a_{-1}) + (a_1 + a_{-1})\cos(k\Delta x) + i(a_1 - a_{-1})\sin(k\Delta x)}{1 - (\alpha_1 + \alpha_{-1}) + (\alpha_1 + \alpha_{-1})\cos(k\Delta x) + i(\alpha_1 - \alpha_{-1})\sin(k\Delta x)}$$

引入记号

$$X = \frac{1}{2}(1 - \cos(k\Delta x)),\quad B = 16a_1a_{-1},\quad B' = 16\alpha_1\alpha_{-1}$$

$$C = 4[(a_1 - a_{-1})^2 - a_1 + a_{-1}],\quad C' = 4[(\alpha_1 - \alpha_{-1})^2 - \alpha_1 + \alpha_{-1}]$$

不难验证

$$G\overline{G} = 1 - X\frac{(B' - B)X + (C' - C)}{B'X^2 + C'X + 1}$$

注意到 $0 \leqslant X \leqslant 1$，故使 $G\overline{G} = |G|^2 \leqslant 1$ 的条件为

$$(B' - B)X + (C' - C) \geqslant 0$$

或

$$B' - B + C' - C \geqslant 0 \quad C' - C \geqslant 0$$

将 B，B'，C，C' 表达式代回稳定条件为

$$\left.\begin{aligned}&(\alpha_1 - \alpha_{-1})^2 - (a_1 - a_{-1})^2 - (\alpha_1 + \alpha_{-1} - a_1 - a_{-1}) \geqslant 0\\&4(\alpha_1\alpha_{-1} - a_1a_{-1}) + (\alpha_1 - \alpha_{-1})^2 - (a_1 - a_{-1})^2 - (\alpha_1 + \alpha_{-1} - a_1 - a_{-1}) \geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{B.1.5.29}$$

这就是（B.1.5.25）格式稳定的条件。

利用以上公式可以讨论以下格式的相容性和稳定性。

1. FTCS 格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \nu\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}\tag{B.1.5.30}$$

整理后得

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(2\sigma - s)u_{j+1}^n + (1 - 2\sigma)u_j^n + \frac{1}{2}(2\sigma + s)u_{j-1}^n$$

可见

$$\alpha_1 - \alpha_{-1} = 0 \quad \alpha_0 = 1 \quad a_1 = \frac{1}{2}(2\sigma - s) \quad a_0 = 1 - 2\sigma \quad a_{-1} = \frac{1}{2}(2\sigma + s)$$

稳定条件为

$$2\sigma - s^2 \geqslant 0 \quad -[(2\sigma)^2 - s^2] + 2\sigma - s^2 \geqslant 0$$

或整理得

$$\sigma \leqslant \frac{2}{R^2} \quad \sigma \leqslant \frac{1}{2}$$

其中

$$R = \frac{a\Delta x}{\nu}$$

又称作格式雷诺数。显然 σ 应满足

$$\sigma \leqslant \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{R^2}\right\}\tag{B.1.5.31}$$

2. BTCS 格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}=\nu\frac{u_{j-1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \tag{B.1.5.32}$$

类似可得稳定条件

$$\sigma^2+2\sigma\geqslant 0 \quad 4\sigma^2+\sigma\geqslant 0$$

由于$\sigma>0$，上述条件总是满足，故实际为无条件稳定。

3. Crank-Nicolson 格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\left[\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}\theta+\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}(1-\theta)\right]$$

$$-\nu\left[\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\theta+\frac{u_{j-1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}(1-\theta)\right]=0$$

整理后得

$$a_1=-\frac{1}{2}(2\sigma-s)(1-\theta) \quad a_0=(1+2\sigma)(1-\theta) \quad a_{-1}=\frac{1}{2}(2\sigma+s)(1-\theta)$$

$$a_1=-\frac{\theta}{2}(2\sigma-s) \quad a_0=1+2\sigma\theta \quad a_{-1}=-\frac{\theta}{2}(2\sigma+s)$$

稳定条件为

$$\left.\begin{aligned}&2(2\theta-1)\sigma+1\geqslant 0\\&(2\theta-1)s^2+4\sigma\geqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{B.1.5.33}$$

或

$\theta\geqslant\frac{1}{2}$时为无条件稳定；

$0<\theta<\frac{1}{2}$时稳定条件为

$$\left.\begin{aligned}&\sigma\leqslant\frac{1}{2(1-2\theta)}\\&s^2\leqslant\frac{2}{(1-2\theta)^2}\end{aligned}\right\} \tag{B.1.5.34}$$

4. 迎风格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{a}{2\Delta x}[(1-\varepsilon)(u_{j+1}^n-u_j^n)+(1+\varepsilon)(u_j^n-u_{j-1}^n)]$$

$$-\frac{\nu}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)=0 \tag{B.1.5.35}$$

其中 $$\varepsilon=\mathrm{sgn}(a)=\begin{cases}1 & a>0\\0 & a=0\\-1 & a<0\end{cases}$$

同样方法可得稳定条件为

$$\sigma\leqslant\frac{1}{2+|R|} \qquad s\leqslant 1, \qquad R=\frac{a\Delta x}{\nu} \tag{B.1.5.36}$$

值得注意的是利用台劳公式可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n+a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n-(\nu+|a|\Delta x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n=O(\Delta t,\Delta x^2) \tag{B.1.5.37}$$

可见格式与原方程相容。但在近似计算中粘性项增加了，粘性系数由ν增加为$\nu+|a|\Delta x$。所增加部分又叫格式粘性系数。它的出现使计算精度下降，但稳定性得到改善。格式粘性项在

流场计算中是很有用的。

5. MacCormack 格式

前面已经讨论过双曲型方程的 MacCormack 格式。下面从另一个角度出发导出对流扩散方程的差分格式

由台劳展开知

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_j^n \cdot \Delta t^2 + \cdots$$

由（B.1.5.24）知

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2a\nu\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \nu^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = -a^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3a^2\nu\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 3a\nu^2\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \nu^3\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}$$

$$\cdots\cdots$$

将它们代入台劳展开式可得

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n + \left(\nu\Delta t + \frac{a^2\Delta t^2}{2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n$$

$$- a\nu\Delta t^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^n + \frac{\nu^2\Delta t^2}{2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_j^n + \cdots$$

将微商项用中心差商代替可得

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = {} & u_j^n - a\Delta t\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \left(\nu\Delta t + \frac{a^2\Delta t^2}{2}\right)\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \\ & - a\nu\Delta t^2\frac{(u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + u_j^n) - (u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n)}{2\Delta x^3} \\ & + \frac{\nu^2\Delta t^2}{2}\frac{u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{\Delta x^4} + \cdots \end{aligned} \tag{B.1.5.38}$$

引入记号

$$\Delta^+ u_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, \qquad \Delta^- u_j^n = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \tag{B.1.5.39}$$

上式可改写为

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = {} & \frac{1}{2}u_j^n + \frac{1}{2}u_j^n - \frac{1}{2}a\Delta t(\Delta^+ + \Delta^-)u_j^n + \left(\nu\Delta t + \frac{a^2\Delta t^2}{2}\right)\Delta^+\Delta^- u_j^n \\ & - \frac{1}{2}a\nu\Delta t^2(\Delta^+ + \Delta^-)\Delta^+\Delta^- u_j^n + \frac{1}{2}\nu^2\Delta t^2\Delta^+\Delta^-\Delta^+\Delta^- u_j^n + \cdots \\ = {} & \frac{1}{2}u_j^n + \frac{1}{2}(1 - a\Delta t\Delta^- + \nu\Delta t\Delta^+\Delta^-)(1 - a\Delta t\Delta^+ + \nu\Delta t\Delta^+\Delta^-)u_j^n + \cdots \end{aligned}$$

略去高阶小量得差分格式

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}u_j^n + \frac{1}{2}(1 - a\Delta t\Delta^- + \nu\Delta t\Delta^+\Delta^-)(1 - a\Delta t\Delta^+ + \nu\Delta t\Delta^+\Delta^-)u_j^n \tag{B.1.5.40}$$

或写作二步式

$$\left.\begin{aligned}
\overline{u_j^{n+1}} &= u_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{\nu\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\
\overline{\overline{u_j^{n+1}}} &= \overline{u_j^{n+1}} - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(\overline{u_{j+1}^{n+1}} - \overline{u_j^{n+1}}) + \frac{\nu\Delta t}{\Delta x}(\overline{u_{j+1}^{n+1}} - 2\,\overline{u_j^{n+1}} + \overline{u_{j-1}^{n+1}}) \\
u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_j^n + \overline{\overline{u_j^{n+1}}})
\end{aligned}\right\} \tag{B.1.5.41}$$

这就是 MacCormack 格式。若设

$$F = -au + \nu\frac{\partial u}{\partial x}$$

则（B.1.5.41）式也可以改写为

$$\left.\begin{aligned}
\overline{u_j^{n+1}} &= u_j^n - \Delta t\Delta^- F_j^n \\
\overline{\overline{u_j^{n+1}}} &= \overline{u_j^{n+1}} - \Delta t\Delta^+ \overline{F_j^{n+1}} \\
u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_j^n + \overline{\overline{u_j^{n+1}}})
\end{aligned}\right\} \tag{B.1.5.42}$$

其中 $\Delta^- F$ 中的 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 用 $\Delta^+ u$；$\Delta^+ F$ 中的 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 则用 $\Delta^- u$

本格式的稳定条件可以用其中每一步的稳定条件综合得到，所以不难得到稳定条件为

$$\sigma \leqslant \frac{1}{2+|R|} \text{ 和 } s \leqslant 1$$

其中 $R=\frac{|a|\Delta x}{\nu}$，即格子雷诺数。可以看出 MacCormack 格式的特点是对流项一次用前向差分，一次用后向差分，二次导数项，即耗散项则用中心差分格式。这种显式的 MacCormack 格式曾在流体力学数值计算中广为采用。其计算比较方便，但计算激波时遇到了困难，故为目前更有效的方法所替代。

6. 蛙跳格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \nu\frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} \tag{B.1.5.43}$$

这是一个三层格式，它的误差放大因子矩阵为

$$G = \begin{pmatrix} -2si\sin(k\Delta x) & 1 - 8\sigma\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$\lambda^2 + 2si\sin(k\Delta x)\cdot\lambda - 1 + 8\sigma\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) = 0$$

利用 Müller 定理（见本节末附录）可知使 $|\lambda| \leqslant 1$ 的条件为

$$0 < s \leqslant 1 - 2\sigma$$

或

$$\sigma \leqslant \frac{1}{2+|R|} \tag{B.1.5.44}$$

这就是蛙跳式的稳定条件。

下面列出几种不同形式的蛙跳格式：

DuFort-Frankel 格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}-\nu\frac{u_{j+1}^n-u_j^{n+1}-u_j^{n-1}+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}=0 \quad \text{(B. 1. 5. 45)}$$

稳定条件为

$$\sigma=\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\leqslant 1, s=\frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\geqslant\sigma \quad \text{(B. 1. 5. 46)}$$

蛙跳上风格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}+\frac{a+|a|}{2\Delta x}(u_j^n-u_{j-1}^n)+\frac{a-|a|}{2\Delta x}(u_{j+1}^n-u_j^n)-\frac{\nu}{\Delta x^2}(u_{j+1}^{n-1}-2u_j^{n-1}+u_j^{n-1})=0$$

(B. 1. 5. 47)

稳定条件为

$$\sigma\leqslant\frac{1}{4}, s\geqslant 2\sigma \quad \text{(B. 1. 5. 48)}$$

蛙跳上风 DuFort-Frankel 格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\Delta t}+\frac{a+|a|}{2\Delta x}(u_j^n-u_{j-1}^n)+\frac{a-|a|}{2\Delta x}(u_{j+1}^n-u_j^n)$$

$$-\frac{\nu}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n-u_j^{n+1}-u_j^{n-1}+u_j^n)=0 \quad \text{(B. 1. 5. 49)}$$

稳定条件为

$$\sigma\leqslant 1, \sigma\leqslant\sqrt{2}s$$

以上介绍的是比较常用的简单的差分格式。本书末附表中列出一些常用的差分格式及其稳定条件，供读者查阅和练习使用。

附录 Müller 定律

设 $f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n$，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为复常数，该多项式有 n 个零点，记 $\tilde{f}(\lambda)=a_0^*\lambda^n+a_1^*\lambda^{n-1}+\cdots+a_n^*$，其中 * 表示共轭复数。显然

$$f_1(\lambda)=\frac{1}{\lambda}[\tilde{f}(0)f(\lambda)-\tilde{f}(\lambda)f(0)]$$

为一 $(n-1)$ 次多项式。Müller 定律为：

若 $|\tilde{f}(0)|>|f(0)|$ 及 $\tilde{f}(\lambda)$ 的零点都满足 $|\lambda|\leqslant 1$，则 $f(\lambda)$ 的零点也都满足 $|\lambda|\leqslant 1$。

1.6 多维问题几种常用的差分格式

实际问题往往是二维和三维的，故上节讨论的方法需推广。本节集中讨论二维扩散问题，其它情况可作类似处理。

二维扩散方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \quad \text{(B. 1. 6. 1)}$$

相应的定解条件为

$$\left.\begin{aligned}&u(x,y,0)=f(x,y)\\&u(0,y,t)=\psi_1(y,t)\quad u(x,0,t)=\varphi\\&u(L_x,y,t)=\psi_2(y,t)\quad u(x,L_y,t)=\varphi\\&\qquad (x,y)\in\{0\leqslant x\leqslant L_x;0\leqslant y\leqslant L_y\};\quad 0<t\leqslant T\end{aligned}\right\} \text{(B. 1. 6. 2)}$$

首先确定离散点的位置为

$$\left.\begin{aligned} x_j &= j\Delta x, \quad j = 0,1,\cdots,J, \quad J\Delta x = L_x \\ y_k &= k\Delta y, \quad k = 0,1,\cdots,K, \quad K\Delta y = L_y \\ t_n &= n\Delta t, \quad n = 0,1,\cdots,N, \quad N\Delta t = T \end{aligned}\right\} \tag{B.1.6.3}$$

网格点号用（j，k；n）表示，在其上的函数值记作 $u_{j,k}^n$。

1.6.1 加权平均差分格式

这是一维问题中采用的加权平均差分格式在二维问题中的推广，具体形式为

$$\frac{1}{\Delta t}(u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n) = \nu[\theta(\Delta_{xx}u_{j,k}^{n+1} + \Delta_{yy}u_{j,k}^{n+1}) + (1-\theta)(\Delta_{xx}u_{j,k}^n + \Delta_{yy}u_{j,k}^n)] \tag{B.1.6.4}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{xx}u_{j,k} &= \frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{\Delta x^2} \\ \Delta_{yy}u_{j,k} &= \frac{u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{\Delta y^2} \end{aligned}\right\} \tag{B.1.6.5}$$

不难看出，当 $\theta=0$ 时格式是显式的；当 $\theta\neq 0$ 时格式是隐式的。隐式格式求解需要解一个大型的稀疏线性代数方程组，比较麻烦。

为分析格式的稳定性，首先将（B.1.6.4）改写为

$$\begin{aligned} &(1 + 2\theta\sigma_x + 2\theta\sigma_y)u_{j,k}^{n+1} - \theta\sigma_x u_{j-1,k}^{n+1} - \theta\sigma_x u_{j+1,k}^{n+1} - \theta\sigma_y u_{j,k-1}^{n+1} - \theta\sigma_y u_{j,k+1}^{n+1} \\ =&[1 - 2(1-\theta)\sigma_x - 2(1-\theta)\sigma_y]u_{j,k}^n + (1-\theta)\sigma_x u_{j-1,k}^n + (1-\theta)\sigma_x u_{j+1,k}^n \\ &+ (1-\theta)\sigma_y u_{j,k-1}^n + (1-\theta)\sigma_y u_{j,k+1}^n \end{aligned} \tag{B.1.6.6}$$

其中

$$\sigma_x = \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2} \tag{B.1.6.7}$$

分析方法与前类同，设 $\varepsilon_{j,k}^n = A^n e^{i(k_x x + k_y y)}$ 代入与（B.1.6.6）对应的误差方程中去，不难得到误差放大因子

$$G = \frac{A^{n+1}}{A^n} = \frac{1 - 4(1-\theta)\left[\sigma_x \sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) + \sigma_y \sin^2\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)\right]}{1 + 4\theta\left[\sigma_x \sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) + \sigma_y \sin^2\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)\right]} \tag{B.1.6.8}$$

记

$$B = \sigma_x \sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) + \sigma_y \sin^2\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) \tag{B.1.6.9}$$

则

$$G = \frac{A^{n+1}}{A^n} = \frac{1 - 4(1-\theta)B}{1 + 4\theta B}$$

当 $\theta \geqslant \frac{1}{2}$ 时记 $\theta = \frac{1}{2} + \Theta$，$0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{1}{2}$，于是有

$$G = \frac{1 - 4\left(1 - \frac{1}{2} - \Theta\right)B}{1 + 4\left(\frac{1}{2} + \Theta\right)B} = \frac{(1 + 4B\Theta) - 2B}{(1 + 4B\Theta) + 2B} \leqslant 1$$

故 $\theta \geqslant \frac{1}{2}$ 时是无条件稳定的。

$\theta < \frac{1}{2}$ 时，记 $\theta = \frac{1}{2} - \Theta$，$0 < \Theta \leqslant \frac{1}{2}$，于是有

$$G = \frac{(1 - 4B\Theta) - 2B}{(1 - 4B\Theta) - 2B} \leqslant 1$$

当 $1 - 4B\Theta \geqslant 0$ 时 $|G| \leqslant 1$；$1 - 4B\Theta < 0$ 时 $|G| > 1$，因此 $\theta < \frac{1}{2}$ 时稳定条件为 $1 - 4B\Theta \geqslant 0$ 或

$$B \leqslant \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$$

或

$$\sigma_x + \sigma_y \leqslant \frac{1}{2(1 - 2\theta)}$$

或

$$\nu\Delta t\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right) \leqslant \frac{1}{2(1 - 2\theta)} \tag{B. 1. 6. 10}$$

关于格式的相容性和精度读者可自行讨论。

1.6.2 交替方向隐式格式（ADI）

上一格式中 $\theta \neq 0$ 时为隐式格式，求解比较困难。显式格式稳定条件又比较严，如 $\Delta x = \Delta y = \Delta$ 则稳定条件为 $\frac{\nu\Delta t}{\Delta^2} \leqslant \frac{1}{4}$，与一维比相差一半。交替方向隐式格式是一个综合显式和隐式二者特点的格式，它的基本思想是将差分计算分成二步走：第一步在一个方向（比如说 x 方向）是隐式的，而在另一个方向是显式的；第二步则二个方向交换一下，即在第一个方向上为显式，而另一方向为隐式。由于只在一个方向上隐式，求解时形成的方程组是三对角方程组，所以求解大为简化。因为在二个方向上不断交替进行，所以叫做交替方向隐式格式（Alternating Direction Implicit Method）（ADI 法），其具体形式为

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_{j,k}^{2n+1} - u_{j,k}^{2n}}{\Delta t} &= \nu\{\Delta_{xx}u_{j,k}^{2n+1} + \Delta_{yy}u_{j,k}^{2n}\} \\ \frac{u_{j,k}^{2n+2} - u_{j,k}^{2n+1}}{\Delta t} &= \nu\{\Delta_{xx}u_{j,k}^{2n+1} + \Delta_{yy}u_{j,k}^{2n+2}\} \end{aligned}\right\} \tag{B. 1. 6. 11}$$

利用 von Neumann 方法可得放大因子为

$$G_1 = \frac{A^{2n+1}}{A^{2n}} = \frac{1 - 4\sigma_y \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right)}{1 + 4\sigma_x \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right)}$$

$$G_2 = \frac{A^{2n+2}}{A^{2n+1}} = \frac{1 - 4\sigma_x \sin^2\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right)}{1 + 4\sigma_y \sin^2\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right)}$$

显然

$$G_1 G_2 \leqslant 1$$

所以本格式是无条件稳定的。值得指出这个结论不能推广到三维，在三维时本方法是有条件稳定的。

交替方法可以有不同的形式，例如 Douglas-Rachford 交替法

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{u^{*}_{j,k}-u^{n}_{j,k}}{\Delta t}&=\nu(\Delta_{xx}u^{*}_{j,k}+\Delta_{yy}u^{n}_{j,k})\\
\frac{u^{n+1}_{j,k}-u^{*}_{j,k}}{\Delta t}&=\nu(\Delta_{xx}u^{n+1}_{j,k}-\Delta_{yy}u^{*}_{j,k})
\end{aligned}\right\}\qquad(\text{B. 1. 6. 12})
$$

若将 u^* 消去不难知它实际是下述差分格式：

$$
\frac{u^{n+1}_{j,k}-u^{n}_{j,k}}{\Delta t}=\nu(\Delta_{xx}+\Delta_{yy})u^{n+1}_{j,k}-\nu^2\Delta t^2\Delta_{xx}\Delta_{yy}(u^{n+1}_{j,k}-u^{n}_{j,k})
$$

因此相当于加了一项与 Δt^2 成比例的项，是一高阶小量。人们可以证明本格式是无条件稳定的。推广到三维中去为

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{u^{*}_{j,k,l}-u^{n}_{j,k,l}}{\Delta t}&=\nu(\Delta_{xx}u^{*}_{j,k,l}+\Delta_{yy}u^{n}_{j,k,l}+\Delta_{zz}u^{n}_{j,k,l})\\
\frac{u^{**}_{j,k}-u^{*}_{j,k}}{\Delta t}&=\nu(\Delta_{yy}u^{**}_{j,k,l}-\Delta_{yy}u^{*}_{j,k,l})\\
\frac{u^{n+1}_{j,k}-u^{**}_{j,k}}{\Delta t}&=\nu(\Delta_{zz}u^{**}_{j,k,l}-\Delta_{zz}u^{*}_{j,k,l})
\end{aligned}\right\}\qquad(\text{B. 1. 6. 13})
$$

该格式也是无条件稳定的。

若将 Mitchell-Fairweather 格式加以推广则得到如下的格式

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{u^{*}_{j,k}-u^{n}_{j,k}}{\Delta t}&=\left(1+\frac{\Delta x^2}{6\nu\Delta t}\right)\Delta_{xx}u^{n}_{j,k}+\left(1-\frac{\Delta y^2}{6\nu\Delta t}\right)\Delta_{yy}u^{*}_{j,k}\\
\frac{u^{n+1}_{j,k}-u^{*}_{j,k}}{\Delta t}&=\left(1-\frac{\Delta x^2}{6\nu\Delta t}\right)\Delta_{xx}u^{n+1}_{j,k}+\left(1+\frac{\Delta y^2}{6\nu\Delta t}\right)\Delta_{yy}u^{*}_{j,k}
\end{aligned}\right\}\qquad(\text{B. 1. 6. 14})
$$

其稳定条件为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\Delta x^2}{6}\left(\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{k\Delta y}{2}\right)\right)\\
&\quad-2\left(\Delta t^2+\frac{\Delta x^4}{36}\right)\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{k\Delta y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\\
&-\Delta t\left(\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{k\Delta y}{2}\right)\right)\\
&\quad+\frac{\Delta t\Delta x^3}{3}\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{k\Delta y}{2}\right)\leqslant 0
\end{aligned}\right\}\forall\ (k_x,k_y)\qquad(\text{B. 1. 6. 15})
$$

这是易于达到的，因为 Δt，Δx 是比较小的。

1.6.3 时间分裂格式

本方法最早由苏联学者 Яненко 等提出的，其基本思想是将多维问题化为几个一维问题。具体方法介绍如下。

由台劳展开得

$$
\begin{aligned}
u^{n+1}_{j,k}&=u^{n}_{j,k}+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n}_{jk}\Delta t+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^{n}_{jk}\Delta t^2+\cdots\\
&=u^{n}_{j,k}+\nu\left(\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}\right)^{n}_{jk}\Delta t+\frac{1}{2}\nu^2\nu\left(\frac{\partial u^4}{\partial x^4}+\frac{\partial u^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial u^4}{\partial y^4}\right)^{n}_{jk}\Delta t^2+\cdots
\end{aligned}
$$

$$=\left(1+\nu\Delta t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(1+\nu\Delta t\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)_{jk}^n+O(\Delta t^2)$$

差分化并略去高阶小量得到

$$u_{jk}^{n+1}=(1+\nu\Delta t\Delta_{xx})(1+\nu\Delta t\Delta_{yy})u_{jk}^n \tag{B.1.6.16}$$

或分解为

$$\left.\begin{aligned}u_{jk}^{*}&=(1+\nu\Delta t\Delta_{yy})u_{jk}^n\\u_{jk}^{n+1}&=(1+\nu\Delta t\Delta_{xx})u_{jk}^{*}\end{aligned}\right\} \tag{B.1.6.17}$$

显然这相当于解二个一维问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

这里采用的格式可以自由选用。如果用 FTCS 格式，则稳定条件为

$$\sigma_x=\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\leqslant\frac{1}{2},\qquad\sigma_y=\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}\leqslant\frac{1}{2}$$

或记作

$$\min\{\sigma_x,\sigma_y\}\leqslant\frac{1}{2} \tag{B.1.6.18}$$

与直接对二维用显式格式时的稳定条件正好相差一半。

时间分裂差分格式由于其简单和方便而得到广泛的应用，有时还可以通过这一方法和其它离散化方法结合使用，这里不再讨论这一问题。

1.7 边界条件及其对稳定性的影响

在前面的讨论中只涉及到内点，并未考虑到边界点的情况。实际上边界条件对整个问题的求解有很大的影响。而边界条件的影响又是比较难以考虑的。有时边界条件处理不当可使整个计算不稳定。因此严格说来，差分格式应当包含内点及边界点差分处理二部分内容。

在本节，只试图通过一类边界条件的处理而引起对稳定性影响的例子来引起读者的注意。全面讨论这个问题还有待于深入研究。

这里仍以热传导方程（B.1.5.1）为例。它有三类边界条件。第一类边界条件给定边界值，显然它对内点格式计算不会产生什么影响，故与格式稳定性无关。

如果是第二类边界条件，如在 $x=0$处边界条件为

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial x}=b_1(t)$$

如用差分方法处理，假定用一阶精度差分，则有

$$\frac{u_1^{n+1}-u_0^{n+1}}{\Delta x}=b_1^{n+1}$$

或

$$u_1^{n+1}=u_0^{n+1}+b_1^{n+1}\Delta x$$

相应的误差方程为

$$\varepsilon_0^{n+1}=\varepsilon_1^{n+1}$$

可见对稳定性没有影响，因为边界点误差增长和内点相同。如果内点误差不增长，边界点误差也不会增长。

同一边界条件，若改用二阶格式，则为

$$\frac{u_1^{n+1} - u_{-1}^{n+1}}{2\Delta x} = b_1^{n+1}$$

或
$$u_{-1}^{n+1} = u_1^{n+1} - 2\Delta x b_1^{n+1}$$

同样有
$$u_{-1}^n = u_1^n - 2\Delta x b_1^n$$

这里（—1）点是虚设的点。设某一初始时刻的 u_0，u_1，…，u_N 值已知，利用边界条件可以计算 u_{-1}值。于是下一时间层可以用差分方法得到每一个点 n 时刻的值，所以只要内点计算格式是稳定的，则边界计算并没有增加稳定性方面的麻烦。

下面讨论第三类边界条件的处理。边界条件的形式为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (a_1 u + b_1)|_{x=0}$$

差分化后得到

$$\frac{u_1^{n-1} - u_0^{n+1}}{\Delta x} = a_1^{n+1} u_0^{n+1} + b_1^{n+1}$$

整理得

$$u_0^{n+1} = \frac{u_1^{n+1} - \Delta x \cdot b_1^{n+1}}{1 + a_1^{n+1}\Delta x}$$

误差方程为

$$\varepsilon_0^{n+1} = \frac{\varepsilon_1^{n+1}}{1 + a_1^{n+1}\Delta x}$$

显然，当 $a_1>0$时 $\varepsilon_0<\varepsilon_1$，即 ε_0的增长因子小于1，故对稳定性没有影响。当 $a_1<0$时则稳定性下降，严重时可能失去稳定性。

如果在边界上采用二阶格式，则为

$$\frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2\Delta x} = a_1^n u_0^n + b_1^n$$

或改写为

$$u_{-1}^n = u_1^n - 2a_1^n \Delta x u_0^n - b_1^n 2\Delta x$$

再用内点格式为

$$u_0^{n+1} = [1 - 2\sigma(1 + a_1^n\Delta x)]u_0^n + 2\sigma u_1^n - 2\sigma\Delta x b_1^n$$

与内点方程合在一起（设 $x=1$处为第一类边界条件），则得

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1-2\sigma(1+a_1^n\Delta x) & 2\sigma & & & \\ \sigma & 1-2\sigma & \sigma & & \\ & \sigma & 1-2\sigma & \sigma & \\ & & & \vdots & \\ & & & \sigma & 1-2\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} -2\sigma\Delta x \cdot b_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^n$$

或简写为

$$U^{n+1} = A^n U^n + B^n$$

其中 A^n 即为误差增长因子矩阵，它的特征范围由 Braner 定理来确定（见本节末附录），即

$$|\lambda - (1 - 2\sigma)| \leqslant 2\sigma \quad |\lambda - (1 - 2\sigma)| \leqslant \sigma$$

$$|\lambda - [1 - 2\sigma(1 + a_1^n \Delta x)]| \leqslant 2\sigma$$

为使 $|\lambda| \leqslant 1$，应当要求

$$\sigma \leqslant \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2 + a_1^n \Delta x}\right\}$$

显然当 $a_1 > 0$时稳定性变差。

由上看到，边界条件对稳定性的影响，即使在一维情况下，分析也是比较困难的。主要问题在于矩阵特征值的确定很困难。在多维问题时显然就更加困难了。有时为了方便起见，对于边界点的差分格式也可以单独作稳定性分析，所得结论对于整体也是有启发性的。如(B. 1. 6. 22) 式所对应的误差方程为

$$\varepsilon_0^{n+1} = [1 - 2\sigma(1 + a_1^n \Delta x)]\varepsilon_0^n + 2\sigma\varepsilon_1^n$$

利用 von Neumann 分析方法可得

$$G = \frac{A^{n+1}}{A^n} = 1 - 2\sigma(1 + a_1^n \Delta x) + 2\sigma\cos(k\Delta x) + 2\sigma i\sin(k\Delta x)$$

不难看出

$$\sigma \leqslant \frac{1}{2 + a_1^n \Delta x} \quad (a_1^n > 0)$$

或

$$\sigma \leqslant \frac{1}{2} \quad (a_1^n > 0)$$

时 $|G| \leqslant 1$。这一分析结果与前相同。

对于一般问题，这种方法只能作估计，然后由数值计算加以验证。

对于多维问题，除了由于边界条件差分化引起稳定性问题以外，还存在着边界形状复杂，网格点不落在边界上，处理时还会引起新的误差。目前复杂形状的问题可以用有限单元法，贴体网格等（参考后面有关章节）。

附录 Braner 定理

对于 $A = \{a_{ij}\}_{n\times n}$，引入记号 R_i，$R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$，其中$1 \leqslant i \leqslant n$。Braner 定理指出：$A$ 所有的特征值都落在 $|\lambda - a_{ii}| \leqslant R_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 圆的并集内。也就是说特征值落在以 a_{ii} 为圆心，R_i 为半径的圆所覆盖的区域内。

1.8 修正方程及其应用

在前面讨论的各种差分方程都是在一定精度下对原微分方程的近似，故与原微分方程都有一定的差别。以双曲型方程为例：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad t > 0, -\infty < x < +\infty$$

它的起始条件为

$$u(x,0) = e^{i\omega x}$$

则方程的精确解为

$$u(x,t) = e^{i\alpha(x-at)}$$

如采用迎风格式，设 $a>0$，则有

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

若选 $\Delta x = a\Delta t$，则上式可改写为

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$$

这时所得的解和精确解是一致的。但若 $\Delta x \neq a\Delta t$，若保留关于 t 的导数项，则得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

它的解为

$$u(x,t) = e^{i\alpha\left(x - t\cdot\frac{a\sin\alpha\Delta x}{\alpha\Delta x}\right) - a\cdot\frac{1-\cos(\alpha\Delta x)}{\Delta x}t}$$

与精确解相比，幅度以 $e^{-a\frac{1-\cos(\alpha\Delta x)}{\Delta x}t}$ 速率下降，而波速下降为 $\frac{a\sin\alpha\Delta x}{\alpha\Delta x}$。只有当 Δx，$\Delta t\to 0$ 时幅度才不下降，波速也才能等于 a。因此离散化以后产生了解的附加衰减以及传播速度的变化。这些变化与波数有关。这种波速的变化叫做色散，波幅的下降叫做耗散。这些变化显然是由于差分化引起的。当 $\Delta x\to 0$ 时

$$\frac{a\sin(\alpha\Delta x)}{\alpha\Delta x} = 1 - \frac{1}{6}(\alpha\Delta x)^2 + \cdots$$

$$\frac{1-\cos(\alpha\Delta x)}{\alpha\Delta x} = \frac{1}{2}\alpha\Delta x + \cdots$$

将它们代入（B.1.8.3），略去高阶小量可得

$$u(x,t) = \exp\left\{i\alpha\left[x - a\left(1 - \frac{\alpha^2\Delta x^2}{6}\right)\right] - \frac{1}{2}\alpha^2 a\Delta x\cdot t\right\}$$

不难验证它满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a}{2}\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{a}{6}\Delta x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

这就是迎风差分格式（B.1.8.3）中将 u_{j-1}^n 在 u_j^n 点处台劳展开后略去高阶（Δx^3以上）项后得到的方程。所以可见耗散与二阶导数项有关，色散与三阶导数项有关。

由上分析不难看出近似解与精确解存在区别是由于它们满足的方程实际上有区别所造成的。为了研究近似解与精确解的差别，有必要研究近似解所满足的方程与原方程的区别。这种近似解所满足的方程叫做修正方程。

下面以格式（B.1.8.2*）为例，它对应的修正方程可以如下确定。首先它改写为

$$u_j^{n+1} = (1-s)u_j^n + su_{j-1}^n$$

将 u_j^{n+1}，u_{j-1}^n 分别在（n，j）点展开，代入后得

$$u + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{3!}\Delta t^3\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \cdots$$

$$= (1-s)u + s\left[u - \Delta x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\Delta x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{3!}\Delta x^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots\right]$$

其中 $s=\frac{a\Delta t}{\Delta x}$，这里 u，$\frac{\partial u}{\partial t}$，…，$\frac{\partial u}{\partial x}$…都省略了标号 n，j

上式改写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta t\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{6}\Delta t^2\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\cdots\right)u$$

$$=\left(-a\frac{\partial}{\partial x}+\frac{a\Delta x}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{6}\Delta x^2\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\cdots\right)u$$

或简写为

$$L_t u = L_x u$$

由于 L_t，L_x 都是线性算子，故有

$$L_t^l u = L_x^l u$$

当 $l=4$，3，2时分别有

$l=4$：$$\left(\frac{\partial^4}{\partial t^4}+\cdots\right)u=\left(a^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\cdots\right)u$$

$l=3$：$$\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\frac{3}{2}\Delta t\frac{\partial^4}{\partial t^4}+\cdots\right)u=\left(-a^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{3}{2}a^3\Delta x\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\cdots\right)u$$

$l=2$：$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\Delta t\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\frac{7}{12}\Delta t^2\frac{\partial^4}{\partial t^4}+\cdots\right)u$$

$$=\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-a^2\Delta x\frac{\partial^3}{\partial x^3}\frac{7}{12}a^2\Delta x^2\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\cdots\right)u$$

将 $l=4$中$\frac{\partial^4}{\partial t^4}$用$\frac{\partial^4}{\partial x^4}$等表达出来，代入 $l=3$式，得到$\frac{\partial^3}{\partial t^3}$的表达式，再将它们一起代入 $l=2$式中可得$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$用$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^3}{\partial x^3}$…表达的公式，最后将它们代入 $l=1$的（B. 1. 8. 8）式，可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a\Delta x}{2}(1-s)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{6a\Delta x^2}{6}(2s^2-3s+1)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

$$+O(\Delta x^3,\Delta x^2\Delta t,\Delta x\Delta t^2,\Delta t^3)$$

这就是差分方程（B. 1. 8. 7）实际求解的方程，即修正方程。不同的差分格式对应不同的修正方程。一般说，对流扩散的差分格式具有如下一般形式的修正方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=(\nu+\nu_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\nu_{2k+1}\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}+\sum_{k=2}^{\infty}\nu_{2k}\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}$$

如设 $u=e^{\beta t}e^{i\alpha x}$，代入方程后可得

$$\beta=-i\alpha a-\alpha^2(\nu+\nu_2)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k i\alpha^{2k+1}\nu_{2k+1}+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\alpha^{2k}\nu_{2k}$$

这里设 α，β 均为实数，故有

$$\beta=-\alpha^2(\nu+\nu_2)+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\nu_{2k}\alpha^{2k}$$

$$a=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k i\alpha^{2k}\nu_{2k+1}$$

不难看出 ν_2，ν_{2k}引起波的耗散，而 ν_{2k+1}引起波的色散，所以$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}$叫做耗散项，$\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}$项为色散项，$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$为原有的耗散项。为使格式稳定，应当使耗散总是正的。如果

$$\nu+\nu_2>0 \quad (-1)^k\nu_{2k}<0 \quad (k=2,3,\cdots)$$

则耗散总是正的，格式一定是稳定的。不过这个条件过于严格，是充分条件而不是必要条件。此外色散会扰乱人们对波动问题的研究，需要加以克服。

差分格式修正方程的讨论是有重要意义的。为减少解的耗散和色散，所以通过对修正方程的研究来确定如何修改差分格式，建立更好的差分格式。

下面来讨论这样的例子。

已知 L-W 格式为

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}=\frac{a^2\Delta t}{2}\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

它的修正方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{a}{6}\Delta x^2(1-s^2)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{a}{8}\Delta x^3 s(1-s^2)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\cdots$$

另一种具有二阶精度的格式为

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}=\frac{a}{2}(\Delta x-a\Delta t)\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

它的修正方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a}{6}\Delta x^2(1-s)(2-s)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{a}{8}\Delta x^4 s(1-s^2)(2-s)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Delta x^4-\cdots$$

这里 L-W 格式可以改写为

$$u_j^{n+1}=\left(I-\frac{s}{2}\Delta_0+\frac{s^2}{2}\Delta^+\Delta^-\right)u_j^n=L(s)u_j^n$$

其中

$$\Delta_0 u_j^n=u_{j+1}^n-u_{j-1}^n$$

$$\Delta^+ u_j^n=u_{j+1}^n-u_j^n$$

$$\Delta^- u_j^n=u_j^n-u_{j-1}^n$$

同样（B. 1. 8. 16）写为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-su_j^n+su_{j-1}^n-\frac{1}{2}(s-s^2)(u_j^n-2u_{j-1}^n+u_{j-2}^n)$$

因为

$$L(1)u_j^n=u_j^n-\frac{1}{2}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)+\frac{1}{2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)=u_{j-1}^n$$

故（B. 1. 8. 20）可改写为

$$u_j^{n+1}=u_{j-1}^n+\frac{1-s}{2}(u_j^n-u_{j-2}^n)+\frac{1-2s+s^2}{2}(u_j^n-2u_{j-1}^n+u_{j-2}^n)$$

$$=\left(1-\frac{1-s}{2}\Delta_0+\frac{(1-s)^2}{2}\Delta^+\Delta^-\right)u_{j-1}^n$$

$$=L(1-s)L(1)u_j^n$$

它与 L-W 格式组合可得格式

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{2}[L(s)+L(1-s)L(1)]u_j^n$$

由修正方程可以看到当 $s<1$时二个格式的色散项互相抵消而耗散项略为提高，故格式更加稳定而色散项减少了。这一格式叫做 Fromm 格式。

以上就是从修正方程的角度来改善格式的一个例子。在流体力学计算中也需要用类似的思想来研究和建立更有效的差分格式。

小　　结

本章围绕对流扩散方程的基本形式，用差分方法求解。通过讨论，介绍了数值计算中有关误差分析，差分方法的收敛性和稳定性。着重讨论了差分格式的稳定性及其分析方法。本章还介绍了一些最常用的差分格式。尽管它们并不复杂，但一方面经常被应用，另一方面它们也是进一步讨论的起点。边界条件处理对格式稳定性的影响是一个比较困难的问题，这里只作简单介绍，以期引起读者注意。修正方程是研究差分格式性质的重要手段，在讨论非线性问题时尤为重要，是一个值得探讨的问题。

参 考 文 献

1. Richtmyer R D, Morton K W. Difference Methods for Initial-Value Problems. Second Edition. John Wiley & Sons. Inc, 1967
2. Peyret R, Taylor T D. Computational Methods for Fluid Flow. Springer-Verlag, 1983
3. 矢嶋信男，野木達夫。発展方程式の数值解析。日本岩波書店，1977（1983，中译本：发展方程的数值分析，人民教育出版社）
4. 沈孟育，苏铭德. 计算流体动力学讲义。清华大学力学系，1985
5. Sod G A. Numerical Methods in Fluid Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1985
6. Fletcher C A J. Computational Techniques for Fluid Dynamics. Springer-Verlag, 1988

习　　题

1. 读者自行从本书末附表中选几种格式，分析其稳定条件，建立其修正方程。
2. 对流扩散模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad -\infty<x<+\infty, t>0$$

$$a=1, \nu=0.1\qquad u(x,0)=\frac{1}{2}\mathrm{th}(4x)$$

取 $\Delta x=0.1$，试用不同差分格式计算 $t=20$时的 u 值，并与精确解作比较。

3. 设上一题的初值为 $u(x,0)=\sin(0.5x)$，作同样计算。

4. 解$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$的 Rusanov 格式为

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}=\frac{1}{2}(u_j^n+u_{j+1}^n)-\frac{1}{3}s(u_{j+1}^n-u_j^n)$$

$$u_j^{(2)}=u_j^n-\frac{2}{3}s(u_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}-u_{j-\frac{1}{2}}^{(1)})$$

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{s}{24}(-2u_{j+2}^n+7u_{j+1}^n-7u_{j-1}^n+2u_{j-2}^n)$$

$$-\frac{3}{8}s(u_{j+1}^{(2)}-u_{j-1}^{(2)})-\frac{\omega}{24}(u_{j+2}^n-4u_{j+1}^n+6u_j^n-4u_{j-1}^n+u_{j-2}^n)$$

其中$s=\frac{a\Delta t}{\Delta x}>0$，$\omega$ 为自由参数，试写出一步格式并证明其修正方程为

$$u_t+au_x=-\frac{a\Delta x^3}{24}\left(\frac{\omega}{5}-4s+s^3\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

$$+\frac{a\Delta x^4}{120}(-5\omega+4+15s^2-4s^4)\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\cdots$$

稳定条件为

$$|s|\leqslant 1$$

$$4s^2-s^4\leqslant\omega\leqslant 3$$

5. 用 ADI 法解方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\qquad 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$$

$$u(1,y,t)=u(0,y,t)=100$$

$$u(x,0,t)=u(x,1,t)=100$$

$$u(x,y,0)=0\qquad\qquad (0<x,y<1)$$

计算 $T=1$，2，3，4，10时的 u 值。

6. 求解一圆环内温度的变化，方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u$$

Δu 为 Laplace，算式

$$r=R_1=2\quad u(R_1,\theta,t)=100\sin\theta$$

$$r=r_2=3\quad u(R_2,\theta,t)=10\cos\theta$$

$$u(R,\theta,0)=0$$

求 $t=1$，2，3，5，10，…，∞时的温度分布。

7. 有一矩形域(图 B. 1. 10)，温度为 $u(x,y,0)=0$ $(0\leqslant x\leqslant 50;0\leqslant y\leqslant 100)$。四周绝热，$A$

点温度为100,不变。求 $t=1,2,3,5,10,20,\cdots,\infty$时的温度分布。

8. 有一物体(图 B.1.11)在123698741体内,在(1,4,7)边界处绝热,(1,2,3)与周围介质热交换系数为$28W/(m^2\cdot K)$(3,6,9),(7,8,9)上的热传导系数为$3.5W/(m^2\cdot K)$,物体的比热为$c=40J/(m^3\cdot K)$。周围介质温度为0℃(=273K),物体的初始温度为100℃。试列出该问题的数学模型(方程及边界条件),并用数值方法求解温度场的变化($t=1,2,3,5,10,20,\cdots,\infty$)以及稳定后的温度分布。

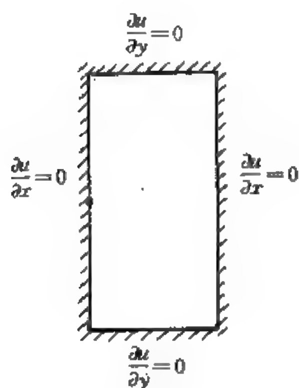


图 B.1.10

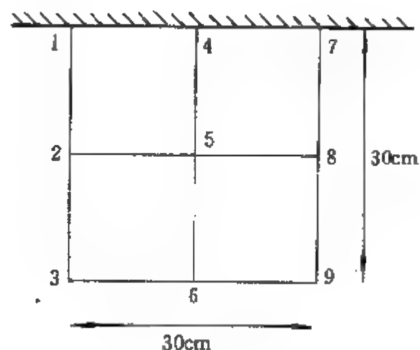


图 B.1.11

第 2 章　偏微分方程常用的几种数值解法

在上一章中详细地讨论了发展方程的有限差分方法，其中包括差分格式的建立，格式稳定性和收敛性的讨论，边界条件和修正方程应用等有关问题。这些都是一切离散化方法均会出现和需要研讨的问题。通过上一章的讨论，读者对这些问题有了一个基本的了解。本章介绍一些常用的离散化方法，这些方法及其进一步的发展均可在流体流动的数值模拟中找到它们的应用。由于篇幅限制，本章只介绍方法的基本部分，它们所涉及到的一些概念，诸如特征线、变分等，在这里只作扼要的介绍，认为读者对此已熟悉。

2.1　双曲型方程的特征线法

在 A 篇关于方程分类的讨论中已经提到，具有完备的实特征的方程为双曲型方程。正如大家已经知道，方程的特征具有一些特殊的性质，利用它们的特殊性质来构造差分格式，这种离散化方法或差分方法叫做特征线法。

2.1.1　特征、特征上的关系

为了便于回顾特征及特征上的关系，首先从考察下面这个简单例子入手。

例 1　试解方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad a>0 \quad \text{常数}\\ &u(x,0)=f(x) \qquad -\infty<x<+\infty\end{aligned}\right\} \tag{B.2.1.1.1}$$

不难看出，满足起始条件的解为

$$u(x,t)=f(x-at) \tag{B.2.1.1.2}$$

在图 B.2.1 中可以看到解的特性，它是一个以速度 a 向右传播的波。利用特征分析方法不难得知该方程的特征线为

$$x-at=\text{const} \tag{B.2.1.1.3}$$

在这些特征线上函数值 u 保持不变，这实际就是特征线上函数 u 应当满足的条件，也称作特征上的关系式或相容条件。另外，这里的起始条件是在 $t=0$ 的直线上给出的。原则上说，给出起始条件的曲线不必须是 $t=0$ 的直线，而是任意的。但如果给起始条件的曲线正好是特征线，这就产生如下的问题：首先，这种情况下起始条件不能随意给，必须满足特征相容条件，比如这里起始条件只能给 $u=$常

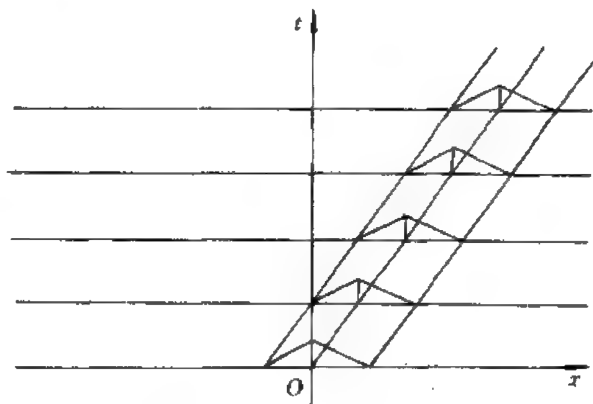


图　B.2.1

数，否则方程不可能有解；其次，即使在特征线上给出满足特征相容条件的起始条件，方程的解仍然是不确定的，因为满足这样条件的解可以有无限多个。如果称给出起始条件求解方程的问题叫柯西问题，那末上面的讨论可以简单地说：在特征线上给柯西问题是不可以的，因为要么无解（起始条件不满足特征相容条件），或者有无限多个解（起始条件满足特征相容条件）。最后还要指出的是在这个例子中，$f(x)$ 只需要是一个连续函数，其导数可以是不连续的，因此解 $u(x, t)$ 在通过特征线时函数的导数可以是不连续的。这种函数本身连续而其导数不连续的点叫弱间断点（以区别函数本身不连续的强间断点）。由上面讨论可以看出特征线可以是弱间断传播线。

综上所述，特征（一维时为特征线）具有如下特性：

（1）特征是波传播的迹；

（2）特征上的解满足特征上的关系式——特征相容条件；

（3）特征上给柯西问题只能导致无解（起始值不满足特征相容条件）或无限多个解（起始值满足特征相容条件）；

（4）特征二侧解的导数可以是间断的，即特征可以是弱间断的传播迹。

下面来讨论不定常一维气体运动的基本方程。

例 2

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}=0\\&\frac{a}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{a}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0\end{aligned}\right\}\tag{B.2.1.1.4}$$

在等熵条件下

$$\frac{a}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{1}{\gamma-1}\frac{a}{T}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{2a}{\gamma-1}\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{\gamma-1}a\right)$$

$$\frac{a}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{\gamma-1}a\right)$$

代入（B.2.1.1.4）可得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2a}{\gamma-1}\right)=0\\&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2a}{\gamma-1}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2a}{\gamma-1}\right)+a\frac{\partial u}{\partial x}=0\end{aligned}\right\}$$

二式相加和相减可得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(u+\frac{2a}{\gamma-1}\right)+(u+a)\frac{\partial}{\partial x}\left(u+\frac{2a}{\gamma-1}\right)=0\\&\frac{\partial}{\partial t}\left(u-\frac{2a}{\gamma-1}\right)+(u-a)\frac{\partial}{\partial x}\left(u-\frac{2a}{\gamma-1}\right)=0\end{aligned}\right\}\tag{B.2.1.1.5}$$

不难看出，

$$\left.\begin{aligned}&\text{沿}\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u+a\quad \text{曲线上}\quad u+\frac{2a}{\gamma-1}=\text{const}\\&\text{沿}\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u-a\quad \text{曲线上}\quad u-\frac{2a}{\gamma-1}=\text{const}\end{aligned}\right\}\tag{B.2.1.1.6}$$

可见$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u+a$ 和$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u-a$ 是二族特征线，$u+\frac{2a}{\gamma-1}=$常数及 $u-\frac{2a}{\gamma-1}=$常数分别为二特征线上的特征相容条件。大家知道$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u+a$ 是声波沿 x 正向传播的迹；$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u-a$ 是声波沿 x 反

向传播的迹。本例和上例的不同在于：上例中特征线是一族确定的直线，而本例中，由于 u，a 是求解过程中确定的，所以特征线的形状事先是未知的，特征线本身由微分方程形式确定。除此以外，特征的性质还是如前所述。

对于一般的一维不定常问题，通过降阶的方法最终可以归结为如下形式的方程：

$$A_t \frac{\partial U}{\partial t} + A_x \frac{\partial U}{\partial x} = F \qquad \text{(B.2.1.1.7)}$$

其中 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}^{\mathrm{T}}$，$A_t$，$A_x$ 为 $m \times m$ 方阵，$F = \{f_1, f_2, \cdots, f_m\}^{\mathrm{T}}$，$m$ 为方程组的阶数。设在 (x, t) 平面的 Γ 曲线上给柯西问题，即在其上给出 U 值。在 Γ 上取一点 P（图 B.2.2），则其邻近的点 Q 上的 U 值，可用台劳展式得到，即

$$U_Q = U_P + \left(\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_P \Delta t + \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_P \Delta x \right) + \cdots$$

当 Δx，Δt 足够小时可略去高阶小量，只要 $\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_P$，$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_P$ 确定后 U_Q 的值就可以确定。由于

图 B.2.2

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

代入（B.2.1.1.7）后可得

$$\left(A_x - A_t \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right) \frac{\partial U}{\partial x} = F - A_t \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(B.2.1.1.8)}$$

这是一个关于 $\frac{\partial U}{\partial x}$ 的线性代数方程组，确定特征的方程为

$$\det \left| A_x - A_t \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right| = 0 \qquad \text{(B.2.1.1.9)}$$

特征上的关系式为

$$\Delta_i = 0 \qquad \text{(B.2.1.1.10)}$$

其中 Δ_i 表示矩阵 $A_x - A_t \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 中第 i 列为 $F - A_t \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$ 这个向量列替换以后得到的矩阵取行列式所得的值。这里 i 可以是 1 到 m 之间的任一数，因为 $\Delta_1 = 0$ 或 $\Delta_2 = 0$ 或……或 $\Delta_m = 0$ 在（B.2.1.1.9）成立的条件下是等价的。

利用上面的方法可以对各种问题进行分析。

例 3 水击问题基本方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/g \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} h \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V & c^2/g \\ 1 & V/g \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} h \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ -\dfrac{f|V|V}{2gA/L} \end{pmatrix} \qquad \text{(B.2.1.1.11)}$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix} V - \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & c^2/g \\ 1 & \dfrac{1}{g}\left(V - \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right) \end{vmatrix} = 0$$

展开得

$$\frac{dx}{dt}=V\mp c \tag{B.2.1.1.12}$$

这里 $c^2=K+\frac{1}{TE}$ 是水击波传播速度。

特征上的关系式为

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} V-\frac{dx}{dt} & V\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{dh}{dt} \\ 1 & -\frac{f|V|V}{2gA/L}-\frac{1}{g}\frac{dV}{dt}\end{vmatrix}=0$$

展开得

$$\mp c\left[\frac{f|V|V}{2gA/L}+\frac{1}{g}\frac{dV}{dt}\right]-\left(V\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{dh}{dt}\right)=0 \tag{B.2.1.1.13}$$

这就是特征上的关系式或特征相容条件。

2.1.2 一维问题的特征线法，黎曼问题

由于解在特征上满足特征相容条件，这个关系可以用来求解方程。

仍以水击问题为例，为简化起见，设 $f=0$ 和 z 为常数，即 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$，于是方程简化为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial h}{\partial t}+V\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{c^2}{g}\frac{\partial V}{\partial x}=0 \\ &\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{V}{g}\frac{\partial V}{\partial x}=0 \end{aligned}\right\} \tag{B.2.1.2.1}$$

特征线方程为

$$\frac{dx}{dt}=V\mp c \tag{B.2.1.2.2}$$

特征相容条件：

$$\mp\frac{c}{g}\frac{dV}{dt}+\frac{dh}{dt}=0$$

由于 c，g 为常数，可积分得

$$\mp\frac{c}{g}V+h=\text{const} \tag{B.2.1.2.3}$$

现设在 $t=0$ 直线上给出 V，h 的分布。在该直线上取离散点 $\cdots i-1$，i，$i+1$，$\cdots$，由于解 V，h 与 x，t 有关，所以特征线的形状事先不能确定。但如果某一点的 V，h 给定后，过这一点的特征线在该点的切向可由 (B.2.1.2.2) 确定，在这一点的小邻域内特征线可由其切线近似代替，利用这种近似方法可以作出 $t=0$ 直线上 $i-1$，i，$i+1$ 点邻近域内的特征线的小段。如由 i 点发出的特征线小段有二条：$\overline{iA}$ 和 $\overline{iB}$，它们的斜率为 $V-c$ 和 $V+c$，即

$$\frac{x_A-x_i}{t_A-t_i}=V_i-c;\quad \frac{x_B-x_i}{t_B-t_i}=V_i+c \tag{B.2.1.2.4}$$

在这二特征线小段上满足

$$\left.\begin{aligned} &\frac{c}{g}V_A-h_A=\frac{c}{g}V_i-h_i \\ &\frac{c}{g}V_B+h_B=\frac{c}{g}V_i+h_i \end{aligned}\right\} \tag{B.2.1.2.5}$$

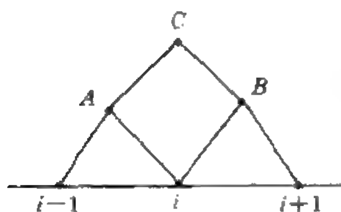


图 B.2.3

类似地从 $i-1$，$i+1$ 点也可以分别作特征线段，与前面的特征线段交于 A、B 点（图 B.2.3），并且由特征相容条件得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{c}{g}V_A+h_A&=\frac{c}{g}V_{i-1}+h_{i-1}\\ \frac{c}{g}V_B-h_B&=\frac{c}{g}V_{i+1}-h_{i+1}\end{aligned}\right\}\qquad(\text{B.2.1.2.6})$$

同时 A，B 的位置由下列方程确定

$$\frac{x_A-x_{i-1}}{t_A-t_{i-1}}=V_{i-1}+c,\quad \frac{x_B-x_{i+1}}{t_B-t_{i+1}}=V_{i+1}-c\qquad(\text{B.2.1.2.7})$$

它与（B.2.2.4）一起可以确定 x_At_A，x_Bt_B 的值。(B.2.1.2.5 和 6) 可确定 $V_Ah_AV_Bh_B$ 的值。利用 A，B 点的值又可以用上述方法确定 c 点的位置和解，这就是特征线法。关于这种所做的详细描述在气体动力学教科书上可以找到（如《气体动力学基础》，科学出版社，1988）这里不作详细讨论。

这里讨论的是用特征线法构成的便于应用的系数矩阵分裂法。

在前面的讨论中，由于 A，B，C…等的点是边求解边确定的，因此位置就可能是歪歪扭扭的。程序的编制将是比较困难的。为此，仍采用有限差分法中将求解域用网格预先划分的办法，待求解的点即网格节点，是事先确定的，如草图所示。这里假定 n 层上各点的函数值 V，h 是已知的，待求的是$n+1$层上各点的函数值。

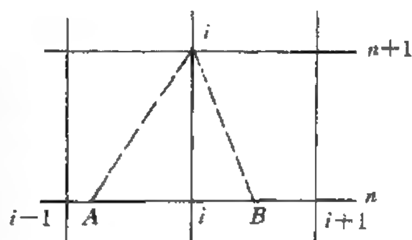


图 B.2.4

如待求点为（i，$n+1$），由该点作二特征线$\overline{iA}$，$\overline{iB}$，它们的斜率为 $V+c$ 及 $V-c$，与 n 层线交于 A，B 点（图 B.2.4），有

$$\frac{x_A-x_i}{t_A-t_i}=V_i+c,\quad \frac{x_B-x_i}{t_B-t_i}=V_i-c$$

因 $t_A-t_i=t_B-t_i=-\Delta t$，故有

$$x_A=x_i-\Delta t(V_i+c),\quad x_B=x_i-\Delta t(V_i-c)\qquad(\text{B.2.1.2.8})$$

根据相容条件有

$$\frac{c}{g}V_A+h_A=\frac{c}{g}V_i^{n+1}+h_i^{n+1},\quad \frac{c}{g}V_B-h_B=\frac{c}{g}V_i^{n+1}-h_i^{n+1}\qquad(\text{B.2.1.2.9})$$

A，B 点的值可插值得到。为确定起见，设 $V_i-c<0$，$V_i+c>0$。于是

$$\left.\begin{aligned}V_A&=V_{i-1}^n+\frac{V_i^n-V_{i-1}^n}{\Delta x}[\Delta x-\Delta t(V_i+c)]\\ V_B&=V_i^n+\frac{V_{i+1}^n-V_i^n}{\Delta x}[-\Delta t(V_i-c)]\\ h_A&=h_{i-1}^n+\frac{h_i^n-h_{i-1}^n}{\Delta x}[\Delta x-\Delta t(V_i+c)]\\ h_B&=h_i^n+\frac{h_{i+1}^n-h_i^n}{\Delta x}[-\Delta t(V_i-c)]\end{aligned}\right\}\qquad(\text{B.2.1.2.10})$$

将它代入（B. 2. 1. 2. 9）整理得

$$\frac{c}{g}\frac{V_i^{n+1}-V_i^n}{\Delta t}+\frac{h_i^{n+1}-h_i^n}{\Delta t}+\frac{c}{g}\frac{V_i^n-V_{i-1}^n}{\Delta x}(V_i^n+c)+\frac{h_i^n-h_{i-1}^n}{\Delta x}(V_i^n+c)=0$$

$$\frac{c}{g}\frac{V_i^{n+1}-V_i^n}{\Delta t}-\frac{h_i^{n+1}-h_i^n}{\Delta t}+\frac{c}{g}\frac{V_{i+1}^n-V_i^n}{\Delta x}(V_i^n-c)-\frac{h_{i+1}^n-h_i^n}{\Delta x}(V_i^n-c)=0$$

二式相加和相减整理后可得

$$\frac{\delta}{\delta t}\begin{pmatrix}h\\V\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(V_i^n+c) & \frac{c}{2g}(V_i^n+c)\\ \frac{g}{2c}(V_i^n+c) & \frac{c}{2}(V_i^n+c)\end{pmatrix}\frac{\delta}{\delta x_-}\begin{pmatrix}h\\V\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(V_i^n-c) & -\frac{c}{2g}(V_i^n-c)\\ -\frac{g}{2c}(V_i^n-c) & \frac{1}{2}(V_i^n-c)\end{pmatrix}\frac{\delta}{\delta x_+}\begin{pmatrix}h\\V\end{pmatrix}=0 \tag{B. 2. 1. 2. 11}$$

其中

$$\frac{\delta(\cdot)}{\delta t}=\frac{(\cdot)^{n+1}-(\cdot)^n}{\Delta t},\quad \frac{\delta(\cdot)}{\delta x_-}=\frac{(\cdot)_i-(\cdot)_{i-1}}{\Delta x}$$

$$\frac{\delta(\cdot)}{\delta x_+}=\frac{(\cdot)_{i+1}-(\cdot)_i}{\Delta x} \tag{B. 2. 1. 2. 12}$$

此外（B. 2. 2. 1）可改写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}h\\V\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}V & \frac{c^2}{g}\\ 1 & \frac{V}{g}\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}h\\V\end{pmatrix}=0 \tag{B. 2. 1. 2. 13}$$

不难验证

$$A\equiv\begin{pmatrix}V & c^2/g\\ 1 & V/g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{g}{c} & -\frac{g}{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V+c & 0\\ 0 & V-c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{c}{2g}\\ \frac{1}{2} & -\frac{c}{2g}\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{记作}}{=\!=}T^{-1}\Lambda T \tag{B. 2. 1. 2. 14}$$

其中 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)=\mathrm{diag}(V+c,V-c)$ （B. 2. 1. 2. 15）

如假定 $V+c>0$，$V-c<0$，则可写为

$$\Lambda=\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1-|\lambda_1|}{2}+\frac{\lambda_1-|\lambda_1|}{2},\frac{\lambda_2+|\lambda_2|}{2}+\frac{\lambda_2-|\lambda_2|}{2}\right)$$

$$=\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1+|\lambda_1|}{2},\frac{\lambda_2+|\lambda_2|}{2}\right)+\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1-|\lambda_1|}{2},\frac{\lambda_2-|\lambda_2|}{2}\right)$$

$$=\Lambda_++\Lambda_-=\mathrm{diag}(V+c,0)+\mathrm{diag}(0,V-c) \tag{B. 2. 1. 2. 16}$$

或代入（B.2.1.2.14）可得

$$A=T^{-1}(A_{+}+A_{-})T=T^{-1}A_{+}T-T^{-1}A_{-}T\xlongequal{\text{记作}}A_{+}+A_{-}\quad\text{(B.2.1.2.17)}$$

验算可知

$$A_{+}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{c}{2g}\\ \frac{g}{2c} & \frac{c}{2}\end{pmatrix}(V+c)\quad A_{-}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{c}{2g}\\ -\frac{g}{2c} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}(V-c)\quad\text{(B.2.1.2.18)}$$

于是（B.2.1.2.11）式可写为

$$\frac{\delta}{\delta t}\begin{pmatrix}h\\ V\end{pmatrix}+(A_{+})_{i}^{n}\frac{\delta}{\delta x_{-}}\begin{pmatrix}h\\ V\end{pmatrix}+(A_{-})_{i}^{n}\frac{\delta}{\delta x_{+}}\begin{pmatrix}h\\ V\end{pmatrix}=0\quad\text{(B.2.1.2.19)}$$

这就是特征分裂后得到的差分格式，A_{+}对应于正特征部分，正特征方向指向下游，所以需要采用上风格式；A_{-}对应负特征部分，负特征方向指向上游，所以要用下风格式。以上推导中假定$V+c>0$，$V-c<0$。事实上这不是必需的。对于$V+c$，$V-c$均>0或均<0的情况都是一样的。

此外，为使计算是稳定的，显然要求A，B点均落在$i-1$，$i+1$点之间，也就是说应当满足

$$\frac{|\lambda|_{\max}\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1\quad\text{(B.2.1.2.20)}$$

这就是（B.2.2.19）的稳定条件。

对于隐式格式，则情况不同了。如设$V+c>0$，$V-c<0$，且$\frac{|V+c|\Delta t}{\Delta x}>1$，$\frac{|V-c|\Delta t}{\Delta x}>1$，这时$A$,$B$的位置如图B.2.5所示。若$A$点值用（$n+1$，$i-1$）及（$n$，$i-1$）二点的插值得到，$B$点值用（$n+1$，$i+1$）及（$n$，$i-1$）二点的插值得到，则不难得到

$$\frac{\delta U}{\delta t}+A_{+}^{n+1}\frac{\delta U^{n+1}}{\delta x_{-}}+A_{-}^{n+1}\frac{\delta U^{n+1}}{\delta x_{+}}=0\quad\text{(B.2.1.2.21)}$$

其中$U=\{h,V\}^{T}$，这时差分格式是无条件稳定的。应该指出，A，B的位置有各种可能，所以差分格式也应当随之而变化。图B.2.6中给出了各种可能位置及其相应的格式。在该图中采用的格式均为无条件稳定的。

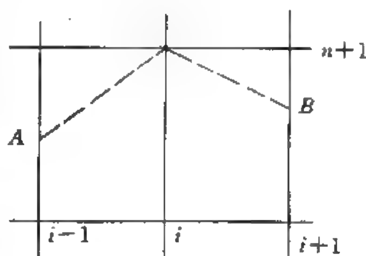


图 B.2.5

此外，以上讨论中右端项为零。在非零右端项时，隐式时取$n+1$层上的值，显式取n层上的值，对稳定性无影响。

下面就边界条件的给法作一简要的讨论。

在A篇中已经指出，如果从边界上出发的特征是指向求解域内的，则应当相应地给出一个边界条件；如果从边界上出发的特征是指向域外，或者说是从域内指向边界的，则相应这一特征不需要给出边界条件。这里所谓的走向是以时间增长方向为正向。图B.2.7中所示的就是边界条件需要的情况。

最后讨论黎曼（Riemann）问题的求解。

黎曼问题即下述方程及其间断起始条件的求解问题：

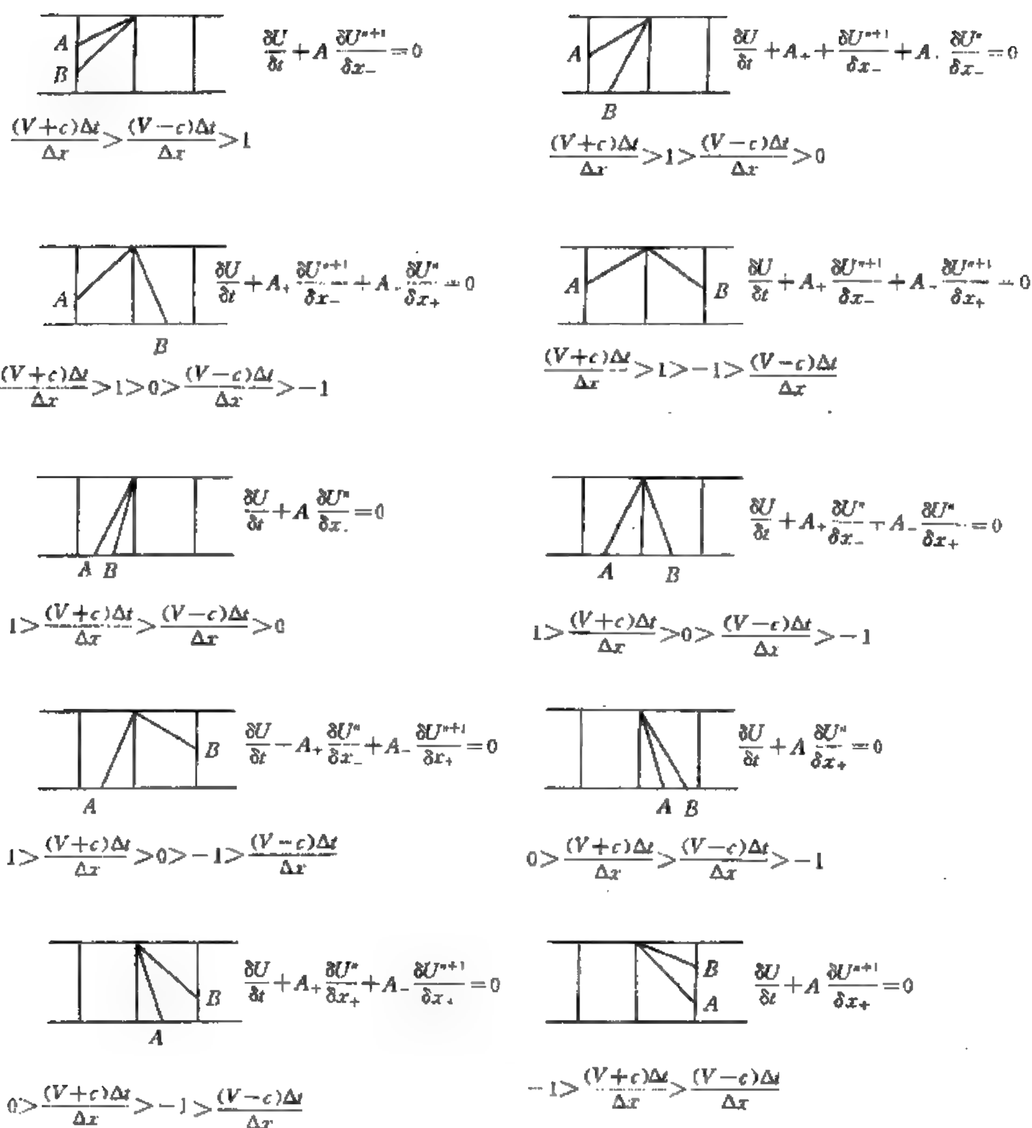


图 B. 2. 6

（其中 A_+ 为与 $V+c$ 对应部分，A_- 为与 $V-c$ 对应部分）

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}=0\\&U(x,0)=\begin{cases}U_L, & x<0\\U_R, & x>0\end{cases}\end{aligned}\right\}\tag{B. 2. 1. 2. 22}$$

其中 U 为 m 阶向量列，A 为 $m\times m$ 常数方阵，U_L 及 U_R 为常数向量列，各有 m 个元素。

首先将（B. 2. 1. 2. 22）式中的方程加以改写。对于双曲型方程，A 可以写成如下形式

$$A=T^{-1}\Lambda T \tag{B. 2. 1. 2. 23}$$

引入 $V=TU$，则有

$$\frac{\partial U}{\partial t}+T^{-1}\Lambda T\frac{\partial U}{\partial x}=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial (TU)}{\partial t}+\Lambda\frac{\partial (TU)}{\partial x}=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial V}{\partial t}+\Lambda\frac{\partial V}{\partial x}=0 \tag{B. 2. 1. 2. 24}$$

其中 $\Lambda=\text{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\}$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}^T$，因此方程可写作

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\lambda_i\frac{\partial v_i}{\partial x}=0\quad(i=1,2,\cdots,m)\tag{B.2.1.2.25}$$

方程的解为 $v_i(x,t)=v_i(x-\lambda_i t,0)$ (B.2.1.2.26)

由于 $V=TU$ (B.2.1.2.27)

故 $U=T^{-1}V$ (B.2.1.2.28)

或 $U(x,0)=T^{-1}V(x,0)$

及 $U(x,t)=T^{-1}V(x,t)$

由于 T^{-1} 是 Λ 矩阵的特征 λ_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 所对应的向量列 t_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 组成的 $m\times m$ 方阵转置后得到的，故

2 个边界条件　　2 个边界条件

1 个边界条件　　1 个边界条件

0 个边界条件　　0 个边界条件

左边界　　右边界

图 B.2.7

$$U(x,t)=T^{-1}(x,t)=\sum_{i=1}^{m}t_iv_i(x,t)=\sum_{i=1}^{m}t_iv_i(x-\lambda_i t,0)\tag{B.2.1.2.29}$$

将上式用于（B.2.1.2.22）中的起始条件，则可写出

$$U_L=\sum_{i=1}^{m}\alpha_it_i,\quad U_R=\sum_{i=1}^{m}\beta_it_i$$

其中 t_i 为特征向量列，且有

$$v_i(x,0)=\begin{cases}\alpha_i, & x<0\\ \beta_i, & x>0\end{cases}\qquad(i=1,2,\cdots,m)$$

由（B.2.1.2.26）式可知

$$v_i(x,t)=v_i(x-\lambda_it,0)=\begin{cases}\alpha_i & x-\lambda_it<0\\ \beta_i & x-\lambda_it>0\end{cases}$$

方程的解则为

$$U(x,t)=\sum_{i=1}^{I}\beta_it_i+\sum_{i=I+1}^{m}\alpha_it_i$$

其中 I 由下确定　　$i\leqslant I$ 时　$x-\lambda_it>0$

$i>I$ 时　$x-\lambda_it<0$

解的结构如图 B.2.8 所示（这里取 $m=3$）。

从图中可以看出，开始是一个间断，以后就形成了 $m+1$ 个不同区域，具有 m 个间断。这里

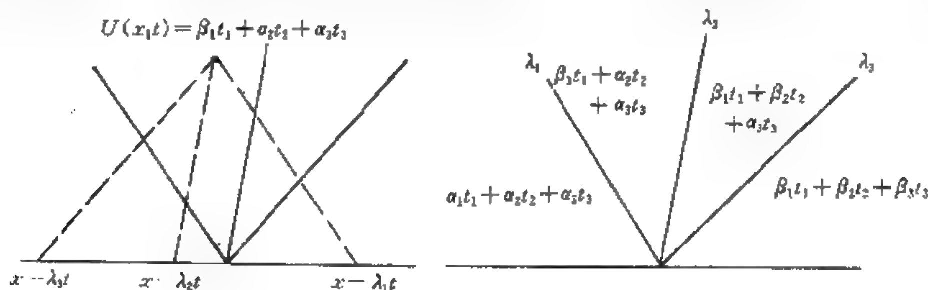


图 B.2.8

讨论的是常系数线性方程，对于变系数乃至非线性方程可以作类似的讨论，并由此可以得到 Godunov 差分格式，详细细节不在此作进一步的讨论，有兴趣的读者可以参考 Holt 的专著《Numerical methods in fluid dynamics》

2.1.3 多维问题的特征分析

将一维问题特征线法推广到多维问题中去之前首先要将多维问题的特征分析进行详细的讨论。

m 维 n 元问题方程的一般形式为

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = F \tag{B.2.1.3.1}$$

其中 $U=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}^{\mathrm{T}}$，$F=\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}^{\mathrm{T}}$，$A_i$ 为 $n\times n$ 方阵，$A_i=\{a_{i_{kl}}\}_{n\times n}$

柯西问题的提法：在 m 维空间中有一 $(m-1)$ 维空间曲面 S，在其上给出 U 的起始值，即

$$U|_S = G \tag{B.2.1.3.2}$$

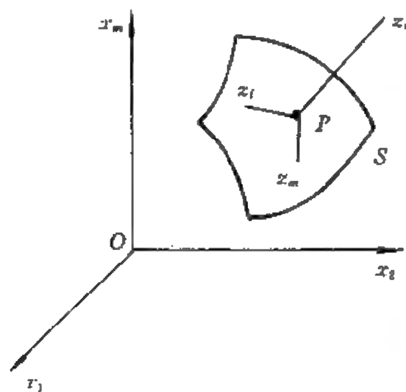


图 B.2.9

当空间曲面 S 为特征时，柯西问题或无解，或有无限多个解。根据这个特点可以用来建立确定特征的特征方程及相应的特征相容条件。

在 S 面上取一点 P（图 B.2.9），设其法向为 $\boldsymbol{n}_\nu$，在 P 上建立一坐标系 $(z_1, z_2, \cdots, z_m)$，其中 z_ν 与 $\boldsymbol{n}_\nu$ 方向一致，其它方向均与 S 面相切。不难看出，坐标系 $(z_1, z_2, \cdots, z_m)$ 可以通过平移和转动由 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 得到。由于平移对这里所讨论的问题无关，所以不妨设 P 即 $(x_1\cdots x_m)$ 坐标系的原点，于是有

$$z_l = n_{l_1}x_1 + n_{l_2}x_2 + \cdots + n_{l_m}x_m = \sum_{i=1}^{m} n_{l_i}x_i \tag{B.2.1.3.3}$$

其中 n_{l_i} 是 z_l 坐标轴方向在 x_i 方向上的方向余弦。

由上式可得

$$\frac{\partial}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial x_l} = \sum_{k=1}^{m} n_{k_l}\frac{\partial}{\partial z_k} \tag{B.2.1.3.4}$$

代入方程（B.2.1.3.1）得

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}{}' A_i n_{k_i}\frac{\partial U}{\partial z_k} = F \tag{B.2.1.3.5}$$

或

$$\sum_{i=1}^{m} A_i n_{\nu_i}\frac{\partial U}{\partial z_\nu} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}{}' A_i n_{k_i}\frac{\partial U}{\partial z_k} = F$$

其中 z_ν 是 S 的法向。对于柯西问题，$\frac{\partial U}{\partial z_k}$ $(k=1, 2, \cdots, m; k\neq\nu)$ 是已知的，$\frac{\partial U}{\partial z_\nu}$是未知的，为确定它的值，上式可以改写为

$$\sum_{i=1}^{m} A_i n_{\nu_i}\frac{\partial U}{\partial z_\nu} = F - \sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m}{}' A_i n_{k_i}\frac{\partial U}{\partial z_k} \tag{B.2.1.3.6}$$

若$\boldsymbol{n}_\nu$方向正与特征方向重合时，$\dfrac{\partial U}{\partial z_\nu}$就可能不确定，即无解或无限解，因此确定特征方向的特征方程为

$$\det\left|\sum_{i=1}^{m} A_i n_{\nu_i}\right| = 0 \tag{B.2.1.3.7}$$

记特征向量为$\boldsymbol{\lambda}$，则

$$\boldsymbol{\lambda} = |\lambda|\boldsymbol{n}_\nu$$

这里$\boldsymbol{n}_\nu$为归一化的。因$\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_m\}^{\mathrm{T}}$，故（B.2.1.3.7）式乘以$|\lambda|$后可得

$$\det\left|\sum_{i=1}^{m} A_i \lambda_i\right| = 0 \tag{B.2.1.3.8}$$

或

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i a_{i,1,1} & \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i a_{i,1,2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i a_{i,1,n} \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i a_{i,2,1} & \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i a_{i,2,2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i a_{i,2,n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i a_{i,n,1} & \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i a_{i,n,2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i a_{i,n,n} \end{vmatrix} = 0 \tag{B.2.1.3.9}$$

引入记号

$$\boldsymbol{a}_{k,l} = \{a_{1,k,l}\quad a_{2,k,l}\cdots a_{m,k,l}\}^{\mathrm{T}} \quad (k, l = 1, 2, \cdots, n) \tag{B.2.1.3.10}$$

特征方程可简写为

$$\det|\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{k,l}|_{n\times n} = 0 \tag{B.2.1.3.11}$$

若特征上的起始条件满足特征相容条件，则柯西问题有无限多个解。从（B.2.3.6）式可知，若用右端列代替左端系数行列式的任一列而得到的行列式的值为零时解可以有无限多个，而这一条件等价为方程系数矩阵加上右端列所构成的增广矩阵的行间线性相关，或者说存在不全为0的$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n\}^{\mathrm{T}}$，使得

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{1,1} + \alpha_2\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{2,1} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{n,1} = 0 \\ &\alpha_1\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{1,2} + \alpha_2\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{2,2} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{n,2} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\alpha_1\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{1,n} + \alpha_2\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{2,n} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{n,n} = 0 \\ &\alpha_1\cdot\left\{F - \sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m} A_i n_{k_i}\frac{\partial U}{\partial z_k}\right\}^{\mathrm{T}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{B.2.1.3.12}$$

或简写为

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\alpha}\cdot\{\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{a}_{k,l}\}_{n\times n}^{\mathrm{T}} = 0 \\ &\boldsymbol{\alpha}\cdot\left\{F - \sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{m} A_i n_{k_i}\frac{\partial U}{\partial z_k}\right\}^{\mathrm{T}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{B.2.1.3.13}$$

上式中第一方程还可以改写为

$$\alpha \cdot \left\{\sum_{i=1}^{m} A_i n_{x_i}\right\} = 0 \quad \text{(B. 2. 1. 3. 14)}$$

它与（B. 2. 1. 3. 13）式中第二方程相减可以得到

$$\alpha \cdot \left\{F - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} A_i n_{x_i} \frac{\partial U}{\partial z_k}\right\}^{\mathrm{T}} = 0$$

（B. 2. 1. 3. 4）式可进一步写为

$$\alpha \cdot \left\{F - \sum_{i=1}^{m} A_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\right\}^{\mathrm{T}} = 0 \quad \text{(B. 2. 1. 3. 15)}$$

这就是特征相容条件。对应一个特征 λ 就有一个相应的 α。对于 n 元问题有 n 个特征，所以应当有 n 个特征相容条件。

上面确定的是特征方向，如果曲面上每一点的法向都与当地的特征方向一致，这一曲面就是特征曲面了。

用上述方法可以分析二维不定常理想完全气体等熵流动方程的特征和特征上的关系式。

基本方程为

$$A_t \frac{\partial U}{\partial t} + A_x \frac{\partial U}{\partial x} + A_y \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{(B. 2. 1. 3. 16)}$$

其中　$U = \{\rho,\ u,\ v,\ p\}^{\mathrm{T}}$

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad A_x = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ -a^2 u & 0 & 0 & u \end{bmatrix},\quad A_y = \begin{bmatrix} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ -a^2 v & 0 & 0 & v \end{bmatrix}$$

(B. 2. 1. 3. 17)

特征方程为

$$\det|\lambda_t A_t + \lambda_x A_x + \lambda_y A_y| = 0 \quad \text{(B. 2. 1. 3. 18)}$$

将（B. 2. 1. 3. 17）代入并展开得

$$d^2[d^2 - a^2(\lambda_x^2 + \lambda_y^2)] = 0 \quad \text{(B. 2. 1. 3. 19)}$$

其中

$$d = \lambda_t + u\lambda_x + v\lambda_y \quad \text{(B. 2. 1. 3. 20)}$$

方程的根为

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \lambda_t + u\lambda_x + v\lambda_y = 0 \\ d_2 &= \lambda_t + u\lambda_x + v\lambda_y = 0 \\ d_3 &= \lambda_t + u\lambda_x + v\lambda_y = a\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} \\ d_4 &= \lambda_t + u\lambda_x + v\lambda_y = -a\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2} \end{aligned}\right\}$$

由于特征向量的长度并不重要，故可设 $\lambda_x^2+\lambda_y^2=1$，或 $\lambda_x=\cos\theta$，$\lambda_y=\sin\theta$，于是四个特征为

$$\left.\begin{aligned} \lambda_t + u\cos\theta + v\sin\theta &= 0 \\ \lambda_t + u\cos\theta + v\sin\theta &= 0 \\ \lambda_t + u\cos\theta + v\sin\theta &= a \\ \lambda_t + u\cos\theta + v\sin\theta &= -a \end{aligned}\right\} \quad \text{(B. 2. 1. 3. 21)}$$

为确定 α，要找出使

$$\lambda_t A_t + \lambda_x A_x + \lambda_y A_y = \begin{bmatrix} d & \rho\lambda_x & \rho\lambda_y & 0 \\ 0 & d & 0 & \lambda_x/\rho \\ 0 & 0 & d & \lambda_y/\rho \\ -a^2 d & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

行间线性相关的系数。不难验证下列 α 与对应的 λ，使相应条件满足：

$$\left.\begin{aligned} &\alpha^{(1)} = (0,\ \lambda_y,\ -\lambda_x,\ 0) \equiv (0,\ \sin\theta,\ -\cos\theta,\ 0) \\ &\alpha^{(2)} = (0,\ 0,\ 0,\ 1) \\ &\alpha^{(3)} = (a^2,\ -\rho a\lambda_x,\ -\rho a\lambda_y,\ 1) \equiv (a^2,\ -\rho a\cos\theta,\ -\rho a\sin\theta,\ 1) \\ &\alpha^{(4)} = (a^2,\ \rho a\lambda_x,\ \rho a\lambda_y,\ 1) \equiv (a^2,\ \rho a\cos\theta,\ \rho a\sin\theta,\ 1) \end{aligned}\right\} \quad \text{(B. 2. 1. 3. 22)}$$

相应的特征相容条件为

$\alpha^{(1)}$对应

$$\sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{(B. 2. 1. 3. 23-1)}$$

$\alpha^{(2)}$对应

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \quad \text{(B. 2. 1. 3. 23-2)}$$

$\alpha^{(3)}$对应

$$\begin{aligned} &a^2\left[\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho(\nabla \cdot \boldsymbol{V})\right] - \rho a\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) \\ &-\rho a\sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \end{aligned} \quad \text{(B. 2. 1. 3. 23-3)}$$

$\alpha^{(4)}$对应

$$\begin{aligned} &a^2\left[\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho(\nabla \cdot \boldsymbol{V})\right] + \rho a\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) \\ &+\rho a\sin\theta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \end{aligned} \quad \text{(B. 2. 1. 3. 23-4)}$$

下面简单讨论一下这些特征的意义。

特征 $d_{1,2}=0$，为 $\lambda_t+u\lambda_x+v\lambda_y=0$ 或 $\boldsymbol{\lambda}\cdot\ \{1,\ u,\ v\}^{\mathrm{T}}=0$，即 $\boldsymbol{\lambda}$ 与向量 $\{1,\ u,\ v\}^{\mathrm{T}}$ 正交，后者是流体轨迹的切向，$\boldsymbol{\lambda}$ 是特征法向，所以轨迹落在特征面上，流面应是特征面。相应的特征相容条件（B. 2. 1. 3. 23. 1-2）即为伯努利方程和熵不变方程。

特征 $d_{3,4}\equiv\boldsymbol{\lambda}\cdot\ \{1,\ u,\ v\}^{\mathrm{T}}=\pm a$ 表示 $\boldsymbol{\lambda}$ 在 $\{1,\ u,\ v\}^{\mathrm{T}}$ 上的投影长为 $a/\sqrt{1+u^2+v^2}$。由图 B. 2. 10 可知 $\boldsymbol{\lambda}$ 向量端点轨迹应是圆柱面和平面的交线，是一椭圆。故与 $\boldsymbol{\lambda}$ 相垂直平面的包络面为一圆锥面。

上述讨论中 θ 为角度，比如可以以 x 方向为起始基准的角度。在 θ 不同时特征上的关系也是变化的。

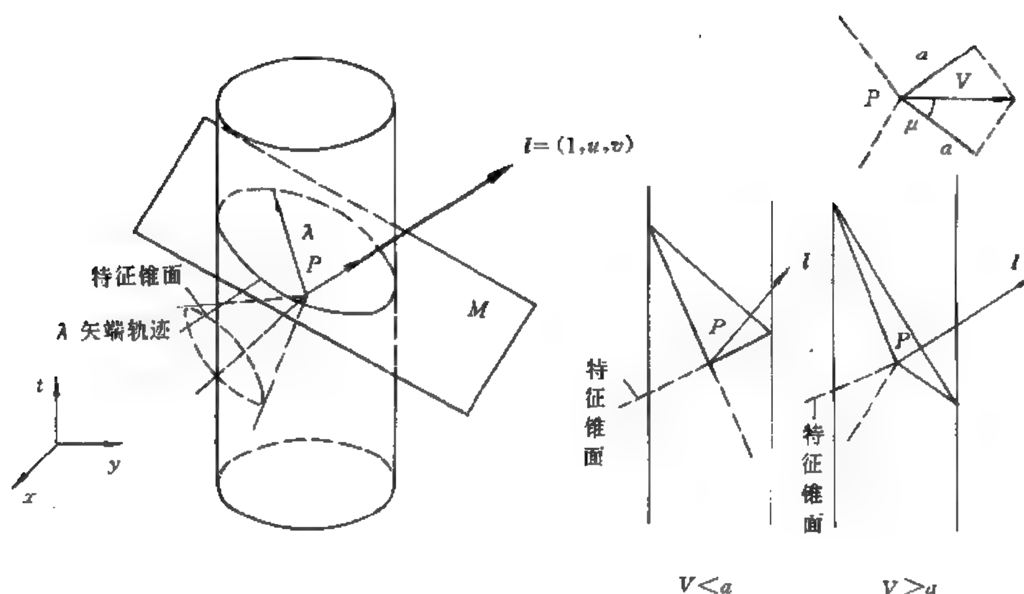


图 B.2.10

2.1.4 特征线法在多维问题中的推广

最简单的推广方法是将系数矩阵分裂法推广到多维问题中去。以二维问题为例，它的一般形式为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}+B\frac{\partial U}{\partial y}=0 \tag{B.2.1.4.1}$$

将 A，B 写为如下形式：

$$A=T^{-1}\Lambda_A T \quad B=S^{-1}\Lambda_B S \tag{B.2.1.4.2}$$

与一维时类似可改写为

$$\left.\begin{aligned}A&=T^{-1}\Lambda_A T=T^{-1}\Lambda_{A+}T+T^{-1}\Lambda_{A-}T=A_{+}+A_{-}\\B&=S^{-1}\Lambda_B S=S^{-1}\Lambda_{B+}S+S^{-1}\Lambda_{B-}T=B_{+}+B_{-}\end{aligned}\right\} \tag{B.2.1.4.3}$$

方程（B.2.4.1）改写为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A_{+}\frac{\partial U}{\partial x}+A_{-}\frac{\partial U}{\partial x}+B_{+}\frac{\partial U}{\partial y}+B_{-}\frac{\partial U}{\partial y}=0 \tag{B.2.1.4.4}$$

相应的差分格式为

$$\frac{\delta U}{\delta t}+A_{+}\frac{\delta U}{\delta x_{-}}+A_{-}\frac{\delta U}{\delta x_{+}}+B_{+}\frac{\delta U}{\delta y_{-}}+B_{-}\frac{\delta U}{\delta y_{+}}=0 \tag{B.2.1.4.5}$$

为便于非线性问题中采用上述方法，人们更愿意采用散度形式的方程，即（B.2.1.4.1）改写为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=0 \tag{B.2.1.4.6}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
F &= AU = A_+ U + A_- U = F_+ + F_- \\
G &= BU = B_+ U + B_- U = G_+ + G_-
\end{aligned}\right\} \tag{B. 2. 1. 4. 7}
$$

代入（B. 2. 4. 6）并得差分格式为

$$
\frac{\delta U}{\delta t} + \frac{\delta F_+}{\delta x_-} + \frac{\delta F_-}{\delta x_+} + \frac{\delta G_+}{\delta y_-} + \frac{\delta G_-}{\delta y_+} = 0 \tag{B. 2. 1. 4. 8}
$$

非线性问题时令

$$
A = \frac{\partial F}{\partial U} \quad B = \frac{\partial G}{\partial U} \tag{B. 2. 1. 4. 9}
$$

要注意 $A_\pm \neq \frac{\partial F_\pm}{\partial U}$；$B_\pm \neq \frac{\partial G_\pm}{\partial U}$。

由于 F，G 是由表示通量的量组成的，所以这种系数分裂法又叫通量分裂法。

在上面讨论中建立差分格式均用一阶格式，事实上也可以用二阶精度方法，如 MacCormack 格式，Beam-Warming 格式等等。Beam-Warming 格式为

$$
\left.\begin{aligned}
U_{jk}^{*} &= U_{jk}^{n} - \Delta t\left(\frac{\delta F_+^n}{\delta x_-} + \frac{\delta F_-^n}{\delta x_+} + \frac{\delta G_+^n}{\delta y_-} + \frac{\delta G_-^n}{\delta y_+}\right) \\
U_{jk}^{**} &= U_{jk}^{*} - \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta F_+^*}{\delta x_-} + \frac{\delta F_+^n}{\delta x_-} + \frac{\delta F_-^*}{\delta x_+} + \frac{\delta F_-^n}{\delta x_+}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\delta G_-^*}{\delta y_-} + \frac{\delta G_+^n}{\delta y_-} + \frac{\delta G_-^*}{\delta y_+} + \frac{\delta G_-^n}{\delta y_+}\right) \\
U_{jk}^{n+1} &= \frac{1}{2}(U_{jk}^{n} + U_{jk}^{**})
\end{aligned}\right\} \tag{B. 2. 1. 4. 10}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\delta(\cdot)^n}{\delta x_-} &= \frac{(\cdot)_j^n - (\cdot)_{j-1}^n}{\Delta x} \quad & \frac{\delta(\cdot)^*}{\delta x_-} &= \frac{2(\cdot)_j^* - 3(\cdot)_{j-1}^* + (\cdot)_{j-2}^*}{\Delta x} \\
\frac{\delta(\cdot)^n}{\delta x_+} &= \frac{(\cdot)_{j+1}^n - (\cdot)_j^n}{\Delta x} \quad & \frac{\delta(\cdot)^*}{\delta x_+} &= \frac{-2(\cdot)_{j+2}^* + 3(\cdot)_{j+1}^* - (\cdot)_j^*}{\Delta x}
\end{aligned}\right\} \tag{B. 2. 1. 4. 11}
$$

分析后不难得知该差分格式具有二阶精度。

2.2 有限单元法

有限单元法是求解椭圆型方程的一种有效的离散化方法，它的特点是对求解域形状没有限制，边界条件处理也相当灵活。近年来，它不仅用于线性问题，而且逐步推广到非线性问题。方程也不限于椭圆型，逐步向抛物型等发展方程推广，从而使本方法在流体力学中逐步得到广泛的应用。

有限单元法的出发点是变分原理和加权余量法。特别是后者在流体力学中应用更加广泛。关于变分原理和加权余量法可以参考 Michlin (1957)，Vainlerg (1956)，Finlayson (1972) 的专著，关于有限元的理论可以参考 Zienkiewicz (1977)，王勖成、邵敏 (1988)，Connor 和 Brebbia (1985)，Strang 和 Fix (1973)，Oden 和 Reddy (1976) 的专著。

2.2.1　变分原理和加权余量法

首先介绍变分原理。

设在垂直平面内取 A，B 二点，有一曲线 $y=f(x)$ 连接这二点（图 B.2.11）。有一小球沿该曲线从 A 到 B 作无摩擦的滑动，从 A 到 B 所需的时间为

$$T=\int_{x_A}^{x_B}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x \qquad \text{(B.2.2.1.1)}$$

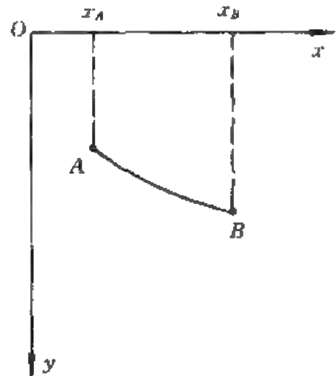


图　B.2.11

显然，当所取的曲线 $f(x)$ 有所变化，则所需的时间 T 也就有所变化，即定积分值 T 依赖函数 $y=f(x)$ 的变化而变化，这种依赖关系叫做泛函。被依赖的函数是一元函数，则泛函的一般形式为

$$I=\int_a^b \Pi(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\mathrm{d}x \qquad \text{(B.2.2.1.2)}$$

其中 Π 为多元函数，$n>0$。如果被依赖函数为多元函数，则泛函一般形式为

$$I=\int_\Omega F\left(x_1,x_2,\cdots,x_m,f,\cdots,\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots\gamma}f}{\partial x_1^\alpha\partial x_2^\beta\cdots\partial x_m^\gamma}\right)\mathrm{d}\Omega \qquad \text{(B.2.2.1.3)}$$

其中 $f=f(x_1,x_2,\cdots x_m)$；$(\alpha,\beta,\cdots\gamma=0,1,2,\cdots)$。

当被依赖的函数 f 作一微小的变化，相应的积分也会有一微小的变化。函数 f 的微小变化不仅指函数值本身变化很小，而且其各阶导数变化也很小。函数本身的这种变化叫做函数的变分，记作 δf。在变化过程中要求函数总是满足边界条件，即 $f+\delta f$ 与 f 满足相同的边界条件。在本节开始的例子中，f 和 $f+\delta f$ 都应当通过 A，B 二个点，也就是说 δf 在 A，B 二点的值为零。应当注意，δf 不是一个数值，而是在域上的一个函数。当函数变化后，积分 I 也会发生变化，这个变化值记作 δI，叫做泛函的变分。泛函的变分是一个值，且有

$$\delta I=I+\delta I-I=\int_\Omega F\left(x_1,x_2,\cdots,x_m,f+\delta f,\cdots,\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots\gamma}(f+\delta f)}{\partial x_1^\alpha\partial x_2^\beta\cdots\partial x_m^\gamma}\right)\mathrm{d}\Omega$$

$$-\int_\Omega F\left(x_1,x_2,\cdots,x_m,f,\cdots,\frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots\gamma}f}{\partial x_1^\alpha\partial x_2^\beta\cdots\partial x_m^\gamma}\right)\mathrm{d}\Omega \qquad \text{(B.2.2.1.4)}$$

在一定条件下选取的函数 f 使泛函 I 取极值。取极值的条件就是泛函变分为零。计算 (B.2.2.1.2) 式中泛函的变分

$$\delta I=\int_a^b \Pi(x,y+\delta y,y'+\delta y',\cdots,y^{(n)}+\delta y^{(n)})\mathrm{d}x$$

$$-\int_a^b \Pi(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\Pi}{\partial y'}\delta y'+\cdots+\frac{\partial\Pi}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)}\right)\mathrm{d}x$$

利用分部积分及考虑到 $\delta y_A=\delta y_B=0$，则有

$$\delta I=\int_a^b\left[\frac{\partial\Pi}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y'}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y''}\right)-\cdots+(-1)^n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y^{(n)}}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x$$

(B.2.2.1.5)

使泛函（B.3.1.2）取极值的条件为 $\delta I=0$，在上述积分中由于 δy 具有任意性，所以积分保持为零的条件是

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y'}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y''}\right)-\cdots+(-1)^n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y^{(n)}}\right)=0 \quad (\text{B.2.2.1.6})$$

这就是说满足（B.2.2.1.6）式条件与使（B.2.2.1.2）中的泛函取极值的条件是一致的。换而言之，求解（B.2.2.1.6）微分方程和选函数 $y(x)$ 使泛函（B.2.2.1.2）取极值是等价的，这就是所谓的变分原理。方程（B.2.2.1.6）式也叫欧拉方程。对本节开始的例子，其欧拉方程为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\right)\right]=0$$

或

$$2yy''=1+y'^2$$

边界条件为

$$y_A=y(x_A);\quad y_B=y(x_B)$$

多元函数也有同样的情况。

设 $u(x,y)$ 是在 Ω 域上定义的函数，Ω 域的边界由 $\partial\Omega_1$ 及 $\partial\Omega_2$ 二部分组成，$u(x,y)$ 的边界条件为

$$u\Big|_{\partial\Omega_1}=f\quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_2}=g \quad (\text{B.2.2.1.7})$$

定义泛函

$$I_{(u)}=\int_\Omega \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\partial\Omega_2} gu\mathrm{d}s \quad (\text{B.2.2.1.8})$$

其中 $\mathrm{d}s$ 为 $\partial\Omega_2$ 边界上的弧元。采用与前相同的方法，并利用格林公式可得

$$\delta I=-\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\partial\Omega_2}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-g\right)\delta u\mathrm{d}s$$

（注意：$\delta u|\partial\Omega_1=0$）。由于 δu 的任意性而可得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (\text{在 }\Omega\text{ 域上})\\&\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega_2}=g \qquad u\Big|_{\partial\Omega_1}=f\end{aligned}\right\} \quad (\text{B.2.2.1.9})$$

这就是与泛函（B.2.2.1.8）取极值等价的微分方程和边界条件

这里有几点需要加以说明：(1) 泛函极值问题和微分方程求解问题只是在一定条件下等价，即要求函数是连续且可导。一般说微分方程对函数的可导性要求高于泛函极值问题；(2) 在给出泛函形式后，一般说都可以找到相应的微分方程，反之给出一个微分方程，并不一定能找到与之对应的泛函极值问题的具体形式。

经典的变分问题都是给出了泛函的具体形式，找出相应的微分方程，求解微分方程可以解决泛函的极值问题。现在正好相反，人们首先试图寻找与微分方程相对应的泛函极值问题的具体形式，然后用数值方法找出满足泛函极值条件的函数，从而得到微分方程的解。基于这种构想的方法就是有限元方法的基本思想。

现在的问题是：由微分方程找相应的泛函比较困难，有时往往还不可能。为此人们采用

了加权余量法。

加权余量法的思想是很简单的。设函数 u 满足方程

$$P(u) = 0 \quad (\text{在}\ \Omega\ \text{域上}) \tag{B.2.2.1.10}$$

和边界条件

$$B(u)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{B.2.2.1.11}$$

其中 $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界。选用 N 个定义在 Ω 域上的线性无关的函数 $\delta W_1, \delta W_2, \cdots, \delta W_N$，构造一个满足边界条件（B.2.2.1.11）的，定义在 Ω 域上的函数 U，使

$$\int_\Omega P(U)\delta W_i \mathrm{d}\Omega = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{B.2.2.1.12}$$

则 U 可视为 u 的近似函数。当 $N\to\infty$ 时有 $U\to u$。但实际构造满足边界条件的 U 往往有困难，所以也可以取不满足边界条件，但满足如下条件的函数：

$$\int_\Omega P(U)\delta W_i \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} B(U)\delta W_i \mathrm{d}\partial\Omega = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{B.2.2.1.13}$$

这更加方便。这里 δW_i 称作权函数。当 N 足够大时，尽管 U 本身不满足微分方程，但是在总体上满足方程，或者说在积分意义上满足微分方程。$P(U)$ 是 U 代入微分方程后得到的余量。当它与许多线性无关的权函数相乘积分均为零时，这个余量就总体上接近于零，若这样的权函数有无限多个，则余量就均匀一致地趋于零，也就是说 $P(U)$ 处处为零，所以 U 就趋近于真解 u，这就是加权余量法的基本思想。不同的权函数对应不同的方法。对于存在变分原理的微分方程，选权函数为函数的变分，则就与变分法一致了；若权函数就是 $P(U)$ 本身，这就是最小二乘法了。若选其它权函数，则可以派生出其它的方法，在这里不多加讨论。

为了说明用变分原理或加权余量法形成有限元法的过程，首先要介绍插值函数。

2.2.2 插值函数与等参元

离散化方法都只在有限多个离散点上求得解的近似值。在有限单元法中人们将求解域划分成许多个单元，单元的形状可以任意，一般地，人们采用三角形或四边形单元。这些单元的顶点即待求解函数值的节点，单元内任意点的函数值则是通过节点值在单元内插值得到。为此需要建立单元内的插值函数。

首先讨论三角形单元内的线性插值函数。

如图 B.2.12 所示，三角形单元三顶点为 1，2，3；在其上的 u 值为 u_1，u_2，u_3。在三角形内的 u 值为

$$u = a + bx + cy \tag{B.2.2.2.1}$$

显然

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= a + bx_1 + cy_1 \\ u_2 &= a + bx_2 + cy_2 \\ u_3 &= a + bx_3 + cy_3 \end{aligned}\right\}$$

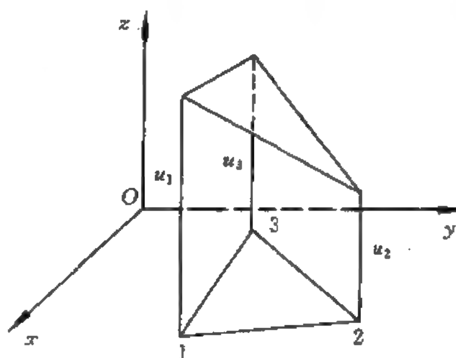


图 B.2.12

求解 a，b，c 并代入（B.2.2.2.1）式可得

$$u = \frac{1}{2S_\triangle}\{u_1[(x_2y_3 - x_3y_2) + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)]$$

$$+ u_2[(x_3y_1 - x_1y_3) + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)]$$

$$+ u_3[(x_1y_2 - x_2y_1) + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)]\} \qquad (B.2.2.2.2)$$

其中

$$2S_\triangle = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{二倍三角形的面积}$$

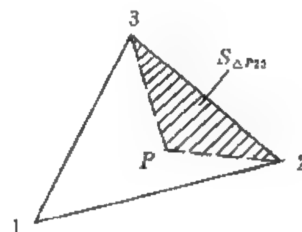


图 B.2.13

又考虑到 P 为三角形内一点（图 B.2.13），有

$$2S_{\triangle P12} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = (x_1y_2 - x_2y_1) + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)$$

$$2S_{\triangle P31} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} = (x_3y_1 - x_1y_3) + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)$$

$$2S_{\triangle P23} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2) + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)$$

将它们代入（B.2.2.2.2）式可得

$$u = \frac{1}{S_\triangle}(u_1S_{\triangle P23} + u_2S_{\triangle P31} + u_3S_{\triangle P12})$$

引入面积坐标

$$\xi_1 = \frac{S_{\triangle P23}}{S_\triangle} \quad \xi_2 = \frac{S_{\triangle P31}}{S_\triangle} \quad \xi_3 = \frac{S_{\triangle P12}}{S_\triangle}$$

则（B.2.2.2.2）式可简写为

$$u = u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 \qquad (B.2.2.2.3)$$

这就是 u 在三角形单元内的插值公式，这里，在 $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ 中只有二个是独立的，它们之间有一约束条件

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$$

插值公式的一般形式写为

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 \qquad (B.2.2.2.4)$$

要求

$$\left.\begin{aligned} & N_i(j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \\ & N_1 + N_2 + N_3 = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (B.2.2.2.5)$$

这里 i 为形函数 N_i 的标号，j 为三角形顶点的标号，δ_{ij}为 Kronecker 记号。在线性插值时 $N_i=\xi_i$。在二次三次或更高次插值函数中，插值点不只为三角形三顶点，还必须在三角形边上选取插值点，插值公式更一般地写为

$$u=\sum_{j=1}^{J}N_j u_j \tag{B.2.2.2.6}$$

如二次插值，则有 6 个插值点（图 B.2.14），形函数为

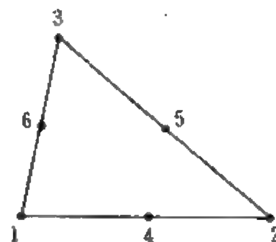


图 B.2.14

$$\left.\begin{aligned} N_1&=\xi_1(2\xi_1-1) & N_4&=4\xi_1\xi_2\\ N_2&=\xi_2(2\xi_2-1) & N_5&=4\xi_2\xi_3\\ N_3&=\xi_3(2\xi_3-1) & N_6&=4\xi_1\xi_3 \end{aligned}\right\} \tag{B.2.2.2.7}$$

为了以后的需要，下面的公式是有用的

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\xi_1}{\partial x}&=\frac{y_2-y_3}{2S_\triangle}, & \frac{\partial\xi_1}{\partial y}&=\frac{x_3-x_2}{2S_\triangle}\\ \frac{\partial\xi_2}{\partial x}&=\frac{y_3-y_1}{2S_\triangle}, & \frac{\partial\xi_2}{\partial y}&=\frac{x_1-x_3}{2S_\triangle}\\ \frac{\partial\xi_3}{\partial x}&=\frac{y_1-y_2}{2S_\triangle}, & \frac{\partial\xi_3}{\partial y}&=\frac{x_2-x_1}{2S_\triangle} \end{aligned}\right\} \tag{B.2.2.2.8}$$

$$I=\int_{S_\triangle}\xi_1^\alpha\xi_2^\beta\xi_3^\gamma\mathrm{d}S=2S_\triangle\cdot\frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!} \tag{B.2.2.2.9}$$

α，β，γ 为非负整数。

下面讨论矩形单元。设单元的边与坐标轴平行，如图 B.2.15 所示。引入变换

$$\xi=\frac{x-\bar{x}}{x_B-x_A},\quad \eta=\frac{y-\bar{y}}{y_B-y_A} \tag{B.2.2.2.10}$$

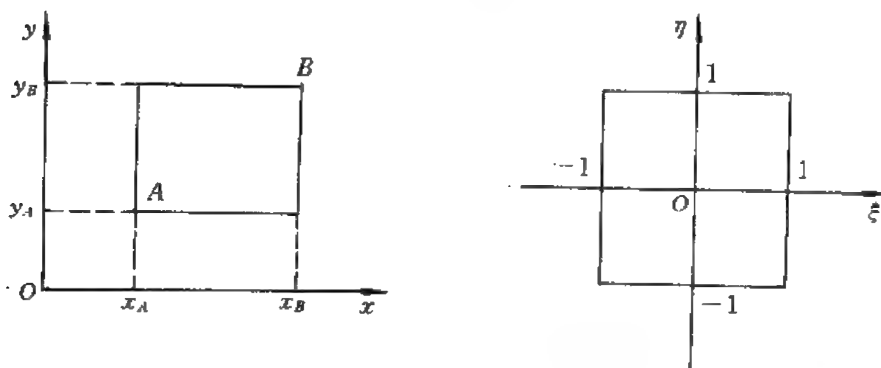


图 B.2.15

其中 $\bar{x}=\frac{1}{2}(x_A+x_B)$，$\bar{y}=\frac{1}{2}(y_A+y_B)$。这一变换将矩形单元变换为 (ξ,η) 平面内的正方形单元。

一阶插值函数为

$$N_i=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)\quad(i=1,2,3,4) \tag{B.2.2.2.11}$$

其中 $\xi_1=\xi_4=-1$；$\xi_2=\xi_3=1$；$\eta_1=\eta_2=-1$；$\eta_3=\eta_4=1$。矩形域内各点的 u 值可由下面公式计

算

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4 \tag{B.2.2.2.12}$$

二阶插值函数为

$$\left.\begin{aligned}
&N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta-1) \quad i=1,2,3,4\\
&N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_5\eta) \quad N_6 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi_6\xi)\\
&N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_7\eta) \quad N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi_8\xi)
\end{aligned}\right\} \tag{B.2.2.2.13}$$

u 为

$$u = \sum_{i=1}^{8} N_i u_i \tag{B.2.2.2.14}$$

这里选用的单元是形状和位置都很规则的，这种单元的通用性很差，一般选用的单元都是不规则四边形。一个最简便的方法是选一变换使四边形变换到 (ξ, η) 平面的正方形上，于是插值函数用 (ξ, η) 表达就可以了。这个变换是很方便的，可以用插值函数来构造。如图 B.2.16 所示。设

$$\left.\begin{aligned}
x &= \sum_{j=1}^{4} N_j x_j\\
y &= \sum_{j=1}^{4} N_j y_j
\end{aligned}\right\} \tag{B.2.2.2.15}$$

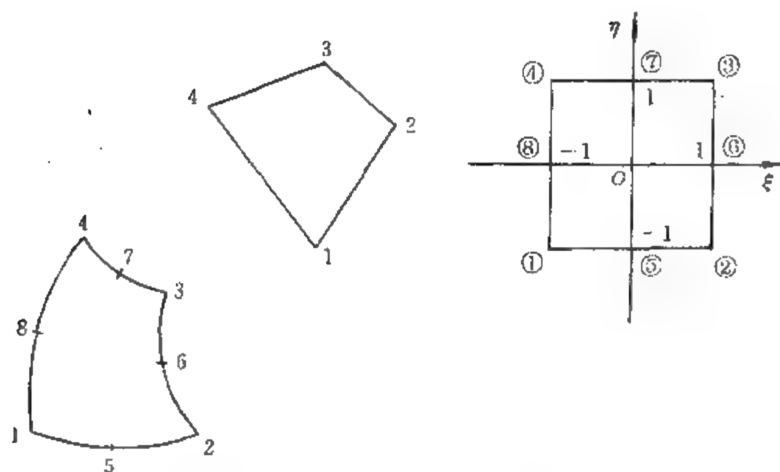


图 B.2.16

$N_1, \cdots, N_4$ 为一阶插值函数，是 ξ，η 的函数，这就是 (x, y) 平面与 (ξ, η) 平面之间的转换关系，它将四边形变换到 (ξ, η) 平面的正方形上去了。而 u 值可由插值公式 (B.2.2.2.12) 计算，这就建立了 u 与 (x, y) 之间的关系了。类似地，对于曲边四边形，则可设

$$x = \sum_{j=1}^{8} N_j x_j \quad y = \sum_{j=1}^{8} N_j y_j \tag{B.2.2.2.16}$$

其中 N_j 为二阶插值函数（见 B. 2. 2. 2. 13）。它将曲边四边形变换为 (ξ, η) 的正方形单元上去了。u 的计算可以用（B. 2. 2. 2. 14）式。

在上面的讨论中看到，对于坐标 x，y 及函数 u 用相同的插值公式，即

$$x=\sum_{j=1}^{J}N_jx_j \quad y=\sum_{j=1}^{J}N_jy_j \quad u=\sum_{j=1}^{J}N_ju_j \tag{B. 2. 2. 2. 17}$$

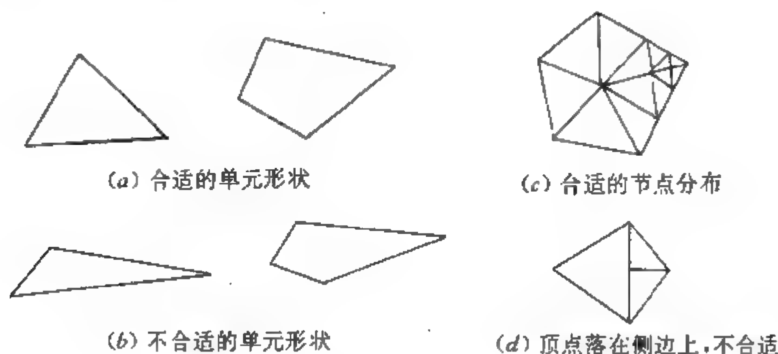
采用同一族形函数 (ξ, η)，这种单元表示法叫做等参元。对于三角形单元也可以这样做，特别是曲边三角形单元时，这种做法就特别方便，请读者自行讨论。

引入等参元后，积分计算也应当从 (x, y) 平面上转换到 ξ，η 平面上来，为此要做变换，即

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=J\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi}; \dfrac{\partial y}{\partial\xi} \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial\eta}; \dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sum\limits_{j=1}^{J}x_j\dfrac{\partial N_j}{\partial\xi}; \sum\limits_{j=1}^{J}y_j\dfrac{\partial N_j}{\partial\xi} \\ \\ \sum\limits_{j=1}^{J}x_j\dfrac{\partial N_j}{\partial\eta}; \sum\limits_{j=1}^{J}y_j\dfrac{\partial N_j}{\partial\eta}\end{vmatrix}$$

最后还有几点需要说明：1）单元的尺度和内角尽可能均称，过分细长或某内角太小的单元都是不可取的；2）节点必须是单元的顶点而不可以是单元边界中间的点。图 B. 2. 17 中表示了上述二点要求。



(a) 合适的单元形状　　(c) 合适的节点分布

(b) 不合适的单元形状　　(d) 顶点落在侧边上，不合适

图 B. 2. 17

2. 2. 3 有限元法

现在来讨论用有限元法建立离散化方程（有限元方程）的过程。对于通过变分原理或加权余量法来建立方程，基本上是类同的。这里首先介绍用变分原理建立有限元方程的过程。

现以下列方程求解为例。

$$\left.\begin{aligned}&\Delta u+f=0 \qquad (x,y)\in\Omega \\ &u\big|_{\partial\Omega_1}=u_0 \\ &\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega_2}=g\end{aligned}\right\} \tag{B. 2. 2. 3. 1}$$

相对应的变分原理为

$$\delta I_{(u)} = 0$$

$$I = \int_{\Omega}\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + fu\right\}\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_2} gu\mathrm{d}\partial\Omega_2 \qquad (\mathrm{B.2.2.3.2})$$

其中 Ω 为求解域，$\partial\Omega_1 + \partial\Omega_2$ 为 Ω 的边界（图 B.2.18）。

现在将求解域 Ω 划分成若干小单元（图 B.2.19）。这里为简单起见，单元均为三角形，边界用线段代替曲线，单元内的插值均为线性。设共有 M 个单元，单元的标号记为 e，在单元内的解 u 可表示为

$$u^{(e)} = \sum_{j=1}^{3} u_j^{(e)} N_j^{(e)} \qquad (\mathrm{B.2.2.3.3})$$

显然这一表达式只在单元内有效。每一个单元有三个顶点，它们在单元内的标号 1，2，3 应当是逆时针方向的。同时每一个节点都有一个在全场内的总序号 l（$l=1$，2，$\cdots N$）。在单元确定以后，必须同时建立总序号与单元节点间的对应关系。

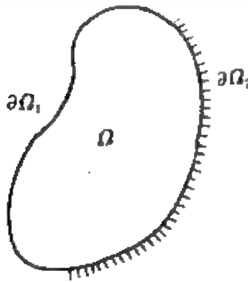


图 B.2.18

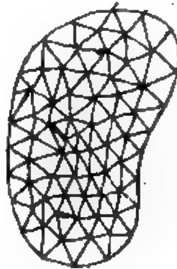


图 B.2.19 单元划分

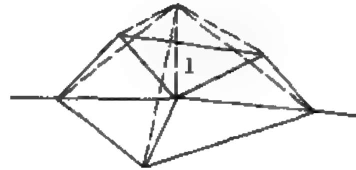


图 B.2.20 测试函数

（B.2.2.3.3）式中只表示单元内的 u 值，不同单元内则用不同的公式。还可以引入另一种表达方式。设 ϕ_l 为测试函数，其中 l 为节点的总序号，如图（B.2.20），在 l 点上 $\phi_l=1$；在与 l 无关的单元上均为零；在包含 l 点的单元中 ϕ_l 与该点所在单元中相应的形函数相同。在测试函数建立之后，全场的 u 可以用统一的公式表示：

$$u = \sum_{l=1}^{N} \phi_l u_l \qquad (\mathrm{B.2.2.3.4})$$

将它代入（B.2.2.3.2）式可得

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\Omega} -\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{l=1}^{N} u_l \frac{\partial \phi_l}{\partial x}\right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{N} u_l \frac{\partial \phi_l}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Omega} f\sum_{l=1}^{N} u_l\phi_l \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_2} g\sum_{l=1}^{N} u_l\phi_l \mathrm{d}\partial\Omega_2 \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} u_l u_k \int_{\Omega}\left(\frac{\partial \phi_l}{\partial x}\frac{\partial \phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \phi_l}{\partial y}\frac{\partial \phi_k}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad + \sum_{l=1}^{N} u_l \int_{\Omega} f\phi_l \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \sum_{l=1}^{N} u_l \int_{\partial\Omega_2} g\phi_l \mathrm{d}\partial\Omega_2 \end{aligned} \qquad (\mathrm{B.2.2.3.5})$$

引入记号

$$
\left.\begin{aligned}
K_{lk} &= \int_{\Omega}\left(\frac{\partial\phi_l}{\partial x}\frac{\partial\phi_k}{\partial x}+\frac{\partial\phi_l}{\partial y}\frac{\partial\phi_k}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
\beta_l &= \int_{\Omega} f\phi_l\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
\gamma_l &= \int_{\partial\Omega_2} g\phi_l\mathrm{d}\partial\Omega_2
\end{aligned}\right\} \tag{B.2.2.3.6}
$$

则（B. 2. 2. 3. 5）式可写作

$$
I(u)=-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}u_l u_k K_{lk}+\sum_{l=1}^{N}u_l\beta_l+\sum_{l=1}^{N}u_l\gamma_l \tag{B.2.2.3.7}
$$

变分原理 $\delta I=0$ 在离散化条件下可写作

$$
\frac{\partial I}{\partial u_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{B.2.2.3.8}
$$

将（B. 2. 2. 3. 7）代入上式可得

$$
-\sum_{l=1}^{N}K_{il}u_l+\beta_i+\gamma_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{B.2.2.3.9}
$$

这就是关于 u_l 的代数方程组，其中系数 K_{il}，常数项 β_i、γ_i 都是积分，事先可以解出，所以 u_l 可以解得。（B. 2. 2. 3. 9）式就是用变分原理建立的有限元方程，这是一个大型的稀疏的代数方程组，可以简写为

$$
KU=L \tag{B.2.2.3.10}
$$

其中 $K=\{K_{il}\}_{N\times N}$，$L=\{\beta_1+\gamma_1;\ \beta_2+\gamma_2;\ \cdots\beta_N+\gamma_N\}^{\mathrm{T}}$

应当说明一点，在 $\partial\Omega_1$ 边界上的点 u 值是已知的，在这些点上的方程（B. 2. 2. 3. 9）式应当用 $u_i=u_{i0}$ 来替代。

至此，原则上讲有限元方程已经建立，它的具体步骤可以归结为

（1）找到与微分方程等价的变分原理，列出泛函积分的具体表达式

（2）将求解域根据需要划分成若干单元，选取单元内的插值函数，从而建立各节点的测试函数；

（3）将解 u 表示为 $u=\sum_{l=1}^{N}u_l\phi_l$ 并代入泛函积分，将积分对于每一个 u_i 求导得到 $\partial I/\partial u_i$ 并令其等于零。这就建立了 N 个方程，它们构成了有限元方程。对于线性方程而言，这种有限元方程是一线性代数方程组，它们的系数是可以事先解得的；

（4）解有限元方程得 u_i，问题得解。

前面已经指出，许多微分方程找不到与它们对应的变分原理，这时需要用加权余量法。这里人们可以注意到，ϕ_l 实际上是一族线性无关的函数系统，因此它可以选作权函数族。此外由于微分方程一般是二阶的，所以积分 $\int P(u)\phi_l\mathrm{d}\Omega$ 直接计算将遇到计算二阶导数的麻烦，为此应当首先对积分利用分部积分和格林公式作降阶处理，然后采用上述同样的步骤建立有限元方程。这里不再重复上述过程。

2.2.4 积分计算及有限元方程的形成

前面已经介绍了有限元方法的全过程。在形成有限元方程时引用了测试函数，这对于方

程的表达是方便的，但实际使用并不方便。下面讨论积分计算及方程形成中的一些具体问题。

积分（B.2.2.3.6）的计算实际上是很不方便的。如果将泛函积分表示为小单元上积分之和，对变量 u_i 的导数只与和 i 点有关的单元上的积分有关。在单元内的积分计算可以用现成的公式来进行，程序设计时就方便多了。下面将讨论具体的作法。

泛函积分

$$I_{(u)}=\int_{\Omega}+\int_{\partial\Omega}=\sum_{e=1}^{M}\left\{\int_{\Omega_e}+\int_{\partial\Omega_e}\right\} \quad \text{(B.2.2.4.1)}$$

图 B.2.21

其中 Ω_e 表示单元域，$\partial\Omega_e$ 为 Ω_e 与边界 $\partial\Omega$ 的公共部分。当单元在域内时，$\partial\Omega_e$ 为空边界，当 Ω_e 与边界相邻时，则 $\partial\Omega_e$ 为 Ω_e 和边界的公共部分，即 $\partial\Omega_e$ 为边界上的一部分（图 B.2.21）。

设 p，q 为单元内节点的标号，在单元内有

$$u^{(e)}=\sum_{p}u_p^{(e)}N_p^{(e)} \quad \text{(B.2.2.4.2)}$$

其中 $\sum\limits_{p}$ 表示单元内各节点之和，如三角形单元，p 从 1 到 3；曲边三角形单元，p 从 1 到 6；四边形单元，p 从 1 到 4；曲边四边形单元，p 从 1 到 8，等等。$N_p^{(e)}$ 为与 p 点对应的形函数。将它代入（B.2.2.3.12），可得

$$I_{(u)}=\sum_{e=1}^{M}\Bigg(-\frac{1}{2}\int_{\Omega_e}\left[\sum_{p}u_p^{(e)}\frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial x}\sum_{q}u_q^{(e)}\frac{\partial N_q^{(e)}}{\partial x}+\sum_{p}u_p^{(e)}\frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial y}\sum_{q}u_q^{(e)}\frac{\partial N_q^{(e)}}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\Omega_e}f\sum_{p}u_p^{(e)}N_p^{(e)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\partial\Omega_e}g\sum_{p}u_p^{(e)}N_p^{(e)}\mathrm{d}\partial\Omega_e\Bigg) \quad \text{(B.2.2.4.3)}$$

在一个单元 Ω_e 内对 $u_p^{(e)}$ 求偏导得

$$-\int_{\Omega_e}\sum_{q}u_q^{(e)}\left(\frac{\partial N_q^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial N_q^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Omega_e}fN_p^{(e)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\partial\Omega_e}gN_p^{(e)}\mathrm{d}\partial\Omega_e$$

(B.2.2.4.4)

记

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial N_q^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial N_q^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial N_p^{(e)}}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=K_{qp}^{(e)}\\&\int_{\Omega_e}fN_p^{(e)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\beta_p^{(e)},\quad \int_{\partial\Omega_e}gN_p^{(e)}\mathrm{d}\partial\Omega_e=\gamma_p^{(e)}\end{aligned}\right\} \quad \text{(B.2.2.4.5)}$$

又设 $l_{p^{(e)}}$，$l_{q^{(e)}}$ 分别为 e 单元中 p 点所对应的全场中的总序号，则可将 $K_{qp}^{(e)}$ 放入 K 矩阵的 $K_{l_{p^{(e)}}l_{q^{(e)}}}$ 元素中去。假定单元有 E 个节点，则 $K_{qp}^{(e)}$ 有 $E\times E$ 个，它们可以分别存入 K 中 $E\times E$ 个相应的元素中去。如对于所有单元（共 M 个）计算一遍并分别存入 K 矩阵中的相应元素，则 K 矩阵就最后生成了。对于（B.2.2.3.10）中 L 列阵也是由类似方法生成，这样有限元方程就最后形成了。

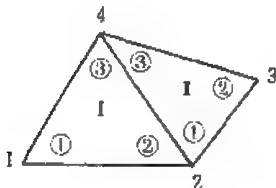


图 B.2.22

为了清楚起见，这里举一个二个单元的例子加以说明，如图 B.2.22 所示。

这里 $E=3$，$M=2$。另外

$$1^{(1)} = 1, \quad 2^{(1)} = 2, \quad 3^{(1)} = 4$$
$$1^{(2)} = 2, \quad 2^{(2)} = 3, \quad 3^{(2)} = 4$$

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} \end{bmatrix}, \qquad K^{(2)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23} \\ K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33} \end{bmatrix}$$

$$L^{(1)} = \begin{Bmatrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \\ L_3^{(1)} \end{Bmatrix}, \qquad L^{(2)} = \begin{Bmatrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ L_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

组合得
$$K = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & & K_{13}^{(2)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{23}^{(1)} + K_{13}^{(2)} \\ & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} + K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(1)} + K_{33}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{Bmatrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} + L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \\ L_3^{(1)} + L_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

在形成以上各种数值时要做大量的积分计算。除有可积公式外，对于无积分公式可寻的积分一般采用高斯积分公式。

一维积分公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i), \quad x_i = \frac{b+a}{2} + \xi_i \frac{b-a}{2} \qquad \text{(B. 2. 2. 4. 6)}$$

推广到多维时为

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_m}^{b_m} f(x_1 x_2 \cdots x_m)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_m$$

$$= \frac{1}{2^m}(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_m - a_m)\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{i_m=1}^{n_m} A_{i_1} A_{i_2}\cdots A_{i_m} f(x_{i_1}, x_{i_2}\cdots x_{i_m})$$

$$x_{i_l} = \frac{b_l + a_l}{2} + \xi_{i_l}\frac{b_l - a_l}{2} \quad (l = 1,2,\cdots,m) \qquad \text{(B. 2. 2. 4. 7)}$$

A_i 为高斯积分系数，表 B. 2. 1 列出了它们的值。

表 B. 2. 1

n	求积节点 $\xi_i^{(n)}$	求积系数 $A_i^{(n)}$	n	求积节点 $\xi_i^{(n)}$	求积系数 $A_i^{(n)}$
2	±0.577 350 269 2	1	5	0	0.568 888 888 9
				±0.538 469 310 1	0.478 628 670 5
3	0	0.888 888 888 9		±0.906 179 845 9	0.236 926 885 1
	±0.774 596 669 2	0.555 555 555 6			
			6	±0.238 619 186 1	0.467 913 934 6
4	±0.339 981 043 6	0.652 145 154 9		±0.661 209 386 5	0.360 761 573 1
	±0.861 136 311 6	0.347 854 845 1		±0.932 469 514 2	0.171 324 492 4

对于变界积分则可分层进行，如

$$\int_0^1\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_0^{\frac{1-\xi}{2}} f(\xi,y)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1-\xi}{4}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{1-\xi_i}{4}f(\xi_i\eta_j)A_iA_j \qquad \text{(B. 2. 2. 4. 8)}$$

在使用等参元时，则 $dxdy$ 要用 $Jd\xi d\eta$ 代替，积分限也要作相应的变化。在被积函数中对于 x，y 的导数要转换为对 ξ，η 的导数，如

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \text{(B. 2. 2. 4. 9)}$$

其中$\frac{\partial \xi}{\partial x}$，$\frac{\partial \xi}{\partial y}$，$\frac{\partial \eta}{\partial x}$，$\frac{\partial \eta}{\partial y}$由下面方法确定：

$$x=\sum_j x_jN_j,\quad y=\sum_j y_jN_j \qquad \text{(B. 2. 2. 4. 10)}$$

故 $$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\sum_j x_j\frac{\partial N_j}{\partial \xi}\quad \frac{\partial x}{\partial \eta}=\sum_j x_j\frac{\partial N_j}{\partial \eta},\quad \frac{\partial y}{\partial \xi}=\sum_j y_j\frac{\partial N_j}{\partial \xi}\quad \frac{\partial y}{\partial \eta}=\sum_j y_j\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \qquad \text{(B. 2. 2. 4. 11)}$$

考虑到

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta \end{aligned}\right\}$$

故有

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial x}{\partial \xi}(d\xi)_x+\frac{\partial x}{\partial \eta}(d\eta)_x \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi}(d\xi)_x+\frac{\partial y}{\partial \eta}(d\eta)_x \end{aligned}\right\},\qquad \left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi}(d\xi)_y+\frac{\partial x}{\partial \eta}(d\eta)_y \\ 0 &= \frac{\partial y}{\partial \xi}(d\xi)_y+\frac{\partial y}{\partial \eta}(d\eta)_y \end{aligned}\right\}$$

于是可得

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{1}{|J|}\frac{\partial y}{\partial \eta}\quad \frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1}{-|J|}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{1}{-|J|}\frac{\partial x}{\partial \eta}\quad \frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{|J|}\frac{\partial x}{\partial \xi}$$

$$|J|=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right| \qquad \text{(B. 2. 2. 4. 12)}$$

由于 x，y 可用（B. 2. 2. 3. 21）表示为 ξ，η 的函数，故 f 可以表示为 ξ，η 的函数。利用上式 $\frac{\partial \xi}{\partial x}$，$\frac{\partial \xi}{\partial y}$，$\frac{\partial \eta}{\partial x}$，$\frac{\partial \eta}{\partial y}$可以表示为 ξ，η 的函数，代入（B. 2. 2. 3. 20）中，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$都可以 ξ，η 表示出来。这样等参元的积分就可以在 ξ，η 平面上进行了。

最后要说明的是边界积分。对于二维问题，边界为曲线，对于三维问题，边界是曲面。先讨论二维问题，一般是这样选单元和边界的交接处，即在交接的边界上某一参数不变，如 η，于是

$$d(\partial\Omega)=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}d\xi$$

$$=\sqrt{\left(\sum_p x_p\frac{\partial N_p}{\partial \xi}\right)^2+\left(\sum_p y_p\frac{\partial N_p}{\partial \xi}\right)^2}d\xi$$

对于三维问题，则交接处为某一参数不变的面，如 ζ，于是

$$d(\partial\Omega) = |(d\boldsymbol{r})_\xi \times (d\boldsymbol{r})_\eta|$$

$$= \left|\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \xi}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \xi}\boldsymbol{e}_z\right) \times \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \eta}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \eta}\boldsymbol{e}_z\right)\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}\, d\xi d\eta$$

$$= S_{d\partial\Omega} d\xi d\eta$$

至此，积分中出现的一些问题大体上都已解决，剩下的问题是求解方程的问题。许多解法可以在线性代数方程求解的教科书以及许多计算机程序库中找到，这里不再细述。

2.2.5 有限体积法

在流体力学中，许多基本方程都可以写作守恒型，因此若将前面讨论的加权余量法中的权数选为 1，则积分为零的要求直接可以推演为单元内物理量守恒的积分型式。比如方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \qquad (B.2.2.5.1)$$

这是欧拉方程的散度型式，乘以权数 1，在域内积分得

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

由于积分域是固定的，后二项可以用散度积分公式化为边界积分，于是有

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega U dxdy + \oint_{\partial\Omega} (F \cdot n_x + G \cdot n_y) d\partial\Omega = 0 \qquad (B.2.2.5.2)$$

若选用单元为一矩形（图 B.2.23），积分在单元内进行，则得

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega U dxdy + (F_2 - F_4)\Delta y + (G_3 - G_1)\Delta x = 0 \qquad (B.2.2.5.3)$$

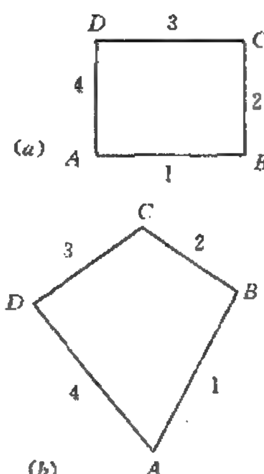


图 B.2.23

其中 F_2、F_4 分别为 F 在 BC，AD 上的平均值；G_3、G_1 是 G 在 AB 和 CD 上的平均值。对于任意形状的四边形区域也可以有

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega U dxdy + F_1(y_B - y_A) + F_2(y_C - y_B) + F_3(y_D - y_C) + F_4(y_A - y_D)$$
$$+ G_1(x_A - x_B) + G_2(x_B - x_C) + G_3(x_C - x_D) + G_4(x_D - x_A) = 0 \qquad (B.2.2.5.4)$$

可以看到，这种计算可以方便地应用于任意形状的单元上而不必引入复杂的形函数。这种方法可以叫做有限体积法。在网格均匀和规则的情况下得到空间为中心差分的差分格式。这种格式存在稳定性问题。如果存在对流项时，应当采用迎风格式，所以人们对有限体积法进一步作迎风处理，其实质与差分方程的讨论是一致的，所以有限体积法对于空间导数项只含耗散项的方程更为合适，如不定常的热传导方程求解用有限体积法是比较有效的。

有限元法在近几十年来有了很大的发展，已成为离散化方法中的一个重要分支，它的理论问题也得以充分的研究。比如精度问题，收敛性问题等等。由于这些问题的分析涉及许多数学问题，这里不作详细介绍。有兴趣的读者可参考有关专著。

2.2.6 边界元法

有限元法由于其有效性和通用性而得到广泛的应用。近年来这一方法又得到进一步的发展，其中之一是边界元法的出现和发展。

边界元法的特点是将问题由三维降为二维或由二维降为一维，从而使计算机的内存大大节省。这样人们可以用容量较小的计算机来解决大型的计算问题。

下面通过泊松方程的求解来说明边界元方法的基本思想和具体作法。

待求解的方程和边界条件为

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta u = f & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega_1} = g_1 & \partial\Omega_1 + \partial\Omega_1 = \partial\Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_2} = g_2 & \partial\Omega \text{为} \Omega \text{的边界}\end{array}\right\} \qquad (B.2.2.6.1)$$

首先给出方程

$$\Delta w = \delta(r|r_0) \qquad (B.2.2.6.2)$$

的基本解为

$$w = \begin{cases}\dfrac{-1}{2\pi}\ln|r - r_0| & \text{二维问题} \\ \dfrac{1}{4\pi|r - r_0|} & \text{三维问题}\end{cases} \qquad (B.2.2.6.3)$$

其中 $\delta(r|r_0)$ 为 Dirac 函数，即 $r=r_0$ 时为无限大，$r\neq r_0$ 时为零，且 $\int_\Omega \delta(r|r_0)\mathrm{d}\Omega = 1$，$r_0$ 为 Ω 域内一固定点 P_0 的矢径，r 为域内任意一点的矢径。下面讨论二维问题，对于三维问题，读者可以用类似方法导出有关公式。

边界元的出发方程

首先将加权余量法应用于（B.2.2.6.1）的求解，权函数就是基本解（B.2.2.6.3），即

$$\int_\Omega w(\Delta u - f)\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega_2}\left(\frac{\partial u}{\partial n} - g_2\right) w\mathrm{d}\partial\Omega_2 + \int_{\partial\Omega_1}(u - g_1)\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}\partial\Omega_1 = 0 \qquad (B.2.2.6.4)$$

利用格林公式

$$\int_\Omega (w\Delta u - u\Delta w)\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega}\left(w\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial w}{\partial n}\right)\mathrm{d}\partial\Omega \qquad (B.2.2.6.5)$$

可得

$$\int_\Omega w\Delta u\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega u\Delta w\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega}\left(w\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial w}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Omega \qquad (B.2.2.6.6)$$

在上述二公式中要求 w 和 u 在 Ω 内均连续和二阶可微。这要求 P_0 (r_0) 在域外，但这种情况人们不感兴趣。若要求 P_0 在域内，则上述的积分域需要减去包围 P_0 点的一个微小的球域 δ_ε，设它的半径为 ε，ε 是一个很小很小的数。另外记 $\Omega-\delta_\varepsilon=\Omega_\varepsilon$，这样有

$$\int_{\Omega_\varepsilon} w\Delta u\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_\varepsilon} u\Delta w\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_\varepsilon}\left(w\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial w}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Omega \qquad (B.2.2.6.7)$$

由于 $\displaystyle\int_\Omega w\Delta u\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_\varepsilon} w\Delta u\mathrm{d}\Omega + \int_{\delta_\varepsilon}\Delta u\cdot w\mathrm{d}\delta_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} w\cdot\Delta u\mathrm{d}\Omega + (\Delta u)_{P_0}\cdot\int_{\delta_\varepsilon} w\mathrm{d}\delta_\varepsilon$

等式右端最后一项在 $\varepsilon\to 0$ 时趋向于零，所以可以略去，因此（B.2.2.6.4）式在利用

(B. 2. 2. 6. 7) 式后可得

$$\int_{\Omega_\epsilon} u\Delta w \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} wf\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_2}\left(w\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n} + g_2 w\right)\mathrm{d}\partial\Omega_2$$

$$+\int_{\partial\Omega_1}\left(w\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial w}{\partial n} + u\frac{\partial w}{\partial n} - g_1\frac{\partial w}{\partial n}\right)\mathrm{d}\partial\Omega_1$$

$$+\int_{\partial\delta_\epsilon}\left(w\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial w}{\partial n}\right)\mathrm{d}\partial\delta_\epsilon = 0 \qquad (B. 2. 2. 6. 8)$$

在 Ω_ϵ 上 $\Delta w=0$，等式左边第一项为零，等式左边最后一项由于 $\epsilon\to0$ 时

$$\int_{\partial\delta_\epsilon}\left(w\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial w}{\partial n}\right)\delta\partial\delta_\epsilon$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(w\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial w}{\partial n}\right)\epsilon\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\ln\epsilon\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)\cdot\epsilon\mathrm{d}\theta + u(P_0)\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi\epsilon}\cdot\epsilon\mathrm{d}\theta$$

$$=u(P_0) \qquad (B. 2. 2. 6. 9)$$

将这一结果代入 (B. 2. 2. 6. 8)，经整理得

$$u(P_0) = \int_\Omega wf\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega_2}\left(u\frac{\partial w}{\partial n} - g_2 w\right)\mathrm{d}\partial\Omega_2 + \int_{\partial\Omega_1}\left(w\frac{\partial u}{\partial n} - g_1\frac{\partial w}{\partial n}\right)\mathrm{d}\partial\Omega_1 \qquad (P_0\in\Omega)$$

(B. 2. 2. 6. 10)

利用这一公式，可以用边界上的解 u 来计算域内任意一点 P_0 的 u 值。

如果 P_0 位于边界上（如图 B. 2. 24 所示），则上述过程是相同的，只是 (B. 2. 2. 6. 9) 式将不等于 $u(P_0)$ 而是 $\frac{\alpha}{2\pi}u(P_0)$，其中 α 是边界点 P_0 处左右二侧切线的夹角，这个夹角是夹 Ω 域的角。如果 P_0 在光滑边界上这个夹角就是 π。当 P_0 在边界上时 (B. 2. 2. 6. 10) 式改变为

$$\frac{\alpha}{2\pi}u(P_0) = \int_\Omega wf\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega_2}\left(u\frac{\partial w}{\partial n} - g_2 w\right)\mathrm{d}\partial\Omega_2$$

$$+\int_{\partial\Omega_1}\left(w\frac{\partial u}{\partial n} - g_1\frac{\partial w}{\partial n}\right)\mathrm{d}\partial\Omega_1$$

$$(P_0\in\partial\Omega) \qquad (B. 2. 2. 6. 11)$$

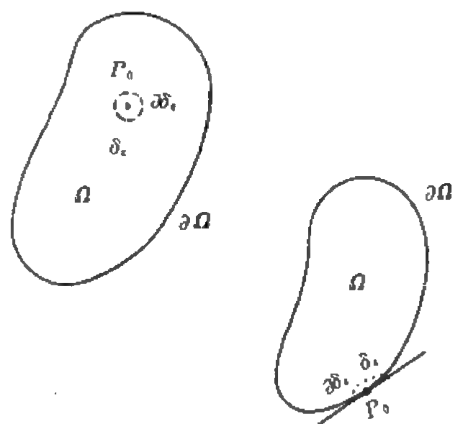


图 B. 2. 24

三维时将以上公式中 2π 改为 4π 即可，故可统一地写作

$$\frac{\alpha}{2m\pi}u(P_0) = \int_\Omega wf\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega}\left(w\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial w}{\partial n}\right)\mathrm{d}\partial\Omega \qquad (B. 2. 2. 6. 12)$$

$$m = \begin{cases}1 & \text{二维}\\ 2 & \text{三维}\end{cases}$$

这就是边界元的出发方程。

边界元离散化方程的形成，原则上讲，在边界元出发方程得到后，其离散化的过程与有限元方法是类似的。

首先将边界分割成小单元（图 B. 2. 25）。二维时边界为曲线，分剖成许多小线段；三维时

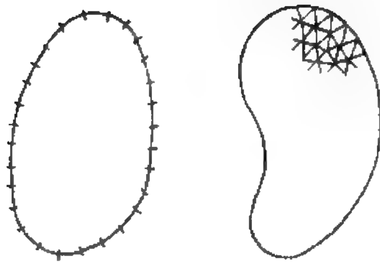


图 B.2.25

边界为曲面，被分割成许多曲面元。所有被分割后得到的单元都可以用等参元的方法建立函数与坐标间的关系。

记 $\partial\Omega_e$ 为边界 $\partial\Omega$ 上的单元，(B.2.2.6.12) 可改写为

$$\frac{\alpha}{2m\pi}u(P_0)=\int_{\Omega}wf\mathrm{d}\Omega+\sum_{e=1}^{E}\int_{\partial\Omega_e}\left(w\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial w}{\partial n}\right)\mathrm{d}\partial\Omega_e \tag{B.2.2.6.13}$$

其中 $w=w\ (\boldsymbol{r}|\boldsymbol{r}_0)$；$P_0$ 的矢径为 $\boldsymbol{r}_0$。在边界元上和以前一样可以定义形函数 $N_j^{(e)}$，(e) 是单元号，j 是单元内的点。二维时单元为线段，在直线段时，将线段二端点 A、B 变换到 ξ 轴的 -1，1 这二个点上，又设

$$N_A=\frac{1}{2}(1-\xi),\quad N_B=\frac{1}{2}(1+\xi) \tag{B.2.2.6.14}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}x&=x_AN_A+x_BN_B\\ y&=y_AN_A+y_BN_B\end{aligned}\right\} \tag{B.2.2.6.15}$$

对于曲线段，则取二端点 A，B 及中点 C 分别变换到 ξ 轴的 -1，1，0 点上，并设

$$N_A=\frac{1}{2}\xi(\xi-1),\quad N_C=1-\xi^2,\quad N_B=\frac{1}{2}\xi(\xi+1) \tag{B.2.2.6.16}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}x&=x_AN_A+x_BN_B+x_CN_C\\ y&=y_AN_A+y_BN_B+y_CN_C\end{aligned}\right\} \tag{B.2.2.6.17}$$

图 B.2.26

对于三维问题，边界单元为三角形时可将它变换为平面上的一个三角形，以面积坐标 $\xi_1\xi_2\xi_3$ 为形函数 $N_1N_2N_3$，于是单元内

$$x=\sum_{i=1}^{3}x_iN_i,\quad y=\sum_{i=1}^{3}y_iN_i,\quad z=\sum_{i=1}^{3}z_iN_i \tag{B.2.2.6.18}$$

单元内函数值为

$$u=\sum_{i=1}^{3}u_iN_i \tag{B.2.2.6.19}$$

在边界元为曲边三角形单元时则用二次插值函数。

在边界元上定义了形函数及插值方式后，则有

$$u^{(e)}=\sum_{j=1}^{J}u_j^{(e)}N_j^{(e)},\quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^{(e)}=\sum_{j=1}^{J}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_j^{(e)}N_j^{(e)} \tag{B.2.2.6.20}$$

其中 $u^{(e)}$ 表示单元内的 u 值，J 是单元节点数。另外，二维时

$$\mathrm{d}\partial\Omega_e=\mathrm{d}l^{(e)}=\sqrt{(\mathrm{d}x^{(e)})^2+(\mathrm{d}y^{(e)})^2}=\sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2\right]^{(e)}}\mathrm{d}\xi=l_{(\xi)}^{(e)}\mathrm{d}\xi \tag{B.2.2.6.21}$$

三维时

$$\mathrm{d}\partial\Omega_e=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\xi^{(e)}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\eta^{(e)}|=\left|\left(\frac{\partial x^{(e)}}{\partial\xi}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial y^{(e)}}{\partial\xi}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial z^{(e)}}{\partial\xi}\boldsymbol{e}_z\right)\times\left(\frac{\partial x^{(e)}}{\partial\eta}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial y^{(e)}}{\partial\eta}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial z^{(e)}}{\partial\eta}\boldsymbol{e}_z\right)\right|$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}-\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2}^{(e)}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

(B. 2. 2. 6. 22)

其中 ξ，η 为面积坐标中的任意二个，而第三个坐标应改写为 $1-\xi-\eta$。这样作不方便，所以直接用 ξ_1，ξ_2，ξ_3。考虑到

$$\frac{\partial y}{\partial\xi}=\frac{\partial y}{\partial\xi_1}-\frac{\partial y}{\partial\xi_3}\quad \frac{\partial y}{\partial\eta}=\frac{\partial y}{\partial\xi_2}-\frac{\partial y}{\partial\xi_3}$$

等等，(B. 2. 2. 6. 22) 可改写为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\partial\Omega_e=\Bigg\{&\left(\frac{\partial y}{\partial\xi_1}\frac{\partial z}{\partial\xi_2}+\frac{\partial y}{\partial\xi_2}\frac{\partial z}{\partial\xi_3}+\frac{\partial y}{\partial\xi_3}\frac{\partial z}{\partial\xi_1}-\frac{\partial y}{\partial\xi_2}\frac{\partial z}{\partial\xi_1}-\frac{\partial y}{\partial\xi_3}\frac{\partial z}{\partial\xi_2}-\frac{\partial y}{\partial\xi_1}\frac{\partial z}{\partial\xi_3}\right)^2\\&+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi_1}\frac{\partial x}{\partial\xi_2}+\frac{\partial z}{\partial\xi_2}\frac{\partial x}{\partial\xi_3}+\frac{\partial z}{\partial\xi_3}\frac{\partial x}{\partial\xi_1}-\frac{\partial z}{\partial\xi_2}\frac{\partial x}{\partial\xi_1}-\frac{\partial z}{\partial\xi_3}\frac{\partial x}{\partial\xi_2}-\frac{\partial z}{\partial\xi_1}\frac{\partial x}{\partial\xi_3}\right)^2\\&+\left(\frac{\partial x}{\partial\xi_1}\frac{\partial y}{\partial\xi_2}+\frac{\partial x}{\partial\xi_2}\frac{\partial y}{\partial\xi_3}+\frac{\partial x}{\partial\xi_3}\frac{\partial y}{\partial\xi_1}-\frac{\partial x}{\partial\xi_2}\frac{\partial y}{\partial\xi_1}-\frac{\partial x}{\partial\xi_3}\frac{\partial y}{\partial\xi_2}-\frac{\partial x}{\partial\xi_1}\frac{\partial y}{\partial\xi_3}\right)^{2(e)}\Bigg\}^{1/2}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\end{aligned}$$

(B. 2. 2. 6. 23)

将 (B. 2. 2. 6. 20，21 或 23) 代入 (B. 2. 2. 6. 13)，则可得

$$\begin{aligned}u_i=\frac{2\pi}{\alpha}\sum_{e=1}^{E}\sum_{j=1}^{J}\Big[&-u_i^{(e)}\int_{-1}^{1}N_j^{(e)}\frac{\partial w(\boldsymbol{r}_j^{(e)}|\boldsymbol{r}_i)}{\partial n}l(\xi)\mathrm{d}\xi\\&+\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_j^{(e)}\int_{-1}^{1}w(\boldsymbol{r}_j^{(e)}|\boldsymbol{r}_i)N_j^{(e)}l(\xi)\mathrm{d}\xi\Big]+\frac{2\pi}{\alpha}\int_{\Omega}w(\boldsymbol{r}_j^{(e)}|\boldsymbol{r}_i)f\mathrm{d}\Omega\end{aligned}\quad (B. 2. 2. 6. 24)$$

其中 i 为边界上的节点，并取 P_0 即为边界上的节点。上式可简写为

$$AU+B\frac{\partial U}{\partial n}+F=U \quad (B. 2. 2. 6. 25)$$

其中 A，B 均为 $N\times N$ 方阵，N 为边界总节点数，A 由 $A_j^{(e)}$ 组合成，

$$A_i=\left\{-\frac{2\pi}{\alpha}\int_{-1}^{1}N_j^{(e)}\frac{\partial w(\boldsymbol{r}_j^{(e)}|\boldsymbol{r}_i)}{\partial n}l(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}_{j=1,2,\cdots,J}$$

$$(i=1,2,\cdots,N) \quad (B. 2. 2. 6. 26)$$

B 由 $B_i^{(e)}$ 组合成

$$B_i^{(e)}=\left\{\frac{2\pi}{\alpha}\int_{-1}^{1}w(\boldsymbol{r}_j^{(e)}|\boldsymbol{r}_i)N_j^{(e)}l(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}_{j=1,2,\cdots,J}$$

$$(i=1,2,\cdots,N) \quad (B. 2. 2. 6. 27)$$

这里有关于 U，$\frac{\partial U}{\partial n}$ 的 $2N$ 个方程，而边界条件代入后可以减少 N 个方程，余下得 N 个方程，求解后可得 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_N\}^{\mathrm{T}}$ 和 $\frac{\partial U}{\partial n}=\left\{\frac{\partial u_1}{\partial n},\ \frac{\partial u_2}{\partial n},\ \cdots,\ \frac{\partial u_N}{\partial n}\right\}^{\mathrm{T}}$。于是解都得到了，要求域内 u 值时用 (B. 2. 2. 6. 10) 式即可。

应当指出边界元在计算积分时需要化费大量计算时间，特别是边界形状比较复杂时更加明显。为此人们还采用边界元和有限元结合的方法，这对于无界域问题的求解特别合适，边界可以人为选择，当然形状越简单越好。这样可以充分发展有限元法的灵活性和边界元法降维功能的优点，使计算尽量做到有效和灵活。

2.3 泊松方程求解的直接方法

有限差分法和有限元法是偏微分方程求解的一般的和行之有效的方法。但是针对一些特殊问题，还可以设计一些特殊的方法，以期达到更高的计算效率或适应特殊的需要。以下几节就是介绍几种方法，它们是针对一些特殊情况设计的。本节介绍泊松方程求解的直接法。

泊松方程是椭圆型方程的一个典型例子，它的求解可以用有限元法。但如果求解域是一个规则的矩形域，边界条件也满足某些特殊的要求，那么生成的差分方程具有一些特殊的性质，利用这些特殊性质，可以构造一些有效的求解方法，它们具有高精度高效率，使方程迅速得解。对于一些问题，如不可压缩粘性流体流动的数值模拟，需要求解大量的泊松方程，提高泊松方程求解速度就是一个极重要的问题。

下面讨论二维情况下泊松问题的求解。方程和边界条件为

$$\left.\begin{array}{l}\Delta u = q \quad (x,y) \in \{0 \leqslant x \leqslant L_x; 0 \leqslant y \leqslant L_y\} \\ \text{边界条件为第一或第二类边界条件}\end{array}\right\} \tag{B.2.3.1}$$

在 x，y 方向对区域作等间距划分，x 方向为 $M+1$ 等分，y 方向为 $N+1$ 等分，于是泊松方程的差分格式可写作

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta y^2} = q_{i,j} \tag{B.2.3.2}$$

或整理为

$$-u_{i-1,j} - \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}u_{i,j-1} + 2\left(1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}\right)u_{i,j} - \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}u_{i,j+1} - u_{i+1,j} = -q_{i,j}\Delta x^2$$

$$(i = 1,2,\cdots,M, j = 1,2,\cdots,N) \tag{B.2.3.3}$$

设沿 $x=0$ 及 $x=L_x$ 上给定第一类边界条件，即

$$u_{0,j} = p_0(y_j) \quad u_{M+1,j} = p_{M+1}(y_j) \tag{B.2.3.4}$$

于是（B.2.3.3）式中 $i=1$，M 这二式可写作

$$-\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}u_{1,j-1} + 2\left(1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}\right)u_{i,j} - \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}u_{1,j+1} - u_{2,j} = -q_{1,j} + p_0(y_j)$$

$$-u_{M-1,j} - \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}u_{M,j-1} + 2\left(1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}\right)u_{M,j} - \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}u_{M,j+1} = -q_{M,j} + p_{M+1}(y_j)$$

于是（B.2.3.3）式写作矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} A & -I & & & \\ -I & A & -I & & \\ & & \ddots & & \\ & & -I & A & -I \\ & & & -I & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{M-1} \\ U_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{M-1} \\ Q_M \end{bmatrix} \tag{B.2.3.5}$$

其中 A 为 $N\times N$ 的三对角阵，I 为 $N\times N$ 的单位阵，$U_i=\{u_{i,1}, u_{i,2}, \cdots, u_{i,N}\}^{\mathrm{T}}$，$Q_i$ 也是由 N 个单元组成的列阵，元素的值与 q 及边界条件情况有关。在 $y=0$ 及 $y=L_y$ 处具有不同边界条件时 A 具有不同形式。统一形式为

$$
A=\begin{bmatrix}
\beta_1 & \gamma & & & k\cdot\alpha \\
\alpha & \beta & \gamma & & \\
& & \ddots & & \\
& & \alpha & \beta & \gamma \\
k\cdot\gamma & & & \alpha & \beta_M
\end{bmatrix}
\quad
\begin{aligned}
&\alpha=\gamma=-\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}\\
&\beta=2\left(1+\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}\right)\\
&\left.\begin{aligned}
&y=0\text{ 处}\quad \text{第一类边界条件时}\quad \beta_1=\beta\\
&\qquad\qquad\ \text{第二类边界条件时}\quad \beta=\alpha+\beta\\
&y=L_y\text{ 处}\quad \text{第一类边界条件时}\quad \beta_M=\beta\\
&\qquad\qquad\ \text{第二类边界条件时}\quad \beta_M=\beta+\gamma
\end{aligned}\right\}\text{同时 } k=0\\
&y\text{ 方向为周期条件时}\quad k=1,\beta_1=\beta_M=\beta
\end{aligned}
\tag{B.2.3.6}
$$

同样地，如果 $x=0$ 或 L_x 处的边界条件为第二类边界条件时，(B.2.3.5) 左端系数矩阵的左上角块矩阵 A 应改为 $A-I$，右下角块矩阵也因 $x-L_x$ 处第二类边界条件改为 $A-I$，而相应的 Q_1，Q_M 要根据边界条件值作相应的修改。系数阵的统一形式为

$$
\begin{bmatrix}
K_1 & -I & & & & \\
-I & A & -I & & & \\
& -I & A & -I & & \\
& & & \ddots & & \\
& & & -I & A & -I \\
& & & & -I & K_2
\end{bmatrix}
\quad
\begin{aligned}
&x=0\text{ 处}\quad \text{第一类边界条件}\quad K_1=A\\
&\qquad\qquad\ \text{第二类边界条件}\quad K_1=A-I\\
&x=L_x\text{ 处}\quad \text{第一类边界条件}\quad K_2=A\\
&\qquad\qquad\ \text{第二类边界条件}\quad K_2=A-I
\end{aligned}
\tag{B.2.3.7}
$$

该系数阵代替 (B.2.3.5) 式中的系数阵后所得的代数方程组在 M 满足一定要求时可以用循环消去法快速求解。

下面介绍循环消去法。求解的方程一般形式为

$$
\begin{bmatrix}
K_1^{(0)} & -B_2 & & & & \\
-B_1 & A^{(0)} & -B_2 & & & \\
& -B_1 & A^{(0)} & -B_2 & & \\
& & & \ddots & & \\
& & & -B_1 & A^{(0)} & -B_2 \\
& & & & -B_1 & K_2^{(0)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \vdots\\ \phi_{N_y-1}\\ \phi_{N_y}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
K_1^{(0)}q_1^{(0)}+p_1^{(0)}\\
A^{(0)}q_2^{(0)}+p_2^{(0)}\\
A^{(0)}q_3^{(0)}+p_3^{(0)}\\
\vdots\\
A^{(0)}q_{N_y-1}^{(0)}+p_{N_y-1}^{(0)}\\
K_2^{(0)}q_{N_y}^{(0)}+p_{N_y}^{(0)}
\end{bmatrix}
\tag{B.2.3.8}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&B_1=b_1I,\quad B_2=b_2I,\quad A^{(0)}=\{a_j,\beta_j,\gamma_j\},\quad b_1\cdot b_2>0\\
&K_1^{(0)}=A^{(0)}-B_1,\quad K_2^{(0)}=A^{(0)}-B_2\\
&q_i^{(0)}=0\qquad i=1,2,\cdots,N_y\\
&p_i^{(0)}=f_i\qquad i=1,2,\cdots,N_y\\
&N_y=\begin{cases}2^{l_y}-1 & ND=1\\ 2^{l_y} & ND=2,3\\ 2^{l_y}+1 & ND=4\end{cases}
\end{aligned}\right\}
\tag{B.2.3.9}
$$

ND 表示边界条件情况

$ND = 1$　$x = 0, L_x$ 处均为第一类边界条件　　$D - D$

$= 2$　$x = 0$ 处第一类，$x = L_x$ 处为第二类边界条件　$D - N$

$= 3$　$x = 0$ 处第二类，$x = L_x$ 处为第一类边界条件　$N - D$

$= 4$　$x = 0, L_x$ 处均为第二类边界条件　　$N - N$

ψ 代替前面的 U。这里先讨论 $ND=4$ 的情况。

循环消去法的做法如下：在（B. 2. 3. 8）式中

第一行乘 $A^{(0)}$，第二行乘 B_2，相加

第 $2m+1$ 行乘 $A^{(0)}$，第 $2m$ 行乘 B_1，第 $2m+2$ 行乘 B_2，相加　　第 $l=1$ 次消去过程

第 N_y 行乘 $A^{(0)}$，第 $N_y - 1$ 行乘 B_1，相加

得

$$\begin{bmatrix} K_1^{(1)} & -B_2^2 & & & & \\ -B_1^2 & A^{(1)} & -B_2^2 & & & \\ & -B_1^2 & A^{(1)} & -B_2^2 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & -B_1^2 & A^{(1)} & -B_2^2 \\ & & & & -B_1^2 & K_2^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_3 \\ \psi_5 \\ \vdots \\ \psi_{N_y-2} \\ \psi_{N_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1^{(1)} q_1^{(1)} + p_1^{(1)} \\ A^{(1)} q_3^{(1)} + p_3^{(1)} \\ A^{(1)} q_5^{(1)} + p_5^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(1)} q_{N_y-2}^{(1)} + p_{N_y-2}^{(1)} \\ K_2^{(1)} q_{N_y}^{(1)} + p_{N_y}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{B. 2. 3. 10}$$

其中

$$K_1^{(1)} = K_1^{(0)} A^{(0)} - B_1 B_2 \qquad K_2^{(1)} = K_2^{(0)} A^{(0)} - B_1 B_2$$

$$A^{(1)} = A^{(0)^2} - 2B_1 B_2$$

$$\begin{aligned} K_1^{(1)} q_1^{(1)} + p_1^{(1)} &= A^{(0)}(K_1^{(0)} q_1^{(0)} + p_1^{(0)}) + B_2(A^{(0)} q_2^{(0)} - P_2^{(0)}) \\ &= K_1^{(0)} A^{(0)} \underbrace{\left[q_1^{(0)} + K_1^{(0)^{-1}}(p_1^{(0)} + B_2 q_2^{(0)})\right]}_{q_1^{(1)}} + B_2 p_2^{(0)} \\ &= K_1^{(1)} q_1^{(1)} + B_2 p_2^{(0)} + B_1 B_2 q_1^{(1)} \end{aligned}$$

$$q_1^{(1)} = q_1^{(0)} + K_1^{(0)^{-1}}(p_1^{(0)} + B_2 q_2^{(0)}) = K_1^{(0)^{-1}} p_1^{(0)}$$

$$p_1^{(1)} = B_2 p_2^{(0)} + B_1 B_2 q_1^{(0)} = B_2 p_2^{(0)} + B_1 B_2 K_1^{(0)^{-1}} p_1^{(0)}$$

$$q_{N_y}^{(1)} = q_{N_y}^{(0)} + K_2^{(0)^{-1}}(p_{N_y}^{(0)} + B_1 q_{N_y-1}^{(0)}) = K_1^{(0)^{-1}} p_1^{(0)}$$

$$p_{N_y}^{(1)} = B_1 p_{N_y-1}^{(0)} + B_1 B_2 q_{N_y}^{(0)} = B_1 p_{N_y-1}^{(0)} + B_1 B_2 K_2^{(0)^{-1}} p_{N_y}^{(0)}$$

$$\begin{aligned} A^{(1)} q_{2m+1}^{(1)} + p_{2m-1}^{(1)} &= A^{(0)}(A^{(0)} q_{2m-1}^{(0)} + p_{2m+1}^{(0)}) + B_1(A^{(0)} q_{2m}^{(0)} + p_{2m}^{(0)}) \\ &\quad + B_2(A^{(0)} q_{2m-2}^{(0)} + p_{2m-2}^{(0)}) \\ &= A^{(0)^2} \underbrace{\left[q_{2m-1}^{(0)} + A^{(0)^{-1}}(p_{2m+1}^{(0)} + B_1 q_{2m}^{(0)} + B_2 q_{2m-2}^{(0)})\right]}_{q_1^{(1)}} \\ &\quad + B_1 p_{2m}^{(0)} + B_2 p_{2m-2}^{(0)} \end{aligned}$$

$$=A^{(0)^2}q_{2m+1}^{(1)}+B_1B_2q_{2m+1}^{(1)}+B_1p_{2m}^{(0)}+B_2p_{2m+2}^{(0)}$$

$$\left\{\begin{aligned} q_{2m+1}^{(1)} &= q_{2m+1}^{(0)}+A^{(0)^{-1}}\left(p_{2m+1}^{(0)}+B_1q_{2m}^{(0)}+B_2q_{2m+2}^{(0)}\right)=A^{(0)^{-1}}p_{2m+1}^{(0)} \\ p_{2m+1}^{(1)} &= B_1p_{2m}^{(0)}+B_2p_{2m+2}^{(0)}+A^{(0)^{-1}}B\cdot B_2p_{2m+1}^{(0)} \\ & m=1,2,\cdots,2^{l_r-1}-1 \end{aligned}\right. \tag{B.2.3.11}$$

类似地，继续作消去法：

第一行乘 $A^{(l-1)}$，原第 $1+2^{l-1}$行乘 $B_2^{2^{l-1}}$，相加

原第 2^lm+1 行乘 $A^{(l-1)}$，原第 $2^lm-2^{l-1}+1$ 行乘 $B_1^{2^{l-1}}$，原第 $2^lm+2^{l-1}+1$ 行乘 $B_2^{2^{l-1}}$ 相加

原第 N_y 行乘 $A^{(l-1)}$，原 N_y-2^{l-1}行乘 $B_1^{2^{l-1}}$ 相加

这里原第几行只表示原行号，而其内容为上次所消后得到的内容。这样可得到

$$\begin{pmatrix} K_1^{(l)} & -B_2^{2^l} & & & & \\ -B_1^{2^l} & A^{(l)} & -B_2^{2^l} & & & \\ & -B_1^{2^l} & A^{(l)} & -B_2^{2^l} & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & -B_1^{2^l} & A^{(l)} & -B_2^{2^l} \\ & & & & -B_1^{2^l} & K_2^{(l)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_{1+2^l} \\ \psi_{1+2\cdot 2^l} \\ \vdots \\ \psi_{N_y-2^l} \\ \psi_{N_y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} K_1^{(l)}q_1^{(l)}+p_1^{(l)} \\ A^{(l)}q_{1+2^l}^{(l)}+p_{1+2^l}^{(l)} \\ A^{(l)}q_{1+2\cdot 2^l}^{(l)}+p_{1+2\cdot 2^l}^{(l)} \\ \vdots \\ A^{(l)}q_{N_y-2^l}^{(l)}+p_{N_y-2^l}^{(l)} \\ K_2^{(l)}q_{N_y}^{(l)}+p_{N_y}^{(l)} \end{pmatrix} \tag{B.2.3.12}$$

其中

$$K_1^{(l)}q_1^{(l)}+p_1^{(l)}=A^{(l-1)}\left(K_1^{(l-1)}q_1^{(l-1)}+p_1^{(l-1)}\right)+B_2^{2^{l-1}}\left(A^{(l-1)}q_{1+2^{l-1}}^{(l-1)}+p_{1+2^{l-1}}^{(l-1)}\right)$$

$$=K_1^{(l-1)}A^{(l-1)}\underbrace{\left[q_1^{(l-1)}+K_1^{(l-1)^{-1}}\left(p_1^{(l-1)}+B_2^{2^{l-1}}q_{1+2^{l-1}}^{(l-1)}\right)\right]}_{q_1^{(l)}}+B_2^{2^{l-1}}p_{1+2^{l}}^{(l-1)}$$

$$=K_1^{(l)}q_1^{(l)}\underbrace{+B_2^{2^{l-1}}p_{1+2^{l-1}}^{(l-1)}+B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}q_1^{(l)}}_{p_1^{(l)}}$$

$$p_1^{(l)}=B_2^{2^{l-1}}p_{1+2^{l-1}}^{(l-1)}+B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}q_1^{(l-1)}$$

$$q_1^{(l)}=q_1^{(l-1)}+K_1^{(l-1)^{-1}}\left(p_1^{(l-1)}+B_2^{2^{l-1}}q_{1+2^{l-1}}^{(l-1)}\right)$$

$$K_1^{(l)}=K_1^{(l-1)}A^{(l-1)}-B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}$$

$$K_2^{(l)}=K_2^{(l-1)}A^{(l-1)}-B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}$$

$$A^{(l)}=A^{(l-1)^2}-2B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}} \tag{B.2.3.13}$$

进一步，将 $q_1^{(l)}$ 代入 $p_1^{(l)}$ 可得

$$p_1^{(l)}=B_2^{2^{l-1}}p_{1+2^{l-1}}^{(l-1)}+B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}q_1^{(l)}$$

$$=B_2^{2^{l-1}}p_{1+2^{l-1}}^{(l-1)}+B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}q_1^{(l-1)}+K_1^{(l-1)^{-1}}\left[B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}p_1^{(l-1)}+B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^l}q_{1+2^{l-1}}^{(l-1)}\right]$$

$$-B_2^{2^{l-1}} p^{(l-1)}_{1+2^{l-1}} \frac{B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}}{B_1^{2^{l-2}}B_2^{2^{l-2}}}\left(p_1^{(l-1)} - B_2^{2^{l-2}} p^{(l-2)}_{1+2^{l-2}}\right) + K_1^{(l-1)^{-1}}\left[B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}p_1^{(l-1)}\right.$$

$$\left.+\frac{B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}}{2B_1^{2^{l-2}}B_2^{2^{l-2}}}\left(p^{(l-1)}_{1+2^{l-1}} - B_1^{2^{l-2}}p^{(l-2)}_{1+2^{l-1}-2^{l-2}} - B_2^{2^{l-2}}p^{(l-2)}_{1+2^{l-1}+2^{l-2}}\right)\right]$$

记 $h=2^{l-2}$，则得

$$p_1^{(l)} = B_1^h B_2^h p_1^{(l-1)} + B_2^{2h} p^{(l-1)}_{1+2h} - B_1^h B_2^{2h} p_h^{(l-2)}$$

$$+K_1^{(l-1)^{-1}}\left[B_1^{2h}B_2^{2h}p_1^{(l-1)} + \frac{1}{2} B_1^h B_2^{3h}\left(p^{(l-1)}_{1+2h} - B_1^h p^{(l-2)}_{1+h} - B_2^h p^{(l-2)}_{1+3h}\right)\right]$$

$$p_{N_y}^{(l)} = B_1^h B_2^h p_{N_y}^{(l-1)} + B_2^{2h} p^{(l-1)}_{N_y-2h} - B_1^{3h}B_2^h p^{(l-2)}_{N_y-h}$$

$$+K_2^{(l-1)^{-1}}\left[B_1^{2h}B_2^{2h}p_{N_y}^{(l-1)} + \frac{1}{2} B_1^{3h}B_2^h\left(p^{(l-1)}_{N_y-2h} - B_1^h p^{(l-2)}_{N_y-h} - B_2^h p^{(l-2)}_{N_y-3h}\right)\right]$$

(B. 2. 3. 14)

或写成递推公式为

$$p_{N_y}^{(l)} = B_1^{2^{l-1}} p^{(l-1)}_{N_y-2^{l-1}} + B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}} q_{N_y}^{(l)}$$

$$q_{N_y}^{(l)} = q_{N_y}^{(l-1)} + K_2^{(l-1)^{-1}}\left(p_{N_y}^{(l-1)} + B_1^{2^{l-1}} q^{(l-1)}_{N_y-2^{l-1}}\right) \quad (l=2,3,\cdots,l_r-1) \qquad \text{(B. 2. 3. 15)}$$

令 $L=1+2^l\cdot m$ （$m=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^{l_r-1}$），则

$$p_L^{(l)} = B_1^{2^{l-1}}p^{(l-1)}_{L-2^{l-1}} + B_2^{2^{l-1}}p^{(l-1)}_{L+2^{l-1}} + 2B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}q_L^{(l)} = B_1^{2^{l-1}}p^{(l-1)}_{L-2^{l-1}} + B_2^{2^{l-1}}p^{(l-1)}_{L+2^{l-1}}$$

$$+2B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}\left[q_L^{(l-1)} + A^{(l-1)^{-1}}\left(p_L^{(l-1)} + B_1^{2^{l-1}}q^{(l-1)}_{L-2^{l-1}} + B_2^{2^{l-1}}q^{(l-1)}_{L+2^{l-1}}\right)\right]$$

$$=B_1^{2^{l-1}}p^{(l-1)}_{L-2^{l-1}} + B_2^{2^{l-1}}p^{(l-1)}_{L+2^{l-1}} + 2B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}\left\{\frac{1}{2B_1^{2^{l-2}}B_2^{2^{l-2}}}\left[p_L^{(l-1)} - B_1^{2^{l-2}}p^{(l-2)}_{L-2^{l-2}}\right.\right.$$

$$\left.-B_2^{2^{l-2}}p^{(l-2)}_{L+2^{l-2}}\right] + A^{(l-1)^{-1}}\left[p_L^{(l-1)} + \frac{B_1^{2^{l-1}}}{2B_1^{2^{l-2}}B_2^{2^{l-2}}}\left(p^{(l-1)}_{L-2^{l-1}} - B_1^{2^{l-2}}p^{(l-2)}_{L-2^{l-1}-2^{l-2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-B_2^{2^{l-2}}p^{(l-2)}_{L-2^{l-1}+2^{l-2}}\right) + \frac{B_2^{2^{l-1}}}{2B_1^{2^{l-2}}B_2^{2^{l-2}}}\left(p^{(l-1)}_{L+2^{l-1}} - B_1^{2^{l-2}}p^{(l-2)}_{L+2^{l-1}-2^{l-2}} - B_2^{2^{l-2}}p^{(l-2)}_{L+2^{l-1}+2^{l-2}}\right)\right]\right\}$$

$$=B_1^{2^{l-2}}B_2^{2^{l-2}}p_L^{(l-1)} - B_1^{2^{l-2}}B_2^{2^{l-1}}p^{(l-2)}_{L+2^{l-2}} + B_2^{2^{l-1}}p^{(l-1)}_{L+2^{l-1}} - B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-2}}p^{(l-2)}_{L-2^{l-2}}$$

$$+B_2^{2^{l-1}}p^{(l-2)}_{L-2^{l-1}} + A^{(l-1)^{-1}}\left\{2B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}p_L^{(l-1)} - B_1^{3\cdot 2^{l-2}}B_2^{2^{l-1}}p^{(l-2)}_{L-2^{l-2}}\right.$$

$$+B_1^{3\cdot 2^{l-2}}B_2^{2^{l-2}}p^{(l-1)}_{L-2^{l-1}} - B_1^{2^l}B_2^{2^{l-2}}p^{(l-2)}_{L-3\cdot 2^{l-2}}$$

$$\left.-B_1^{2^{l-1}}B_2^{3\cdot 2^{l-2}}p^{(l-2)}_{L+2^{l-2}} + B_1^{2^{l-2}}B_2^{3\cdot 2^{l-2}}p^{(l-1)}_{L+2^{l-1}} - B_1^{2^{l-2}}B_2^{2^l}p^{(l-2)}_{L+3\cdot 2^{l-2}}\right\}$$

利用记号 h 可得

$$p_L^{(l)} = B_1^hB_2^hp_L^{(l-1)} - B_1^hB_2^{2h}p^{(l-2)}_{L+h} + B_2^{2h}p^{(l-1)}_{L+2h} - B_1^{2h}B_2^hp^{(l-2)}_{L-h} + B_2^{2h}p^{(l-1)}_{L-2h}$$

$$
+ A^{(l-1)^{-1}}\{2B_1^{2h}B_2^{2h}p_L^{(l-1)} - B_1^{3h}B_2^{2h}p_{L-h}^{(l-2)} + B_1^{3h}B_2^{h}p_{L-2h}^{(l-1)} - B_1^{4h}B_2^{h}p_{L-3h}^{(l-2)}
$$

$$
- B_1^{2h}B_2^{3h}p_{L+h}^{(l-2)} + B_1^{h}B_2^{3h}p_{L+2h}^{(l-1)} - B_1^{h}B_2^{4h}p_{L+3h}^{(l-2)}\} \tag{B.2.3.16}
$$

也可以写出下列递推公式：

$$
\begin{cases}
q_L^{(l)} = q_L^{(l-1)} + A^{(l-1)^{-1}}\left(p_L^{(l-1)} + B_1^{2^{l-1}}q_{L-2^{l-1}}^{(l-1)} + B_2^{2^{l-1}}q_{L+2^{l-1}}^{(l-1)}\right) \\
p_L^{(l)} = 2B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}q_L^{(l)} + B_1^{2^{l-1}}p_{L-2^{l-1}}^{(l-1)} + B_2^{2^{l-1}}p_{L+2^{l-1}}^{(l-1)} \\
\qquad m = 1,2,\cdots,2^{l_r-1} - 1
\end{cases} \tag{B.2.3.17}
$$

当 $l = l_r - 1$ 时得方程

$$
\begin{bmatrix}
K_1^{(l_r-1)} & -B_2^{2^{l_r-1}} & \\
-B_1^{2^{l_r-1}} & A^{(l_r-1)} & -B_2^{2^{l_r-1}} \\
 & -B_1^{2^{l_r-1}} & K_2^{(l_r-1)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\psi_1 \\ \psi_1 + 2^{l_r-1} \\ \psi_{N_y}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
K_1^{(l_r-1)}q_1^{(l_r-1)} + p_1^{(l_r-1)} \\
A^{(l_r-1)}q_{1+2^{l_r-1}}^{(l_r-1)} + p_{1+2^{l_r-1}}^{(l_r-1)} \\
K_2^{(l_r-1)}q_{N_y}^{(l_r-1)} + p_{N_y}^{(l_r-1)}
\end{bmatrix} \tag{B.2.3.18}
$$

进一步消元可得

$$
\begin{bmatrix}
K_1^{(l_r)} & -B_2^{2^{l_r}} \\
-B_1^{2^{l_r}} & K_2^{(l_r)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\psi_1 \\ \psi_{N_y}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
K_1^{(l_r)}q_1^{(l_r)} + p_1^{(l_r)} \\
K_2^{(l_r)}q_{N_y}^{(l_r)} + p_{N_y}^{(l_r)}
\end{bmatrix} \tag{B.2.3.19}
$$

以及

$$
\begin{pmatrix}
K & 0 \\
0 & K
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\psi_1 \\ \psi_{N_y}
\end{pmatrix}
=
\begin{bmatrix}
Kq_1^{(l_r+1)} + p_1^{(l_r+1)} \\
Kq_{N_y}^{(l_r+1)} + p_{N_y}^{(l_r+1)}
\end{bmatrix} \tag{B.2.3.20}
$$

其中

$$
\left.
\begin{aligned}
K &= K_1^{(l_r)}K_2^{(l_r)} - B_1^{2^{l_r}}B_2^{2^{l_r}} \\
q_1^{(l_r+1)} &= q_1^{(l_r)} + K_1^{(l_r)^{-1}}\left(p_1^{(l_r)} + B_2^{2^{l_r}}q_{N_y}^{(l_r)}\right) \\
p_1^{(l_r+1)} &= B_2^{2^{l_r}}p_{N_y}^{(l_r)} + B_1^{2^{l_r}}B_2^{2^{l_r}}q_1^{(l_r+1)}
\end{aligned}
\right\} \tag{B.2.3.21}
$$

或

$$
\begin{aligned}
p_1^{(l_r+1)} &= B_2^{2^{l_r}}p_{N_y}^{(l_r)} + B_1^{2^{l_r}}B_2^{2^{l_r}}q_1^{(l_r+1)} \\
&= B_2^{2^{l_r}}p_{N_y}^{(l_r)} + B_1^{2^{l_r}}B_2^{2^{l_r}}\left[q_1^{(l_r)} + K_1^{(l_r)^{-1}}(p_1^{(l_r)} + B_2^{2^{l_r}}q_{N_y}^{(l_r)})\right]
\end{aligned}
$$

考虑到

$$
q_1^{(l_r)} = \left(p_1^{(l_r)} - B_1^{2^{l_r-1}}p_{1+2^{l_r-1}}^{l_r-1}\right)\Big/B_1^{2^{l_r-1}}B_2^{2^{l_r-1}}
$$

$$
q_{N_y}^{(l_r)} = \left(q_{N_y}^{(l_r)} - B_2^{2^{l_r-1}}p_{N_y-2^{l_r-1}}^{l_r-1}\right)\Big/B_1^{2^{l_r-1}}B_2^{2^{l_r-1}}
$$

可得

$$
\begin{aligned}
p_1^{(l_r+1)} &= B_1^{2^{l_r-1}}B_2^{2^{l_r-1}}p_1^{(l_r)} - B_1^{2^{l_r-1}}B_2^{2^{l_r}}p_{(N_y+1)/2}^{(l_r-1)} + B_2^{2^{l_r}}p_{N_y}^{(l_r)} \\
&\quad + K_1^{(l_r)^{-1}}\left[B_1^{2^{l_r}}B_2^{2^{l_r}}p_1^{(l_r)} - B_1^{2^{l_r}}B_2^{3\cdot 2^{l_r-1}}p_{(N_y+1)/2}^{(l_r-1)} + B_1^{2^{l_r}}B_2^{3\cdot 2^{l_r-1}}p_{N_y}^{(l_r-1)}\right]
\end{aligned}
$$

其中 $1 + 2^{l_r-1} = N_y - 2^{l_r-1} = (N_y+1)/2$，$N_y = 1 + 2^{l_r}$

类似地，$p_{N_y}^{(l_r+1)}=B_1^{2^{l_r-1}}B_2^{2^{l_r-1}}p_{N_y}^{(l_r)}-B_1^{2^{l_r}}B_2^{2^{l_r-1}}p_{(N_y+1)/2}^{(l_r-1)}+B_1^{2^{l_r}}p_1^{(l_r)}$

$$+K_2^{(l_r)^{-1}}\left[B_1^{2^{l_r}}B_2^{2^{l_r}}p_{N_y}^{(l_r)}-B_1^{3\cdot 2^{l_r-1}}B_2^{2^{l_r-1}}p_{(N_y+1)/2}^{(l_r-1)}+B_1^{3\cdot 2^{l_r-1}}B_2^{2^{l_r-1}}p_1^{(l_r-1)}\right]$$

设 $h=2^{l_r-1}$，则得

$$\left.\begin{aligned}p_1^{(l_r+1)}&=B_1^hB_2^hp_1^{(l_r)}-B_1^hB_2^{2h}p_{(N_y+1)/2}^{(l_r-1)}+B_2^{2h}p_{N_y}^{(l_r)}\\&\quad+K_1^{(l_r)^{-1}}\left[B_1^{2h}B_2^{2h}p_1^{(l_r)}-B_1^hB_2^{3h}p_{(N_y+1)/2}^{(l_r-1)}+B_1^hB_2^{3h}p_{N_y}^{(l_r-1)}\right]\\p_{N_y}^{(l_r+1)}&=B_1^hB_2^hp_{N_y}^{(l_r)}-B_1^{2h}B_2^hp_{(N_y+1)/2}^{(l_r-1)}+B_1^{2h}p_1^{(l_r)}\\&\quad+K_2^{(l_r)^{-1}}\left[B_1^{2h}B_2^{2h}p_{N_y}^{(l_r)}-B_1^{3h}B_2^hp_{(N_y+1)/2}^{(l_r-1)}+B_1^{3h}B_2^hp_1^{(l_r-1)}\right]\end{aligned}\right\}\qquad(B.2.3.22)$$

应当注意，$q_i^{(l)}$ 实际上并不需要计算，只需计算 $p_i^{(l)}$ 就可以了。另外由（B.2.3.20）可以开始作返回计算，即

$$\left.\begin{aligned}\psi_1&=q_1^{(l_r+1)}+K^{-1}p_1^{(l_r+1)}\\&=K^{-1}p_1^{(l_r+1)}+\left(p_1^{(l_r)}-B_1^{2^{l_r-1}}p_{(N_y+1)/2}^{(l_r-1)}\right)\Big/B_1^{2^{l_r-1}}B_2^{2^{l_r-1}}\\\psi_{N_y}&=q_{N_y}^{(l_r+1)}K^{-1}p_{N_y}^{(l_r+1)}\\&=+K^{-1}p_{N_y}^{(l_r+1)}+\left(p_{N_y}^{(l_r)}-B_2^{2^{l_r-1}}p_{(N_y+1)/2}^{(l_r-1)}\right)\Big/B_1^{2^{l_r-1}}B_2^{2^{l_r-1}}\end{aligned}\right\}\qquad(B.2.3.23)$$

然后利用（B.2.3.18），（B.2.3.12）可以一步一步进行返回计算，得全部的 ψ 值：

$$\begin{aligned}\psi_L&=A^{(l)^{-1}}\left[p_L^{(l)}+B_1^{2^l}\psi_{L-2^l}+B_2^{2^l}\psi_{L+2^l}\right]\\&\quad+\frac{1}{2B_1^{2^{l-1}}B_2^{2^{l-1}}}\left[p_L^{(l)}-B_1^{2^l}p_{L-2^{l-1}}^{(l-1)}+B_2^{2^l}p_{L+2^{l-1}}^{(l-1)}\right]\qquad(B.2.3.24)\\L&=1+2^l\qquad l=l_r-1,l_r-2,\cdots,1\end{aligned}$$

在计算过程中要大量计算 $A^{(l)}$，B_1^m，K 等矩阵。对于 B_1^m，B_2^m 的计算是方便的，而 $A^{(l)}$，$K^{(l)}$ 的计算可用以下因式分解公式：

$$\left.\begin{aligned}A^{(l)}&=\prod_{k=1}^{2^l}\left(A^{(0)}-2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2^{l+1}}\sqrt{b_1b_2}\cdot I\right)\\&\equiv\prod_{k=1}^{2^l}\left(A^{(0)}-a_k^{(l)}\sqrt{b_1b_2}\cdot I\right)\\K_1^{(l)}&=\prod_{k=1}^{2^l}\left(A^{(0)}-a_{1,k}^{(l)}\sqrt{b_1b_2}\cdot I\right)\\K_2^{(l)}&=\prod_{k=1}^{2^l}\left(A^{(0)}-a_{2,k}^{(l)}\sqrt{b_1b_2}\cdot I\right)\end{aligned}\right\}\qquad(B.2.3.25)$$

而 $a_{i,k}^{(l)}$ 的计算公式为：

已知 $a_{i,k}^{(l-1)}\qquad i=1，2$

由
$$\prod_{k=1}^{2^{l}}(x-a_{i,k}^{(l)})=\prod_{k=1}^{2^{l-1}}(x-a_{i,k}^{(l-1)})\prod_{k=1}^{2^{l-1}}(x-a_{i,k}^{(l-1)})-1 \quad (B.2.3.26)$$

确定 $a_{i,k}^{(l)}$
$$i=1,2$$
$$l=1,2,\cdots,l_r$$

K 可由公式

$$\left.\begin{aligned}K&=\prod_{k=1}^{2^{l_r}+1}\left(A^{(0)}-a_k\sqrt{b_1b_2}\cdot I\right)\\ \prod_{k=1}^{2^{l_r}+1}(x-a_k)&=\prod_{k=1}^{2^{l_r}}(x-a_{1,k}^{(l_r)})\prod_{k=1}^{2^{l_r}}(x-a_{2,k}^{(l_r)})-1\\ a_{i,1}^{(0)}&=b_i\quad(i=1,2)\end{aligned}\right\} \quad (B.2.3.27)$$

计算，其中 a_k 由下式确定：

$$\prod_{k=1}^{2^{l_r}+1}(x-a_k)=\prod_{k=1}^{2^{l_r}}(x-a_{1,k}^{(l_r)})\prod_{k=1}^{2^{l_r}}(x-a_{2,k}^{(l_r)})-1 \quad (B.2.3.28)$$

至此，$ND=4$ 的情况就解决了。对于 $ND=2$，3，情况类似，但是 N_y 应为 2^{l_r}，对于$ND=1$ 的情况，N_y 应为 $2^{l_r}-1$、其它作法是类似的。

在 $b_1=b_2=1$ 时则

$$\left.\begin{aligned}a_{i,k}^{(l)}&=a_k^{(l)}=2\cos\frac{2k-1}{2^{l+1}}\pi,\quad a_1^{(0)}=2\\ a_k&=2\cos\frac{2k-1}{2^{l_r+1}+1}\pi\end{aligned}\right\} \quad (B.2.3.29)$$

根据循环消去法，方程可以直接而非常快地得以求解。$b_1b_2>0$ 时，程序 BTLAQPG 用以实现 $ND=1\sim4$ 的计算，当 $b_1=b_2=1$ 时可以用 POISSX 程序实现。

以上讨论的问题具有第一、二类边界条件，如果方程在一个方向有周期条件，则可以用快速富氏变换（FFT）的方法求解。比如说在 y 方向为周期条件，则可设解 $u(x,y)$具有如下形式：

$$u(x,y)=\sum_{\bar{j}=0}^{N_y-1}\hat{u}_{\bar{j}}(x)e^{\frac{2\pi\bar{j}}{N_y}\frac{y}{\Delta y}\mathrm{i}} \quad (B.2.3.30)$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$。将它代入差分格式（B.2.3.2），并将 q_{ij}也作类似的富氏展式，则有

$$\sum_{\bar{j}=0}^{N_y-1}\left\{\frac{\hat{u}_{\bar{j}}(x_{i-1})-2\hat{u}_{\bar{j}}(x_i)+\hat{u}_{\bar{j}}(x_{i+1})}{\Delta x^2}+\frac{2}{\Delta y^2}\left(\cos\frac{2\pi\bar{j}}{N_y}-1\right)\hat{u}_{\bar{j}}(x_i)\right\}e^{\frac{2\pi\bar{j}j}{N_x}\mathrm{i}}$$
$$=\sum_{\bar{j}=0}^{N_y-1}\hat{q}_{\bar{j}}(x_i)e^{\frac{2\pi\bar{j}j}{N_x}\mathrm{i}}\quad(i=1,2,\cdots,N_x-1;\ j=1,2,\cdots,N_y) \quad (B.2.3.31)$$

比较系数得

$$\frac{\hat{u}_j(x_{i-1})-2\hat{u}_j(x_i)+\hat{u}_j(x_{i+1})}{\Delta x^2}+\frac{2}{\Delta y^2}\left(\cos\frac{2\pi\bar{j}}{N_y}-i\right)\hat{u}_{\bar{j}}(x_i)=\hat{q}_{\bar{j}}(x_i)$$
$$(i=1,2,\cdots,N_x-1;\ \bar{j}=1,2,\cdots,N_y) \quad (B.2.3.32)$$

在给出 $x=0$，$x=L_x$ 二端边界条件后，(B.2.3.32) 就构成了 N_x-1 个 N_y 阶的三对角线性代数方程组。它们可以解得 $\hat{u}_{\bar{j}}(x_i)$，代入（B.2.3.30）后即可得 $u(x,y)$。由于 FFT 的计算效率很高，故这一方法可以快速求解泊松方程。

顺便指出，如果 y 方向不是周期条件，但都是齐次第二类边界条件，则可以将解表示为

$$u(x,y)=\sum_{j=0}^{N_y-1}\hat{u}_j(x)\cos\frac{\pi y_j}{L_y} \tag{B.2.3.33}$$

也可以类似地代入差分格式，得到方程组

$$\frac{\hat{u}_j(x_{i-1})-2\hat{u}_j(x_i)+\hat{u}_j(x_{i+1})}{\Delta x^2}+\frac{2}{\Delta y^2}\hat{u}_j(x_i)\cos\frac{\pi j}{N}=\hat{q}_j(x_i) \tag{B.2.3.34}$$

求解后得 $\hat{u}_j(x_i)$，代入(B.2.3.33)后得 $u(x,y)$。直接计算（B.2.3.33）式时计算比较繁，效率不高，但改变系数次序后可用 FFT 计算，效率大为提高，所以这样做计算速度仍是很高的。次序改变的具体做法可参考苏铭德（1992）论文附录 E。

2.4 对流扩散方程的有限解析法

有限解析法是由陈景仁于 1981 年提出的一种数值方法，对于解对流扩散型方程有较好的效果。该格式具有迎风性，并有希望与奇异摄动法配合解决高雷诺数问题。

本方法的基本思想是：方程在整个求解域内一般难以找到解析解，但在局部区域内，当区域足够小，域内方程可由一常系数方程逼近时，可以近似地找到精确解，由此建立该解的中心点值和周围节点值的关系，即离散化方程。对每一个小区域都建立这样的关系，就得到一个大型代数方程组，求解后即可得方程的数值解。

下面具体讨论该方法的过程。

设图 B.2.27 中所示的单元的边界点为 NW，NC，NE，WC，EC，SW，SC，SE，中心点为 P，在单元内函数 φ 满足方程

$$\varphi_{xx}+C\varphi_{yy}-2A\varphi_x-2BC\varphi_y=f \tag{B.2.4.1}$$

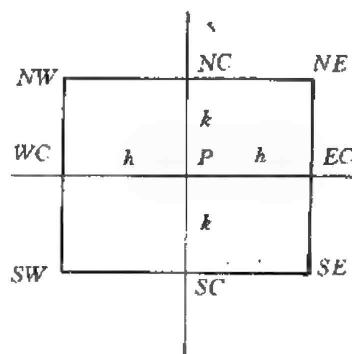
其中 $C>0$，A，B，C，f 均为常数。

引入

$$\varphi=\varphi_0-\frac{Ax+By}{2(A^2+B^2C)}f \tag{B.2.4.2}$$

代入原方程得齐次方程

$$\varphi_{0xx}+C\varphi_{0yy}-2A\varphi_{0x}-2BC\varphi_{0y}=0 \tag{B.2.4.3}$$



$2h=\Delta x, 2k=\Delta y$

图 B.2.27

边界点 nb（即 NW，NC，…等 8 个边界点）上的函数值为

$$\varphi_{nb}=\varphi_{0nb}-\left[\frac{Ax+By}{2(A^2+B^2C)}f\right]_{nb} \tag{B.2.4.4}$$

故边界上 φ_{0nb} 也是可以由 φ_{nb} 值确定的。为方便起见，这里暂只讨论齐次方程的求解。即设(B.2.4.1) 式中 $f=0$。

现在假定单元的边界点 nb（NW，NC，…等）上的函数值 φ_{nb} 已知，在边界之间的边界上的函数值 φ 由线性函数和指数函数组合成的函数来代替，比如在 N 边界上（NW-NC-NE），

$$\varphi^N=a_0^N+a_1^N x+a_2^N(e^{2Ax}-1)$$

于是

$$\varphi^N|_{x=-h}=\varphi_{NW}=a_0^N-a_1^N h+a_2^N(e^{-2Ah}-1)$$

$$\varphi^N|_{x=0}=\varphi_{NC}=a_0^N$$

$$\varphi^N|_{x=h}=\varphi_{NE}=a_0^N+a_1^N h+a_2^N(e^{2Ah}-1)$$

由上解得

$$a_0^N = \varphi_{NC}$$

$$a_1^N = \frac{1}{2h}[\varphi_{NE} - \varphi_{NW} - (\varphi_{NE} + \varphi_{NW} - 2\varphi_{NC})\text{cth}(Ah)]$$

$$a_2^N = \frac{1}{4\text{sh}^2(Ah)}(\varphi_{NE} + \varphi_{NW} - 2\varphi_{NC})$$

在其它边界上有类似结果。现设

$$\varphi = \varphi e^{Ax+By} \tag{B.2.4.5}$$

代入 (B.2.4.1) 并计及 $f=0$，则有

$$\varphi_{xx} + C\varphi_{yy} - (A^2 + B^2C)\varphi = 0 \tag{B.2.4.6}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,k) &= e^{-Bk}[a_2^N e^{Ax} + a_1^N x e^{-Ax} + (a_0^N - a_2^N)e^{-Ax}] \\ \varphi(x,-k) &= e^{Bk}[a_2^S e^{Ax} + a_1^S x e^{-Ax} + (a_0^S - a_2^S)e^{-Ax}] \\ \varphi(h,y) &= e^{-Ah}[a_2^E e^{By} + a_1^E y e^{-By} + (a_0^E - a_2^E)e^{-By}] \\ \varphi(-h,y) &= e^{Ah}[a_2^W e^{By} + a_1^W y e^{-By} + (a_0^W - a_2^W)e^{-By}] \end{aligned}\right\} \tag{B.2.4.7}$$

方程 (B.2.4.6) 可以用分离变量法求解，所得的解在 $x=y=0$ 时即为中心 P 点的值，这样就可建立如下的方程：

$$\begin{aligned} \varphi_P = &C_{NE}\varphi_{NE} + C_{NC}\varphi_{NC} + C_{NW}\varphi_{NW} + C_{SE}\varphi_{SE} \\ &+ C_{SC}\varphi_{SC} + C_{SW}\varphi_{SW} + C_{EC}\varphi_{EC} + C_{WC}\varphi_{WC} - C_P f \end{aligned} \tag{B.2.4.8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &C_{NE} = Ee^{-Ah-Bk}, \quad C_{SE} = Ee^{-Ah+Bk}, \quad C_{EC} = EBe^{-Ah}, \quad C_{NC} = EAe^{-Bk} \\ &C_{NW} = Ee^{Ah-Bk}, \quad C_{SW} = Ee^{Ah+Bk}, \quad C_{WC} = EBe^{Ah}, \quad C_{SC} = EAe^{Bk} \end{aligned}\right\} \tag{B.2.4.9}$$

$$\begin{aligned} C_P = &\frac{1}{2(A^2 + B^2C)}[-Ah(C_{NE} + C_{EC} + C_{SE} - C_{NW} - C_{WC} - C_{SW}) \\ &- Bk(C_{NE} + C_{NC} + C_{NW} - C_{SE} - C_{SC} - C_{SW})] \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{4\text{ch}(Ah)\text{ch}(kh)} - Ah\,\text{cth}(Ah)\cdot E_2 - Bk\,\text{cth}(Bk)\cdot E'_2$$

$$EA = 2Ah\,\text{ch}(Ah)\text{cth}(Ah)\cdot E_2$$

$$EB = 2Bk\,\text{ch}(Bk)\text{cth}(Bk)\cdot E'_2$$

$$E_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-(-1)^m\lambda_m h}{[(Ah)^2 + (\lambda_m h)^2]\text{ch}(\mu_m h)}$$

$$E'_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-(-1)^m\lambda'_m k}{[(Bk)^2 + (\lambda'_m h)^2]\text{ch}(\mu'_m k)}$$

$$\lambda_m = \frac{2m-1}{2h}\pi \qquad \mu_m = \sqrt{(A^2 + B^2C + \lambda_m^2)/C}$$

$$\lambda'_m = \frac{2m-1}{2k}\pi \qquad \mu'_m = \sqrt{A^2 + B^2C + \lambda'^2_m}$$

$$m = 1,2,3,\cdots \tag{B. 2. 4. 10}$$

(B. 2. 4. 8) 式就是基于有限解析法的差分方程，显然系数的计算是很繁琐的。事实上可以采用下述方法，使计算大为简化。

设 $\varphi_0 = X(x)Y(y)$，代入(B. 2. 4. 3)式，可得

$$\frac{X'' - 2AX'}{X} + C\frac{Y'' - 2BY'}{Y} = 0$$

由于二项分别只是 x 及 y 的函数，它们之和为零的条件是它们分别只能是常数，即

$$\frac{X'' - 2AX'}{X} = -C\frac{Y'' - 2BY'}{Y} = \lambda$$

或

$$X'' - 2AX' - \lambda X = 0$$

$$Y'' - 2BY' + \frac{\lambda}{C}Y = 0$$

其中 λ 为一常数。这二个方程的特征方程为

$$\mu_A^2 - 2A\mu_A - \lambda = 0 \qquad \mu_B^2 - 2B\mu_B + \frac{\lambda}{C} = 0$$

解得特征值

$$\mu_A = A \pm \sqrt{A^2 + \lambda}; \qquad \mu_B = B \pm \sqrt{B^2 - \frac{\lambda}{C}}$$

选取 λ 的几个特殊值 0，$-A^2$，B^2C，则得特征值为

$$\lambda = 0: \qquad \mu_A = 0, 2A \qquad \mu_B = 0, 2B$$

$$\lambda = -A^2: \quad \mu_A = A, A \qquad \mu_B = B \pm \sqrt{B^2 + \frac{A^2}{C}}$$

$$\lambda = B^2C: \quad \mu_A = A \pm \sqrt{A^2 + B^2C}, \quad \mu_B = B, B$$

引入记号

$$\mu_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 + B^2C}, \quad \mu_{3,4} = B \pm \sqrt{B^2 + \frac{A^2}{C}} \tag{B. 2. 4. 11}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} \mu_A &= 0, 2A, A, A, \mu_1, \mu_2 \\ \mu_B &= 0, 2B, \mu_3, \mu_4, B, B \end{aligned}\right\} \tag{B. 2. 4. 12}$$

φ_0 的解可以表示为

$$\begin{aligned} \varphi_0(x,y) = & (C''_1 + C''_2 e^{2Ax})(C''_3 + C''_4 e^{2By}) + e^{By}(C''_5 e^{\mu_1 x} + C''_6 e^{\mu_2 x}) \\ & + (C''_7 e^{\mu_3 y} + C''_8 e^{\mu_4 y})e^{Bx} \end{aligned} \tag{B. 2. 4. 13}$$

其中 C'' 为待定常数，可由 8 个边界点值（φ_{0NE}，φ_{0NC}，…）确定。再令 $x=y=0$，$\varphi_0=\varphi_{0P}$，就可得到方程

$$\varphi_P = \sum_{nb} C_{nb}\varphi_{nb} - C_P f \tag{B. 2. 4. 14}$$

其中 nb 即 NE，NC，…等，且有

$$C_{NW}/C_{NE} = C_{WC}/C_{EC} = C_{SW}/C_{SE} = \alpha^2 = e^{2Ah}$$

$$C_{SW}/C_{SE} = C_{SC}/C_{NC} = C_{SE}/C_{NE} = \beta^2 = e^{2Bk}$$

$$C_{SC} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_h\right) - C_{SW}\frac{2}{\alpha\beta}\bar{\lambda}_h\left(1 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_k\right)}{\frac{1}{\beta}\left(2 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_k\bar{\lambda}_h\right)}$$

$$C_{WC} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_k\right) - C_{SW}\frac{2}{\alpha\beta}\bar{\lambda}_k\left(1 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_h\right)}{\frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_h\bar{\lambda}_k\right)}$$

$$C_{SW} = \frac{2 - (\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + \frac{1}{2}(-\bar{\lambda}_h\bar{\lambda}_k + \bar{\alpha}\,\bar{\lambda}_k + \bar{\beta}\,\bar{\lambda}_h)}{\left(1 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)\left(2 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_h\bar{\lambda}_k\right) - \frac{2}{\alpha\beta}\left(\bar{\alpha}\,\bar{\lambda}_k + \bar{\beta}\,\bar{\lambda}_h - \frac{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}{2}\bar{\lambda}_h\bar{\lambda}_k\right)} \tag{B.2.4.15}$$

其中$\bar{f} = f + \frac{1}{f}$，$f$可为$\alpha$，$\beta$，$\lambda_h$，$\lambda_k$

$$\alpha = e^{Ah} \quad \beta = e^{Bk} \quad \lambda_h = e^{\sqrt{A^2 + B^2 C}\cdot h} \quad \lambda_k = e^{\sqrt{B^2 + A^2/C}\cdot k} \tag{B.2.4.16}$$

此外

$$C_P = -\frac{1}{2(A^2 + B^2C)}\Big[Bk(C_{NC} - C_{SC}) + Ah(C_{EC} - C_{WC}) + (Ah + Bk)(C_{NE} - C_{SW}) + (Ah - Bk)(C_{SE} - C_{NW})\Big] \tag{B.2.4.17}$$

(B.2.4.14) 就是基于有限解析法的差分方程。

在以上计算中当$A=0$或$B=0$或A，B均为零时，基本解及 (B.2.4.14) 中的系数有所变化。

$A \neq 0, B = 0$时

$$C_{NC} = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 8/\bar{\beta}_k}}{4}, \qquad q = \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}\right)^2\left(1 - \frac{2}{\bar{\beta}_k}\right)$$

$$C_{WC} = \frac{1 - 2C_{NC}}{\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)(1 + 2C_{NC})}$$

$$C_{SC} = C_{NC}, \quad C_{NW} = \frac{1 - 2C_{NC} - \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)C_{WC}}{2(1 + 1/\alpha^2)} = C_{SW}$$

$$C_{NE}/C_{NW} = 1/\alpha^2, \quad C_{EC}/C_{WC} = 1/\alpha^2$$

$$C_{NE} = C_{SE}, \qquad \beta_k = e^{Ak/\sqrt{C}}, \quad \bar{\beta}_k = \beta_k + \frac{1}{\beta_k} \tag{B.2.4.18}$$

$A=0$　$B\neq 0$时将上式各因子作如下变化：

$$
\begin{array}{ccc} NW & NC & NE \\ WC & & EC \\ SW & SC & SE \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} SE & EC & NE \\ SC & & NC \\ SW & WC & NW \end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{l} h,k \\ \alpha\ \beta_k \\ \beta_k = e^{Ak/\sqrt{C}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k,h \\ \beta\ \alpha_h \\ \alpha_h = e^{Bh} \end{array}\right\}
$$

$A=0$，$B=0$ 时

$$
C_{NW} = C_{NE} = C_{SW} = C_{SE} = 0
$$

$$
C_{NC} = C_{SC} = \frac{h}{2(h + k/\sqrt{C})}
$$

$$
C_{EC} = C_{WC} = \frac{k/\sqrt{C}}{2(h + k/\sqrt{C})}
$$

$$
C_P = \frac{kh}{4\sqrt{C}} \tag{B.2.4.19}
$$

不难看出这里介绍的方法比 Chen 提出的方法简单得多，而且不产生级数取有限项时的截断误差。计算表明二种方法的结果接近，都有迎风性。如设 $h=k=1$，$C=1$。

取 $A=B=0$ 时，C_{nb}系数结果如下：

$C_{NW} = 0.04469(0.0)$　$C_{NC} = 0.2053(0.25)$　$C_{NE} = 0.04469(0.0)$

$C_{WC} = 0.2053(0.25)$　　0　　$C_{EC} = 0.2053(0.25)$

$C_{SW} = 0.04469(0.0)$　$C_{SC} = 0.2053(0.25)$　$C_{SE} = 0.04469(0.0)$

（括号内的值为本方法值，另一值为 Chen 方法得的值，下同）

取 $A=1$，$B=0$ 时

$C_{NW} = 0.08708(0.07309)$，　$C_{NC} = 0.16(0.16398)$，　$C_{NE} = 0.01178(0.00989)$

$C_{WC} = 0.4247(0.44574)$，　⟶，　$C_{EC} = 0.05748(0.06032)$

$C_{SW} = 0.08708(0.07309)$，　$C_{SC} = 0.16(0.16398)$，　$C_{SE} = 0.01178(0.00989)$

取 $A=B=1$ 时

$C_{NW}=0.02363$ (0.02721)，　$C_{NC}=0.04619$ (0.04415)，　$C_{NE}=0.0032$ (0.003683)

$C_{WC}=0.3413$ (0.3262)，　↗　$C_{EC}=0.04619$ (0.04415)

$C_{SW}=0.1746$ (0.2011)，　$C_{SC}=0.3413$ (0.3262)，　$C_{SE}=0.02363$ (0.02721)

在上述表中箭头表示速度走向，从数据上看可知差分格式有明显的迎风性，即上游值影响大于下游值的影响。

顺便指出，在 h，k 相差过大或 A，B 过大时，C_{nb}为呈负值，这时应当调整 h/k 的比值，使之尽量接近于 1。因为系数为负时，会出现其它系数过大，从而破坏椭圆方程的极值性原理，故差分方程与原方程不相容。这当然是不允许的。如果用台劳展开的方法不难证明本格式具有一阶精度，但这是最大估计误差得到的结论。本方法与指数格式接近，二阶导数项的系数比较小时本方法可以逼近变化率比较大的区域，计算表明了这一点，因此本方法与奇异摄动

法相结合是有希望用来计算高雷诺数流动问题。

以上讨论了定常的对流扩散方程，在具体应用时人们对不定常对流扩散问题更有兴趣，下面讨论不定常问题。首先从下面的模型方程入手：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{B.2.4.20}$$

其中 $\nu>0$，为确定起见，设 $a>0$。

在这个方程中，如果视$\frac{\partial u}{\partial t}$为常数，比如$-d$，

则

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a\frac{\partial u}{\partial x}=-d \tag{B.2.4.21}$$

利用上面讨论的方法，可得

$$u_p=C_W u_W+C_E u_E+\frac{\mathrm{d}h}{a}(C_W-C_E)\equiv C_W u_W+C_E u_E+C_p d \tag{B.2.4.22}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&C_E=\frac{1-e^{-\frac{a}{\nu}h}}{2\mathrm{sh}\left(\frac{ah}{\nu}\right)}\qquad C_W=\frac{e^{\frac{a}{\nu}h}-1}{2\mathrm{sh}\left(\frac{ah}{\nu}\right)}\\&C_P=\frac{h}{a}(C_W-C_E)\qquad d=-\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u^{(n)}-u^{(n+1)}}{\Delta t}\end{aligned}\right\} \tag{B.2.4.23}$$

如用隐式格式，则

$$u_P^{(n+1)}=C_W u_W^{(n+1)}+C_E u_E^{(n+1)}+C_P\frac{u_P^{(n)}-u_P^{(n+1)}}{\Delta t}$$

或

$$\left(1+\frac{C_P}{\Delta t}\right)u_P^{(n+1)}-C_W u_W^{(n+1)}-C_E u_E^{(n+1)}=\frac{C_P}{\Delta t}u_P^{(n)} \tag{B.2.4.24}$$

这就构成了关于 $u^{(n+1)}$的三对角代数方程组

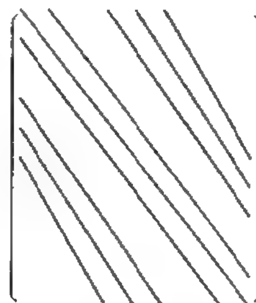
对于二维问题，方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+2A\frac{\partial u}{\partial x}+2B\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{B.2.4.25}$$

相应的隐式格式为

$$\left(1+\frac{C_P}{\Delta t}\right)u_P^{(n+1)}-\sum_{nb}C_{nb}u_{nb}^{(n+1)}=\frac{C_P}{\Delta t}u_P^{n} \tag{B.2.4.26}$$

这就构成了一个准 9 对角线（其中中间三对角为真正三对角，其它位于远二侧，见草图）。



草图

可以证明以上隐式格式是无条件稳定的。如用显式格式，稳定条件为

一维时

$$\frac{a\Delta t}{h}<\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\qquad \gamma=e^{\frac{ah}{\nu}} \tag{B.2.4.27}$$

二维时近似地

$$\frac{\Delta t}{\frac{h}{|2A|}+\frac{k}{|2B|}}<\min\left(\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1};\quad\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}\right)$$

$$\gamma_1=e^{\frac{2Ah}{\nu}}\qquad \gamma_2=e^{\frac{2Bk}{\nu}}\tag{B.2.4.28}$$

顺便指出，上述9准对角矩阵可以用 Schneider 和 Zedan 提出的强隐修正方法(MSI-Modified Strong Implicit method)。其做法简要介绍如下：

每一点的差分方程可写出如下：

$$a_{ij}^{NE}u_{i+1,j+1}+a_{ij}^{NC}u_{i,j+1}+a_{ij}^{NW}u_{i-1,j+1}+a_{ij}^{EC}u_{i+1,j}+a_{ij}^{P}u_{ij}$$

$$+a_{ij}^{WC}u_{i-1,j}+a_{ij}^{SE}u_{i+1,j-1}+a_{ij}^{SC}u_{i,j-1}+a_{ij}^{SW}u_{i-1,j-1}=h_{ij}\tag{B.2.4.29}$$

或简写为

$$AV=H\tag{B.2.4.30}$$

其中 A 的形式及所涉及的点如图 B.2.28 所示

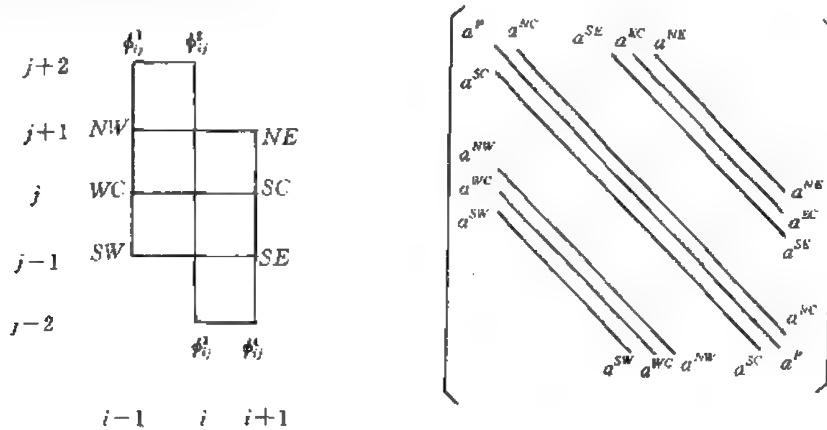


图 B.2.28

为求解(B.2.4.30)，构造一个 $\tilde{A}$，其中增加四个点，取

$$\left.\begin{aligned}u_{i,j-2}&=-u_{ij}+2u_{i,j-1}\qquad & u_{i-1,j+2}&=-2u_{ij}+2u_{i,j+2}+u_{i-1,j}\\u_{i,j+2}&=-u_{ij}+2u_{i,j+1}\qquad & u_{i+1,j-2}&=-2u_{ij}+2u_{i,j-1}+u_{i+1,j}\end{aligned}\right\}$$

将它加入(B.2.4.29)中得

$$a_{ij}^{NE}u_{i+1,j+1}+a_{ij}^{NC}u_{i,j+1}+a_{ij}^{NW}u_{i-1,j+1}+a_{ij}^{EC}u_{i+1,j}+a_{ij}^{P}u_{i,j}$$

$$+a_{ij}^{WC}u_{i-1,j}+a_{ij}^{SE}u_{i+1,j-1}+a_{ij}^{SC}u_{i,j-1}+a_{ij}^{SW}u_{i-1,j-1}$$

$$+\phi_{ij}^1[u_{i-1,j+2}-\alpha(-2u_{ij}+2u_{i,j+1}+u_{i-1,j})]+\phi_{ij}^2[u_{i,j+2}-\alpha(-u_{ij}+2u_{i,j+1})]$$

$$+\phi_{ij}^3[u_{i,j-2}-\alpha(-u_{ij}+2u_{i,j-1})]+\phi_{ij}^4[u_{i+1,j-2}-\alpha(-2u_{ij}+2u_{i,j-1}+u_{i+1,j})]=h_{ij}$$

(B.2.4.31)

α 为选用参数，$\phi_{ij}^{2,3,4}$计算见下面公式，现在所得的是一个准十三对角阵，可分解为如下的上、下三角阵，其中

$$L \qquad U \qquad = \qquad A+\tilde{A} \tag{B. 2. 4. 32}$$

$\tilde{A}$ 为虚线部分。其中

$$\left.\begin{aligned}
L_{ij}^{1} &= a_{ij}^{SW} \\
L_{ij}^{2} &= \frac{a_{ij}^{WC} - L_{ij}^{1}U_{i-1,j-1}^{1} - \alpha a_{ij}^{NW}U_{i-1,j+1}^{1}}{1 - \alpha U_{i-1,j}^{1}U_{i-1,j+1}^{1}} \\
L_{ij}^{3} &= a_{ij}^{NW} - L_{ij}^{2}U_{i-1,j}^{1} \\
L_{ij}^{4} &= \frac{a_{ij}^{SC} - L_{ij}^{1}U_{i-1,j-1}^{3} - L_{ij}^{2}U_{i-1,j}^{2} - 2\alpha L_{ij}^{1}U_{i-1,j-1}^{2}}{1 + 2\alpha U_{i,j-1}^{2}} \\
\varphi_{ij}^{1} &= L_{ij}^{3}U_{i-1,j+1}^{1} \qquad \varphi_{ij}^{2} = L_{ij}^{1}U_{i-1,j-1}^{2} \\
\varphi_{ij}^{3} &= L_{ij}^{3}U_{i-1,j+1}^{4} \qquad \varphi_{ij}^{4} = L_{ij}^{4}U_{i,j-1}^{2} \\
L_{ij}^{5} &= a_{ij}^{P} - L_{ij}^{1}U_{i-1,j-1}^{4} - L_{ij}^{2}U_{i-1,j}^{3} - L_{ij}^{3}U_{i-1,j+1}^{2} \\
&\quad - L_{ij}^{4}U_{i,j-1}^{1} + \alpha(2\varphi_{ij}^{1} + \varphi_{ij}^{2} + \varphi_{ij}^{3} + 2\varphi_{ij}^{4}) \\
U_{ij}^{1} &= \frac{a_{ij}^{NC} - L_{ij}^{2}U_{i-1,j}^{4} - L_{ij}^{3}U_{i-1,j+1}^{3} - 2\alpha(\varphi_{ij}^{1} + \varphi_{ij}^{3})}{L_{ij}^{5}} \\
U_{ij}^{2} &= \frac{a_{ij}^{SE} - L_{ij}^{4}U_{ij-1}^{3}}{L_{ij}^{5}} \\
U_{ij}^{3} &= \frac{a_{ij}^{EC} - L_{ij}^{4}U_{i,j-1}^{4} - \alpha\varphi_{ij}^{4}}{L_{ij}^{5}} \\
U_{ij}^{4} &= a_{ij}^{NE}/L_{ij}^{5}
\end{aligned}\right\} \tag{B. 2. 4. 33}$$

一般选 $\alpha=0.5$，迭代过程如下

$$\delta^{(k)} = U^{-1}L^{-1}R^{(k)} \tag{B. 2. 4. 34}$$

其中

$$\delta^{(k)} = V^{(k+1)} - V^{(k)}$$

$$R^{(k)} = H - AV^{(k)}$$

当 $\|\delta^{(k)}\| < \varepsilon$ 时计算停止。

MSI 迭代法计算速度还是比较快的，不过由于涉及九个点，因此差分方程的计算总的说是比较慢的，这是本方法（有限解析法）的一个重要缺点。

2.5 发展方程的谱方法

由于快速富氏变换方法(FFT)的出现，使谱方法得以迅速发展。谱方法的特点是精度高，

效率高。用下面的例子就可以说明这一点。

试解方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad t>0 \quad 0<x<\pi\\&u(0,t)=u(\pi,t)=0\\&u(x,0)=f(x)\end{aligned}\right\} \tag{B. 2. 5. 1}$$

利用分离变量法可得精确解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\sin nx \tag{B. 2. 5. 2}$$

其中 $a_n=f_n\mathrm{e}^{-n^2t} \quad f_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$

只要 $f(x)$是逐段连续，在 $(0,\pi)$ 内二次可积，即 $\int_0^\pi f^2(x)\mathrm{d}x$ 有界，则级数 (B. 2. 5. 2) 总是收敛的，在不连续点上取 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$。

现在考虑上述问题的数值解。用谱方法，可设

$$u_N(x,t)=\sum_{n=1}^{N}u_n(t)\sin nx \tag{B. 2. 5. 3}$$

它满足边界条件。代入方程可得

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathrm{d}u_n(t)}{\mathrm{d}t}\sin nx=\sum_{n=1}^{N}-n^2u_n(t)\sin nx$$

二边同乘 $\sin mx$，并从 0 到 π 积分，计及

$$\int_0^\pi \sin mx\sin nx\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\delta_{mn}$$

其中 δ_{mn}为 Kronecker 记号，即

$$\delta_{mn}=\begin{cases}0 & m\neq n\\1 & m=n\end{cases} \tag{B. 2. 5. 4}$$

于是可得 $\frac{\mathrm{d}u_m(t)}{\mathrm{d}t}=-m^2u_m(t) \qquad (m=1,2,\cdots N)$

求解得 $u_m(t)=u_m(0)\mathrm{e}^{-m^2t} \qquad (m=1,2,\cdots N)$

考虑到初始条件有

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin nx \tag{B. 2. 5. 5}$$

取前 N 项，给出

$$u_m(0)=f_m \tag{B. 2. 5. 6}$$

因此

$$u_N(x,t)=\sum_{n=1}^{N}f_n\mathrm{e}^{-n^2t}\sin nx \tag{B. 2. 5. 7}$$

与精确解比较得

$$|u-u_N|=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}f_n\mathrm{e}^{-n^2t}\sin nx\right|\leqslant C\mathrm{e}^{-N^2t} \tag{B. 2. 5. 8}$$

其中C 为一个与 N 无关的常数。以前讨论过用有限差分法解该方程，误差为$O(\Delta t,\Delta x^2)$，而这里为 e^{-N^2t}的量级，不难看出谱方法精度很高。因为 $\sin nx$ 为谱函数，故本方法得名谱方法。

为将本方法推广到一般情况下，上面讨论的谱方法可以归结为如下步骤：

(1) 首先找出满足边界条件的函数族。这些函数之间应当是线性无关的；互相是正交的，

即不同函数间相乘后在求解空间内积分得零；而且函数系应当是完备的，即任何域内逐段连续二次可积且满足边界条件的函数都可以用函数族的线性组合无限一致逼近。上述例子中 $\{\sin nx\}$ 函数族满足这一要求。

(2) 任何函数可以用上述函数族中有限个函数的线性组合来近似。这一组合称作完备函数空间内一个子空间上的投影。其中线性组合的系数叫做在该"方向"上的"坐标"。如(B.2.5.3) 中 $u_n(t)$即 $u(x,t)$在 $\sin nx$ "方向"上的坐标。

(3) 将解的近似表达式代入原方程，用函数族内的函数作为权函数做加权余量运算，可得到关于"坐标"的微分方程。上面 (B.2.5.4) 式后关于 $u_m(t)$ 的方程就是"坐标"微分方程。

起始条件在子空间内作投影得到的"坐标"值就是解的"坐标"的起始值。

(4) 求解"坐标"微分方程后可得解的"坐标"，进而得到方程的解。

将上述过程用数学形式表示出来如下：

设求解的方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \qquad t > 0, \quad 0 < x < l \tag{B.2.5.9}$$

其中 L 为一个与 x 变量有关的线性算子$\left(L=\sum_{j=1}^{J}a_j\frac{\partial}{\partial x_j}+a_0\right)$，$f$ 为 x，t 的函数，x 为自变量(可以理解为一维或多维的)。边界条件为

$$Bu = 0 \tag{B.2.5.10}$$

起始条件

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{B.2.5.11}$$

设 $\{\varphi_n\}$ 为满足边界条件 (B.2.5.10) 的一个完备的函数族（或称函数空间），取其 N 个函数组成函数子空间 $\{\varphi_n\}_1^N$，u 在其上投影为

$$u_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N}u_n\varphi_n \tag{B.2.5.12}$$

代入方程得余量

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\varphi_n - u_nL\varphi_n\right) - f \equiv R \tag{B.2.5.13}$$

以 φ_m 为权函数，乘余量积分得

$$\begin{aligned}\int_0^l R\varphi_m \mathrm{d}x &\equiv (R,\varphi_m)\\ &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(\varphi_n,\varphi_m) - u_n(L\varphi_n,\varphi_m)\right) - (f,\varphi_m)\end{aligned}$$

令其为零可得关于 u_n 的方程组

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial u_n}{\partial t}(\varphi_n,\varphi_m) = \sum_{n=1}^{N}u_n(L\varphi_n,\varphi_m) + (f,\varphi_m) \qquad (m = 1,2,\cdots,N) \tag{B.2.5.14}$$

起始条件为

$$u_N(x,0) = \varphi_N(x) = \sum_{n=1}^{N}\varphi_n\varphi_n$$

故

$$u_n(0) = \varphi_n \qquad (n = 1,2,\cdots,N) \tag{B.2.5.15}$$

于是在(B.2.5.15)条件下解((B.2.5.14)得 $u_n(t)$，然后近似解 $u_n(x,t)$可得。当 $N\to\infty$时 $u_N(x,t)\to u(x,t)$。

选用不同的权函数，则可得到不同的方法。

（1）最小二乘法。

余量本身作为权函数，则有余量的二次方积分，令其取极小，这就要求

$$\frac{\partial}{\partial u_m}(R,R)=0 \qquad (m=1,2,\cdots,N)$$

或

$$\frac{\partial}{\partial u_m}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\varphi_n-u_nL\varphi_n\right)-f,\ \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\varphi_n-u_nL\varphi_n\right)-f\right)=0$$

$$(m=1,2,\cdots,N) \tag{B.2.5.16}$$

这就得到关于 u_n 的 N 个方程组，求解后可得 u_n。

（2）τ 近似方法

设求解的方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t) \qquad (t>0;\ -1\leqslant x\leqslant 1) \tag{B.2.5.17}$$

定解条件为

$$u(-1,t)=0 \qquad u(x,0)=g(x) \tag{B.2.5.18}$$

首先在（−1，1）区间上选一完备的带权正交的函数空间 $\{\varphi_n\}$ 为

$$\varphi_n=\sqrt{\frac{2}{\pi C_{n-1}}}T_{n-1}(x) \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{B.2.5.19}$$

其中 $T_n(x)$ 为 Chebyshev（契比雪夫）多项式，$C_0=2$，$C_m=1$（$m>0$）

这里只有一个边界条件。设近似解 $u_N(x,t)$ 为

$$u_N(x,t)=\sum_{n=1}^{N+1}u_n(t)\varphi_n(x) \tag{B.2.5.20}$$

将它代入方程（B.2.5.17）得关于 u_n 的 $N+1$ 个方程，舍去最后一个，再加边界条件

$$u_N(-1,t)=0 \tag{B.2.5.21}$$

于是又有了 $N+1$ 个方程，求解后可得 $u_N(x,t)$。

在（B.2.5.20）代入（B.2.5.17）式后有

$$\sum_{n=1}^{N+1}\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}\varphi_n+\sum_{n=1}^{N+1}u_n\frac{\mathrm{d}\varphi_n}{\mathrm{d}x}=f \tag{B.2.5.22}$$

引入记号

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\varphi_1\varphi_2\mathrm{d}x \tag{B.2.5.23}$$

则因

$$(T_m,T_n)=\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}C_n\delta_{mn} \tag{B.2.5.24}$$

$$(T_m,T'_n)=\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T'_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases} n\pi C_m & n>m,\quad n-m\ \text{为奇数} \\ n\pi C_m+n\delta_{m0}\pi & n>m,\quad n-m\ \text{为偶数} \\ 0 & n\leqslant m \end{cases} \tag{B.2.5.25}$$

将(B.2.5.22)乘 φ_m，并取 $m=1,2,\cdots,N$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}=-\frac{2}{C_n}\sum_{\substack{p=n+1\\p+n=\text{奇}}}^{N+1}pu_p+\hat{f}_n \quad (n=1,2,\cdots,N) \tag{B.2.5.26}$$

其中$\hat{f}_n=(\varphi_n, f)$，边界条件（$u(-1, t)=0$）可写为

$$\sum_{n=1}^{N+1}(-1)^{n+1}u_n(t)=0 \tag{B.2.5.27}$$

由（B.2.5.27）和（B.2.5.26）一起可得到关于$u_n(t)$的$N+1$个方程，其中N个微分方程，1个代数方程，这就是τ方法。在k个边界条件时，则应当有$N+k$个方程，其中微分方程仍是N个。这个方法的特点是函数空间$\{\varphi_n\}$的函数不必满足边界条件，这样$\{\varphi_n\}$的选择余地就大大增加了，对于具有复杂边界条件时尤为需要。

例解方程（B.2.5.1），起始和边界条件为

$$u(x,0)=3-2x-2x^2+2x^3$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-2 \qquad u(\pi,0)=3-2\pi-2\pi^2+2\pi^3=38.990159\equiv u_\pi$$

在$(0, \pi)$区间上选函数空间为$\{e^{2inx}\}$，其中$i=\sqrt{-1}$，于是

$$u_N(x,t)=u_0+\sum_{n=1}^{N}u_n e^{2inx}$$

为满足边界条件，有

$$-2=\sum_{n=1}^{N}2inu_n, \qquad u_0+\sum_{n=1}^{N}u_n=u_\pi$$

这里u_n是复数。由这二式可得

$$u_N=i-(N-1)u_\pi+(N-1)u_0+\sum_{n=1}^{N-2}[(N-1)-n]u_n$$

$$u_{N-1}=Nu_\pi-(N+i)u_0-\sum_{n=1}^{N-2}(N-n)u_n$$

将$u_N(x, t)$代入原方程，得到的余量乘e^{-2imx}，并对x作积分可得$N-1$个方程

$$\frac{du_m}{dt}+4m^2u_m=0 \qquad (m=0,1,\cdots,N-2)$$

记

$$u(x,0)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(0)e^{2imx}, \quad u_m(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}u(x,0)e^{2imx}dx$$

故起始值$u_m(0)$是已知的，$u_m(t)$可解得，$u_N(x,t)$最后得解。这里所选函数族不满足边界条件。

（3）配置法（Collocation 法）

前面的讨论要求解在整个求解域上满足（至少近似满足）方程。实际上大量的数值计算中只需要在离散点上满足就可以了。配置法的出发点就是只要求离散点满足方程就行，所以也叫伪谱法。它的作法如下所述。

同以前一样，设$\{\varphi_n\}$是满足边界条件的完备的函数空间，近似解表示为

$$u_N(x,t)=\sum_{n=1}^{N}u_n(t)\varphi_n(x) \tag{B.2.5.28}$$

由于只在离散化点上满足方程，将上式代入方程，令$x=x_i$，则得

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{du_n}{dt}\varphi_n(x_i)=\sum_{n=1}^{N}u_n(t)(L\varphi_n)_{x=x_i}+f(x_i,t)$$

$$(i=1,2,\cdots,N) \tag{B.2.5.29}$$

这就建立了关于u_n的N个微分方程。由于x_i给定，上面是一个常系数的微分方程，求解比较简单。在许多情况下，φ_n以离散形式给出，这时这种方法就比较有效。

还需说明的是谱函数不只是三角函数，还可以是其它函数，如Chebyshev 函数，Legendre 函数等。

(4) 契比雪夫 (Chebyshev) 置配法

设所解的方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t>0,\ -1<x<1\\&u(-1,t)=u(1,t)=0\\&u(x,0)=f(x)\end{aligned}\right\}\tag{B.2.5.30}$$

选函数空间为 $\{T_n\}$ ($n=0, 1, 2, \cdots$)，T_n 为契比雪夫多项式，设

$$u_N(x,t)=\sum_{n=0}^{N}u_n(t)T_n(x)\tag{B.2.5.31}$$

代入方程并在 x_j 上满足方程，则得

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}T_n(x_j)=\sum_{n=0}^{N}u_nT''_n(x_j)\tag{B.2.5.32}$$

T''_n是 x 的二阶导数，x_j 由

$$x_j=\cos\frac{\pi j}{N} \qquad (j=1,2,\cdots,N-1)\tag{B.2.5.33}$$

确定，由 T_n 定义知

$$T_n(x_j)=\cos\frac{\pi jn}{N}\tag{B.2.5.34}$$

根据 T_n 有关递推公式可得

$$\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2}=\sum_{n=0}^{N}u_n^{(2)}T_n(x)\tag{B.2.5.35}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&u_{N+1}^{(1)}=0 \qquad u_N^{(1)}=0\\&\overline{C}_nu_n^{(1)}=u_{n+2}^{(1)}+2(n+1)u_{n+1} \qquad n=N-1,N-2,\cdots 0\\&u_{N+1}^{(2)}=0 \quad u_N^{(2)}=0\\&\overline{C}_nu_n^{(2)}=u_{n+2}^{(2)}+2(n+1)u_{n+1}^{(1)} \qquad n=N-1,N-2,\cdots 0\\&\overline{C}_n=\begin{cases}2 & n=0\text{ 和 }N\\1 & 1\leqslant n\leqslant N-1\end{cases}\end{aligned}\right\}\tag{B.2.5.36}$$

代入 (B.2.5.32) 后得

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}\cos\frac{\pi jn}{N}=\sum_{n=0}^{N}u_n^{(2)}\cos\frac{\pi jn}{N}$$

这就得到关于 u_n 的 $N+1$ 个方程，可以解出 u_n，最后得到 u_N。由于可以用 FFT 法计算，速度仍是很快的。

(5) 勒让德 (Legendre) τ 方法解泊松方程

设方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y) \qquad \begin{aligned}-1\leqslant x\leqslant 1\\-1\leqslant y\leqslant 1\end{aligned}\\&u(x,-1)=u(x,1)=0;u(-1,y)=u(1,y)=0\end{aligned}\right\}\tag{B.2.5.37}$$

齐次边界条件。选函数空间为$\{\phi_{kl}\}=\{L_k(x)L_l(y)\}$，其中$L_k(x),L_l(y)$为勒让德多项式。设解为

$$u_N(x,y)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}u_{kl}L_k(x)l_l(y) \tag{B.2.5.38}$$

代入方程并利用正交性可得

$$u_{kl}^{(2,0)}+u_{kl}^{(0,2)}=f_{kl} \qquad (k,l=0,1,\cdots,N-2) \tag{B.2.5.39}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
f_{kl}&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(x,y)L_k(x)L_l(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
u_{kl}^{(2,0)}&=\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{\substack{p=k+2\\ p+k\text{偶数}}}^{N}[p(p+1)-k(k+1)]u_{pl}\\
u_{kl}^{(0,2)}&=\left(l+\frac{1}{2}\right)\sum_{\substack{q=l+2\\ q+l\text{偶数}}}^{N}[q(q+1)-l(l+1)]u_{kq}
\end{aligned}\right\} \tag{B.2.5.40}$$

由边界条件可得

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N}u_{kl}=0 \qquad \sum_{k=0}^{N}(-1)^k u_{kl}=0 \qquad l=0,1,2,\cdots,N\\
&\sum_{l=0}^{N}u_{kl}=0 \qquad \sum_{l=0}^{N}(-1)^l u_{kl}=0 \qquad k=0,1,2,\cdots,N
\end{aligned}\right\}$$

于是可解得u_{kl}，最后得解u_N。

以上介绍了几个解法。下面来讨论一下稳定性和精度问题。

(1) 精度问题

正确使用谱方法，具有很高的精度和效率，这是因为谱方法中谱函数空间逼近函数具有e^{-N^2t}的速率。而FFT法则提供了特别高效的计算手段。但是不正确地使用谱方法，有时可能根本得不到正确的解。如解方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=x+t\\
&u(0,t)=0 \qquad t=0\\
&u(x,0)=0 \qquad 0\leqslant x\leqslant \pi
\end{aligned}\right\} \tag{B.2.5.41}$$

显然解为$u=xt$。若设

$$u_N(x,t)=\sum_{n=1}^{N}u_n(t)\sin nx$$

代入方程得

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}\sin nx+\sum_{n=1}^{N}u_n(t)n\cos nx=x+t$$

二边乘以$\sin mx$，从0到π积分得

$$\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}=-\frac{4}{\pi}\sum_{\substack{m=1\\ m+n\text{奇数}}}^{N}\frac{mn}{m^2-n^2}u_m-\frac{2}{n}(-1)^n+\frac{4}{n\pi}te_n$$

$$(n=1,2,\cdots,N)$$

$$e_n = \begin{cases} 0 & n\text{ 为偶数} \\ 1 & n\text{ 为奇数} \end{cases}$$

以上方程求解表明，不管 N 取多大，解与 xt 相差很大，如图 (B.2.29) 所示。这里找不到真实解的原因在于函数空间不能一致逼近真实解 $u=xt$，真实解不满足 $u(\pi,t)=0$ 这个条件。可见这里的函数空间选择是不合适的。

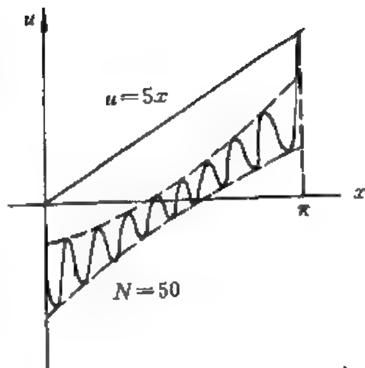


图 B.2.29

可见谱方法的正确应用，首先要正确选用函数空间，使其对解所在的函数空间而言是完备的。这样才能保证有高的计算精度。

(2) 稳定性问题

设方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f \tag{B.2.5.42}$$

其中 L 是几何空间内的线性算子，设近似解为 u_N，则有

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} = L(u_N) + f \tag{B.2.5.43}$$

由于 u_N 是 u 在 N 子空间内的投影，所以可以写为

$$u_N = P_N u \tag{B.2.5.44}$$

由于算子也会生成投影，故可有

$$L(u_N) = P_N L P_N u \tag{B.2.5.45}$$

记

$$P_N L = L_N;\ L(u_N) = L_N u_N \tag{B.2.5.46}$$

所以 (B.2.5.43) 可写作

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} = L_N u_N + f \tag{B.2.5.47}$$

算子适定性的定义表示为

$$N\to\infty\text{ 时}\quad \left.\begin{aligned} &\| L_u - L_N u_N \| \to 0 \\ &\| u - P_N u \| \to 0 \end{aligned}\right\} \tag{B.2.5.48}$$

算子稳定性定义如下：

(B.2.5.47) 的解为

$$u_N = e^{L_N t} u_N(0) + \int_0^t e^{L_N(t-\xi)} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

若存在一个有界函数 $K(t)$，对于所有 N 都有

$$\| e^{L_N t} \| \leqslant K(t)$$

则称 L_N 为稳定算子，其意义是当 $N\to\infty$ 时，对于某一确定的 t 值，u_N 不会无限增长。

在线性算子时，稳定性和收敛性是等价的。

对于线性算子稳定性的深入讨论是可能的，并为许多文献作出，这涉及较多的数学知识，有兴趣的读者可以参考有关文献和专著，这里不作详细介绍。

2.6 各种离散化方法之间的关系

本篇介绍了各种离散化方法，事实上还存在许多，并且还将创造出更新的离散化方法。现在的问题是这些离散化的方法之间是否有什么内在的联系呢？人们应该如何来设计新的离散化方法呢？

研究表明，离散化方法是将微分方程变成等效的、近似的代数方程，这些方法原则上说都可以归结为加权余量法的一种。

设原待解的微分方程为

$$Lu = f \tag{B.2.6.1}$$

加权函数 W_j 与其余量相乘积分得零，即

$$\int_\Omega W_j(Lu - f)\mathrm{d}\Omega = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,N) \tag{B.2.6.2}$$

这与原方程在近似的意义上是等价的，当 $N\to\infty$，W_j 是完备的，则就与原方程等价了。事实上，选用不同的 W_j 函数空间就构成了不同的离散化方法。

(1) 有限差分法

选 $W_j=\delta\,(x-x_j)$，其中 δ 为狄拉克（Dirac）函数，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta\,(x - x_j)f\,(x)\mathrm{d}x = f\,(x_j) \tag{B.2.6.3}$$

为了说明这种权函数的选用可以得到有限差分法，这里以下面的方程为例。

方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} - u = 0 \qquad 0< x <1 \tag{B.2.6.3}$$

它的等效问题为

$$\int_{-\infty}^{\infty}W_j\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} - u\right)\mathrm{d}x = 0 \tag{B.2.6.4}$$

由于 W_j 为 Dirac 函数，故得

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} - u\right)_{x=x_j} = 0 \tag{B.2.6.5}$$

设（x_{j-1}，x_{j+1}）为一单元，在其上

$$u = N^e_{j-1}u_{j-1} + N^e_ju_j + N^e_{j+1}u_{j+1} \tag{B.2.6.6}$$

为简单起见，设 $x_{j+1}-x_j=x_j-x_{j-1}=\Delta x=\Delta$，并选

$$\left.\begin{aligned}
N^e_{j-1} &= -\frac{x(\Delta - x)}{2\Delta^2} && -\Delta< x <\Delta\\
N^e_j &= -\frac{(\Delta - x)(\Delta + x)}{\Delta^2} && -\Delta< x <\Delta\\
N^e_{j+1} &= \frac{x(\Delta + x)}{2\Delta^2} && -\Delta< x <\Delta
\end{aligned}\right\} \tag{B.2.6.7}$$

故
$$\frac{\mathrm{d}^2N^e_{j-1}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{\Delta^2} \qquad \frac{\mathrm{d}^2N^e_j}{\mathrm{d}x^2} =-\frac{2}{\Delta^2} \qquad \frac{\mathrm{d}^2N^e_{j+1}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{\Delta^2}$$

因此代入（B.2.6.5）可得

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}-u\right)_{x=x_j}=\frac{u_{j-1}-2u_j+u_{j+1}}{\Delta^2}-u_j=0 \tag{B.2.6.8}$$

这实际就是中心差分格式。

（2）有限解析法

这里权函数也是 Dirac 函数，但插值函数作了改变。如求解方程

$$\frac{d^2u}{dx^2}-2A\frac{du}{dx}=f \tag{B.2.6.9}$$

引入 $u=u_0-\frac{f}{2A}x$，则代入得（注意 A，f 均为常数）：

$$\frac{d^2u_0}{dx^2}-2A\frac{du_0}{dx}=0 \tag{B.2.6.10}$$

选形函数 $N_{j\pm1}^e$，N_j^e如下：

$$\left.\begin{aligned}
N_{j-1}^e&=-\frac{\Delta}{D}+\frac{1-e^{2A\Delta}}{D}x+\frac{\Delta}{D}e^{2Ax}\\
N_j^e&=2\Delta\text{ch}(2A\Delta)/D+2x\text{sh}(2A\Delta)/D-\frac{2\Delta}{D}e^{2Ax}\\
N_{j+1}^e&=-\frac{\Delta}{D}-\frac{1-e^{-2A\Delta}}{D}x+\frac{\Delta}{D}e^{2Ax}
\end{aligned}\right\} \tag{B.2.6.11}$$

其中

$$D=2\Delta(e^{-2A\Delta}-1)$$

将它们代入

$$\left(\frac{d^2u_0}{dx^2}-2A\frac{du_0}{dx}\right)_{x=x_j}=0$$

可得

$$C_Wu_{0W}+C_Eu_{0E}=u_{0P} \tag{B.2.6.12}$$

其中

$$C_W=\frac{e^{2A\Delta}-1}{2\text{sh}(2A\Delta)}\qquad C_E=\frac{1-e^{-2A\Delta}}{2\text{sh}(2A\Delta)} \tag{B.2.6.13}$$

这就是有限解析法得到的离散化方程的形式。

（3）有限元法

在本章 2.2 节中已经说明：由变分原理得到有限元法时权函数即为 δ_u(函数的变分)。

（4）谱方法

选得完备函数空间$\{\varphi_n\}$后，其元素 φ_n 就是权函数。在配置法中（伪谱法），权函数为 $\delta_{(x-x_j)}$，但测试函数为 φ_n。

（5）边界元法

这里的权函数为方程

$$Lu=\delta(P_0|P)$$

的基本解，而原方程为

$$Lu+f=0$$

总而言之，各种离散化方法可以归结为加权余量法的一种，有些可以明显看出，有些比较隐讳。

最后要指出，新的离散化方法的建立有赖于数学上或物理上的启示，成功与否在于它的有效性，特别要能解决某一方面的问题，这就有生命力。有些方法一开始时并不要求数学上得到严格的证明，而往往通过使用时的有效性来验证，很多非线性问题的数值方法就是这样，

至今尚未得到证明。

参考文献

特征线法

1 Wylie E B, Streeter V L. Fluidtransients. 1978（中译本：瞬变流，1983，水利电力出版社）

2 Abbott M B. Computational Hydraulics（中译本：计算水力学，1985，海洋出版社）

3 Takeuchi K, Gurcak A W. Partial Implicit Characteristic Method For One Dimensional Fluid Flow. Trans. Amer. Nucl. Soc. 21., 199 (1975)

4 中村省一郎．科技计算方法及其在流体动力学和核系统中的应用．（中译本：1987，原子能出版社）

5 时爱民，苏铭德，刘季稔．气体动力学基础．科学出版社．1988

6 沈孟育，苏铭德．计算流体动力学讲义．清华大学，1985

有限元法

1 Michlin Variational Methods in Mathematcal Physics. Pergamon Press Ltd, 1964

2 Strang G. The Finite Element Method and Approximation Theory. University of Maryland, 1970

3 Oden J T. Finite Elements of Nonlinear Continue. McGraw-Hill Book Company, 1972

4 Zienkiewicz O C. The Finite Element Method. McGraw-Hill Inc, 1977

5 Brebbia C A. *Boundary Element* Techniques in Engineering

6 艾利斯哥尔茨．变分法．（中译本）高等教育出版社，1964

7 欧文．有限元程序设计． 中译本 1982

8 王勖成，邵敏．有限单元法的原理和数值方法．清华大学出版社，1986

直接法

1 Schumann U, Sweet R A. A Direct Method for Solution of Poisson's Equation with Neu ann Boundary Conditions on a Staggered Grid of Arbitrary size. J of Comp Phys, 1976, 20: 171-32

2 Buzbee B L, et al. On Direct Methods for Solving Poisson's Equations. SIAM J Num Analysis, 1970 (4): 627-656

3 用半直接法数值求解一类椭圆型方程．高等学校计算数学学报．1984，3

有限解析法

1 Chen C J. The Finite Analytic Method in Flows and Heat Transfer (Ⅰ, Ⅱ). Dept of Mech Engng. The University of Iowa. 1987

2 Huang L C. The Exponential Scheme for Computation of Natural Convection Flow in Enclosures. Lawrence Berkeley Laboratory Report. No LBL-21144, 1988

3 Schneider G E, Zedan M A. Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Ifield Problems. Num Heat Transfer. 1981, 4: 1-19

4 凌熙．用有限解析法数值模拟不可压缩流体平面粘性绕流问题．硕士论文．清华大学力学系，1987

谱方法

Gottlieb D, Orszag S A. Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications. CBMS-NSF Regional Conference Seriers in Applied Mathematics. 1977, 26

加权余量法

Finlayson B A. The Method of Weighted Residual and Variational Principles. New York: Academic Press, 1972

习　　题

特征线法

1. 血管中血液流动的基本方程为

$$\frac{\partial A}{\partial t}+A\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{u}\frac{\partial A}{\partial X}+\psi=0$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+(2k-1)\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-w+\frac{\psi\bar{u}}{A}-\bar{u}^2\left[(k-1)\frac{\partial \ln A}{\partial x}+\frac{\partial k}{\partial x}\right]$$

其中 A 为管截面积，$\bar{u}$ 为截面平均速度，k 为流速不均匀系数，ψ 为单位长度向外渗出的流体体积，p 为压力，$w=\dfrac{2\tau_w}{\rho R}$，$R$ 为截面半径，ρ 为密度，A 和 ψ 是 p，x 的已知函数。

试写出该方程的特征及特征上的关系。

2. 建立可压缩理想流体、定常、无旋平面流动基本方程的特征及其相容条件。

$$\left.\begin{aligned}&(u^2-a^2)\frac{\partial u}{\partial x}-uv\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+(v^2-a^2)\frac{\partial v}{\partial y}=0\\&\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{aligned}\right\}$$

其中　$\dfrac{a^2}{\gamma-1}+\dfrac{u^2+v^2}{2}=\dfrac{a_0^2}{\gamma-1}$　a_0 为常数

3. 写出小扰动跨声速流动方程的特征及特征相容条件。

$$\left.\begin{aligned}-\hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}+\frac{\partial \hat{v}}{\partial y}=0\\\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}-\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}=0\end{aligned}\right\}$$

4. 说明下列方程属于双曲型的条件

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}+C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=F$$

其中 A，B，C 为 2×2 矩阵，$U=(u,v)^{\mathrm{T}}$ 若属于双曲型，写出其特征方程及其相容条件。

5. 设方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

差分格式为

$$u_j^*=u_j^n-\Delta t\left(\frac{|a|+a}{2}\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}+\frac{a-|a|}{2}\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}\right)$$

$$u_j^{**}=u_j^*-\Delta t\left(\frac{a+|a|}{2}\frac{2u_j^*-3u_{j-1}^*+u_{j-2}^*}{\Delta x}+\frac{a-|a|}{2}\frac{-2u_j^*+3u_{j+1}^*-u_{j+2}^*}{\Delta x}\right)$$

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{2}(u_j^n+u_j^{**})$$

试说明该格式（Beam-Warming）精度、修正方程和稳定条件。

6. 已知一管线长 10 公里，管内充满有一定压力的水，压力为 $5\times10^5 N/m^2$。由于一端破裂（设 $x=0$ 处）压力突然下降到 $10^5 N/m^2$，另一端为闭口，求管内压力的变化。设 $g=9.8\,m/s^2$，$\rho_水=10^3 kg/m^3$，$K=2.0736\times10^9 N/m^2$，管材为不锈钢，管径为 $d=0.5m$，杨氏模量为 $E=1.959\times10^{11} N/m^2$，管壁厚 $T=0.5cm$，管材密度 $\rho_{Fe}=7.8g/cm^3$。

7. 假定管线末端的阀装置有很快的响应使水头速度关系遵循下列方程：$V=-2+0.45H-0.016H^2$，所有负速度都设为零，即阀门总是关闭的，阀门上有 20m 水头，50mm 直径管内为定常状态，在上游水库加一个 $10000N/m^2$ 的瞬时脉冲，求所引起系统内的瞬变。管长为 25m，波速 910m/s，摩擦系数 $f=0.028$。写出迹波传递，来回至少 8 个瞬变的程序。

8. 有热交换的一维气体由于热的变化而引起的运动由如下公式表示

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho v}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t}+\frac{\partial \rho v^2}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}=f+\rho g\cos\theta \quad (f\text{ 为流阻},\theta\text{ 为管道水平倾角})$$

$$\rho\left(\frac{\partial i}{\partial t}+v\frac{\partial i}{\partial x}\right)-\frac{1}{J}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+v\frac{\partial p}{\partial x}\right)=q''' \quad (i\text{ 焓},J\text{ 热功当量},q'''\text{ 发热率})$$

设有一封闭的长 10m 的管道，流体原是静止的，压力、温度均匀：

$$v=0,p=1.013N/m^3,\rho=0.6407kg/m^3,T=300K$$

气体为完全气体，$p/\rho=RT$，$R=286.85m^2/(S^2\cdot K)$

$t>0$ 时边界条件为

$$v(10)=0,\ T(0)=500K,\ p(0)=1.013N/m^2$$

求 t 从 1～10s 之间流场速度、温度的变化。

9. 有一港湾如图 B.2.29 所示，在进水处有一随时间变化的涌流，设

$$u=0,\ v=\sin(0.1t),\qquad (m/s)$$

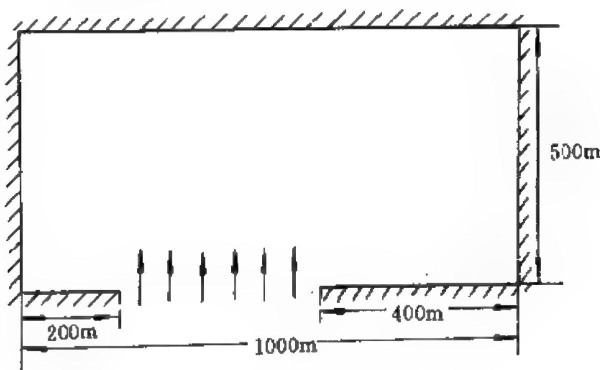


图 B.2.29

静止水深为 5m，水岸 $V_n=0$，求 V，H 随时间的变化方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial h}{\partial x}=0\\&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial h}{\partial y}=0\\&\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}+h\frac{\partial u}{\partial x}+h\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}$$

可采用通量分裂法。

有限元法

1. 大气层密度随高度发生变化，故光速也随高度发生变化；$C(z)=C_0+R(z-z_0)$，其中 C_0，R，z_0 为常数。光线沿最短时间路程行进的，试建立光线的微分方程。

2. 有一绳索，其密度为 $\rho(s)$，静止时绳索应处于最低位能，试建立绳索形状的微分方程（不计绳索拉伸变形）。

3. 设方程 $\Delta\Delta u=P$，证明相应变分原理为 $\delta I=0$，其中

$$I=\iint_\Omega\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)^2\right]-pu\right\}\mathrm{d}\Omega$$

4. 证明

$$\left.\begin{array}{l}y''-y+1=0\\ y(0)=y'(1)=0\end{array}\right\}$$

与变分原理 $\delta I=0$，$I=\int_0^1(-y'^2+y^2+2y)\mathrm{d}x$ 等价。

引入 $\{\phi_n\}$，$\phi_n=x^{n+1}-(n+1)x$，$n=1,2,\cdots$

设 $y=\sum_{n=1}^{N}y_n\phi_n$，代入变分原理后求近似解。

5. 选 $\{\varphi_n\}=\left\{\sin\frac{(2n-1)\ \pi x}{2}\right\}$，重复上述计算。

6. 用一次形函数 $\{\varphi_n\}$ 作函数空间（即 φ_n 在 x_n 点上为 1，在 x_{n-1}，x_n 及 x_n，x_{n+1} 区间上线性变化到零，在 $x<x_{n-1}$ 及 $x>x_{n+1}$ 时均取零值），重复上述计算。

7. 理想气体无旋流动方程与下列变分原理等价：

$$\delta I=0,\ I=\iiiint p\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

$$=p^0\iiiint\left\{1-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\rho^0}{p^0}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

其中 γ，p^0，ρ^0 为常数。试证明等价性。

8. 用有限元法解下列方程

(1) $y''-y=0$　　$y(0)=0\quad y(1)=\mathrm{sh}1$　　($\mathrm{sh}x$)

(2) $xy''+y'+y=9x^2+x^3$　　$y(0)=0\quad y(1)=1$　　(x^3)

(3) $\sin x\cdot y''+\cos x\cdot y'+xy^2=(x-1)\sin^2x+\cos^2x$

$y(0)=0\quad y(1)=\sin1$　　($\sin x$)

(4) $\mathrm{e}^xy''+\mathrm{e}^xy'+\sin x\cdot y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$　　$y(0)=1\quad y(1)=\mathrm{e}^{-1}$　　(e^{-x})

(5) $(x^2+x)y''+(2x+1)y'+\mathrm{e}^xy=6x^2+4x+x^2\mathrm{e}^x$

$y(0)=0\quad y(1)=1$　　(x^2)

9. 方程 $\Delta u=0$ 用有限元法求解时，如单元为正三角形，六个单元组成一正六角形，则正六角形中心点的 u 值等于周围六个角点上 u 值的平均值试证之。

10. 写出

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$$

$$u|_{\Gamma_1} = u_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = 0$$

的等价变分原理及一个三角形单元上的刚度阵 K^e。

11. 确定下面方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + 1 = 0, \qquad u(0) = 1, u(1) = 1.5$$

的离散化有限元方程并求解之。

12. 不可压无旋流动的流函数满足方程

$$\Delta\psi = 0$$

用有限元法求解（1）一平直槽道中有一圆柱时的流动；（2）一圆管中有一圆球时的流动（图 B.2.30）。

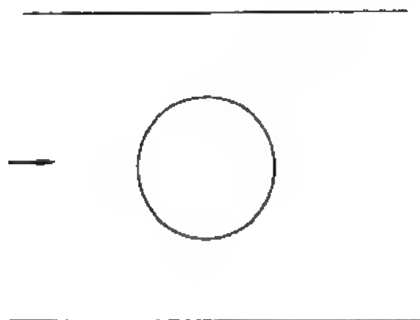


图 B.2.30

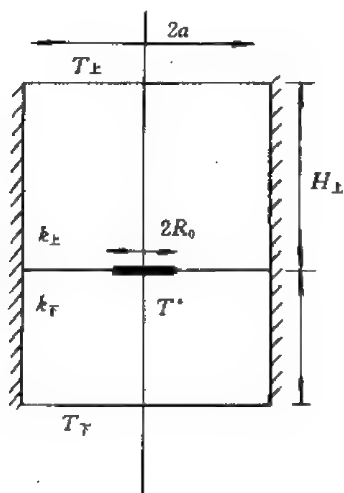


图 B.2.31

13. 试用有限元法计算柱体内的温度场（图 B.2.31）。

$k_{上} = 0.5\times10^{-5}$，

$k_{下} = 0.8\times10^{-4}$，

$R_0/a = 0.1$，$a = 5$。

$H_{上} = 5$，$H_{下} = 4$，

$T_{上} = 10\mathrm{K}$，$T_{下} = 15\mathrm{K}$，

$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=a} = 0$（绝热壁）。

直接法

1. 用 FFT 法数值求解

$$\Delta u = (\sin 5\pi y + \cos 7\pi y)x(1-x) \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

$$u|_y = u|_{y+2}$$

$$u(0,y) = 1 + \sin\left(3\pi y + \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$u(1,y) = 1.3 + \cos\left(\pi y + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Delta y = \frac{1}{64}, \qquad \Delta x = \frac{1}{100}$$

与超松弛迭代法作比较（计算精度和计算时间）。

2. 导出 $K_1=K=A-I$ 及 $K_2=A$ 情况下的循环消去法过程。

3. 用循环消去法解

$$\Delta u = 2 \qquad (0<x<2, 0<y<1)$$

$u|_\Gamma = (x^2+y^2)_{\text{边界上的值}}$

取 $\Delta x=\dfrac{1}{64+1}$，　$\Delta y=\dfrac{1}{50}$

与松弛法求解做比较

有限解析法

1. 设方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} - 2A\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f$$

A，f 为常数，试导出不等间距时的有限解析差分方程。

2. 求解方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(1) = 0, \quad u(0) = 1$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon = 1, 0.1, 0.001, 0.00001$$

3. 求解方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x \leqslant 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$u(-\infty,t) = 1, u(\infty,t) = 0 \quad t > 0$$

计算条件为

$$\begin{cases} a = 0.01 & \Delta t = 2\times 10^{-3} & x = 0.1 & T \leqslant 1.0 \\ a = 0.001 & \Delta t = 2\times 10^{-3} & x = 0.1 & T \leqslant 1.0 \end{cases}$$

精确解为

$$u(x,t) = \left\{1 + \exp\left[\frac{1}{2a}\left(x - \frac{t}{2}\right)\right]\frac{\operatorname{erfc}\left(-\dfrac{x}{2\sqrt{at}}\right)}{\operatorname{erfc}\left[\dfrac{x-t}{2\sqrt{at}}\right]}\right\}$$

试计算及比较之。

4. 用有限解析法求解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2A\frac{\partial u}{\partial x} - 2B\frac{\partial u}{\partial y} = (Ay + Bx)e^{Ax+By}$$

$$u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=1} = ye^{A+By}$$

$$u|_{y=0} = 0 \quad u|_{y=1} = xe^{Ax+B}$$

$$h = k = \Delta = 0.1, 0.01$$

$$A = B = 10, \quad 100$$

精确解为 xye^{Ax+By}，试计算并比较之。

5. 试建立方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2A\frac{\partial u}{\partial x} - 2B\frac{\partial u}{\partial y} - 2C\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

的有限解析法的差分方程。

提示：设 $u=X(x)Y(y)Z(z)$；所得特征为

$$A \pm \sqrt{A^2 + \lambda_1}, \quad B \pm \sqrt{B^2 + \lambda_2}, \quad C \pm \sqrt{C^2 + \lambda_3}$$

令

λ_1	0	$-A^2$	$-A^2$	0	B^2	C^2	0	⋮	$-A^2$	$-A^2$	B^2+C^2
λ_2	0	A^2	0	$-B^2$	$-B^2$	0	C^2	⋮	$-B^2$	A^2+C^2	$-B^2$
λ_3	0	0	A^2	B^2	0	$-C^2$	$-C^2$	⋮	A^2+B^2	$-C^2$	$-C^2$

6. 用有限解析法解方程

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial D}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial D}{\partial y}\right) = 0$$

求解域如图 B.2.32 所示，除 AB 段外均有 $\frac{\partial D}{\partial n}=0$，在 AB 段上 $D=D_0$，$k=0.01$

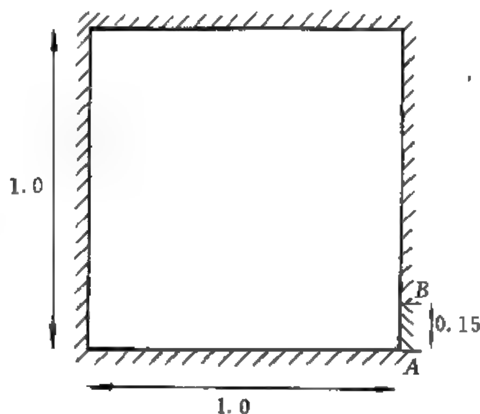


图 B.2.32

7. 用有限解析法解方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(m_x\varphi) + m_L\varphi_L - \Gamma A\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

$$0 < x < l, \quad l = 10$$

$$m_L = 0.01, \quad \Gamma A = 0.2, \quad \varphi_L = \varphi_0 = 10.0$$

$$m_x = -m_L x + C \quad (C\text{ 为常数})$$

计算二例：(1) $x=0$ $\quad m_x L/\Gamma A=40$ $\quad x=l$ $\quad m_x=0$

$\varphi=0$ $\quad \varphi=\varphi_0$

(2) $x=0$ $\quad m_x=0$ $\quad m_x L/\Gamma A=40$

$\varphi=0$ $\quad \varphi=\varphi_0$

谱方法

1. 用谱方法解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\qquad 0<x<\pi$$

$$u|_{t=0}=x(\pi-x)$$

选谱函数$\{e^{-\frac{1}{2}x}\sin nx\}$

2. 用谱方法解

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+cu\qquad a=c=1\quad 0<x<\pi$$

$$u|_{t=0}=x^2(\pi-x)^2$$

选谱函数$\{\sin nx\}$

3. 用谱方法解

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad -\pi<x<\pi$$

$$u|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{x}{\pi}+1 & -\pi<x<-\dfrac{\pi}{2}\\ -\dfrac{x}{\pi} & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{x}{\pi}-1 & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$$

4. 用 τ 方法解

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=(x+1)[2\cos t-(x+1)\sin t]$$

$$-1<x<1$$

$$u(-1,t)=0\quad u(x,0)=(x+1)^2$$

精确解为 $(x+1)^2\cos t$

C 篇 流场的数值计算

在 B 篇中已经介绍了各种常用的数值方法。本篇将介绍这些方法在流体力学及工程流动问题中的应用。应该指出，B 篇中介绍各种数值方法时均以线性模型方程为例，但当这些方法应用到具体问题中时，由于问题的复杂性及流体力学方程绝大多数是非线性的，所以会产生许多新的困难。为此，人们做了大量的努力，创立了一些新的方法和采取各种可能的实用措施，从而形成了流体力学的一个新分支——计算流体动力学。本篇将介绍这些新的方法和应用时应采取的措施。

读者除了解各种新方法外，特别要重视实践，即亲自动手编制程序，调试程序并进行实际计算。只有这样才能掌握各种方法的特点并享受成功的乐趣。

第 1 章 贴 体 坐 标

1.1 贴体坐标的概念

上一篇讨论数值计算方法时都是针对矩形域。实际流场大都不是矩形域。如圆柱绕流，这是一个典型的流体力学问题，其求解域就不是矩形域。在具体问题中这种例子比比皆是，比如机翼的绕流，热交换器内的管间流动，河道流动等，如图 C.1.1 所示。

因为在实际问题中矩形网格的局限性太大，而有限元法对网格的选用几乎没有什么限制，所以得到了广泛的应用。

曲线坐标给人们以启示，比如对于圆柱的理想不可压缩流场，其位势满足 Laplace 方程；在直角坐标下选用矩形网格时，边界处理比较困难，但如用柱坐标，方程可改写为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}=0 \tag{C.1.1.1}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a}=0\\&\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta}\sin\theta\right)_{r=\infty}=U_\infty\end{aligned}\right\} \tag{C.1.1.2}$$

其中 θ 为幅角，r 为矢径，φ 为位势，a 为圆柱半径。实际计算时取 $r=R$ 作外边界，$R\gg a$。网格由 $r=$常数，$\theta=$常数的坐标线族构成，如图 C.1.2 所示。

如果建立 r-θ 平面，则可以看出物理平面上的求解域对应 r-θ 平面上的一个矩形域。另外物体表面则与坐标系中的某一坐标线相吻合。

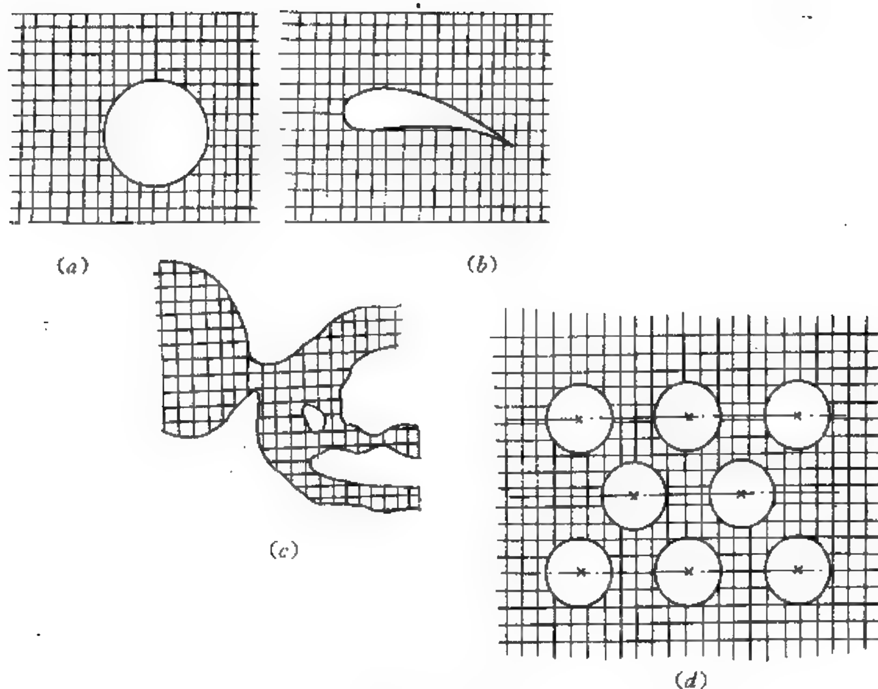


图 C.1.1

(a) 圆柱；(b) 机翼；(c) 河道；(4) 热交换器排管

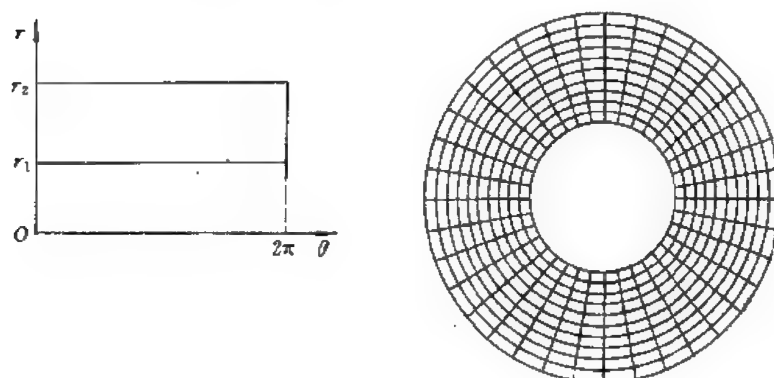


图 C.1.2

对于机翼绕流问题，人们也可以利用保角变换将机翼外的区域变换为一个单位圆的外域，进而变换为一平板的外域。其中等位线和流线就构成了一曲线坐标系，它对于 (ϕ, ψ) 平面也是一个矩形域（中心处开裂缝），物面则与一流线吻合，如图 C.1.3 所示。

上述二个例子给人们以启示，对于具有复杂形状的区域，可以采用曲线坐标系，并且使物面与坐标系内某一坐标线吻合。这种坐标系可以是正交的（如上述二例），也可以是非正交的。网格的分布可以是均匀的，也可以是非均匀的，视问题的需要而定。此外网格还可以设计为自动调节的，即所谓自适应网格。

所谓贴体坐标就是一种曲线坐标，求解域的边界与坐标曲面（线）相重合。一般表示为

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(x,y,z) \\ \eta &= \eta(x,y,z) \\ \zeta &= \zeta(x,y,z) \end{aligned}\right\} \tag{C.1.1.3}$$

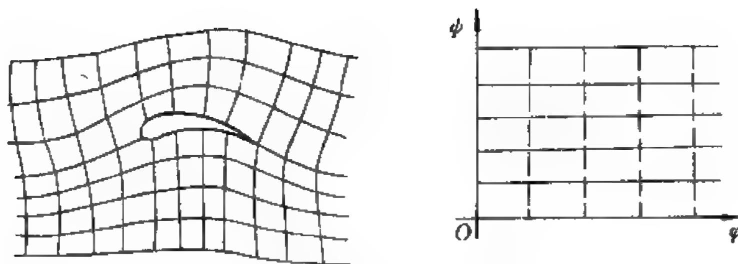


图 C.1.3

边界为 $\xi_i=\xi_{i0}$ ($i=1, 2, 3, \xi_1=\xi, \xi_2=\eta, \xi_3=\zeta$) 求解域在物理空间内呈复杂形状，在变换后的空间为矩形域或矩形的组合(空间问题时求解域为长方体或它们的组合)。

贴体坐标应尽可能地正交，尽可能避免奇性点的出现（如角点等，在不可避免时需做特殊处理)。网格分布应与物理问题本身相匹配，也就是说疏密分布应与物理量的变化速度相适应。以上这些问题在贴体坐标生成时均应考虑。

贴体坐标的概念最早始于 1971 年，它是由 W.H.Chu 提出的，F.Thomas 首次应用贴体坐标。十多年来，由于贴体坐标生成技术迅速发展，贴体坐标也得到日益广泛的应用。差分技术由于其程序设计比有限元简单得多也得到进一步发展。特别是流体力学中有限差分法的应用比有限元广泛得多。

1.2 贴体坐标的生成

贴体坐标的生成主要有三种方法：代数生成，微分方程生成以及保角变换生成三大类。

由于所处理问题的复杂和不规则，一般都只能采用数值生成的方法，即 (x, y, z) 与 (ξ, η, ζ) 之间不能用解析式表达，只能由离散化的数值方法来表示。这里主要介绍数值生成的方法。

1.2.1 代数生成方法

代数生成方法实际上是一种插值方法，下面以叶栅通道来说明这一方法的基本思想。

其边界表示为

$$AB: x=x_0$$

$$CD: x=x_M$$

$$BFHD: y=y_0(x)$$

$$AEGC: y=y_N(x)$$

图 C.1.4 为叶栅通道示意图。

引入

$$\bar{\xi}=\frac{x-x_0}{x_M-x_0} \qquad \bar{\eta}=\frac{y-y_0}{y_N-y_0} \tag{C.1.2.1}$$

则 $ABFHDCGEA$ 域在 $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ 平面上为一正方形域，其中

$$0\leqslant\bar{\xi}\leqslant1, \quad 0\leqslant\bar{\eta}\leqslant1$$

这里变换 (C.1.2.1) 又叫剪切变换，因为它将 x、y 平面上的平行四边形变换为 $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ 平面上的长方形。

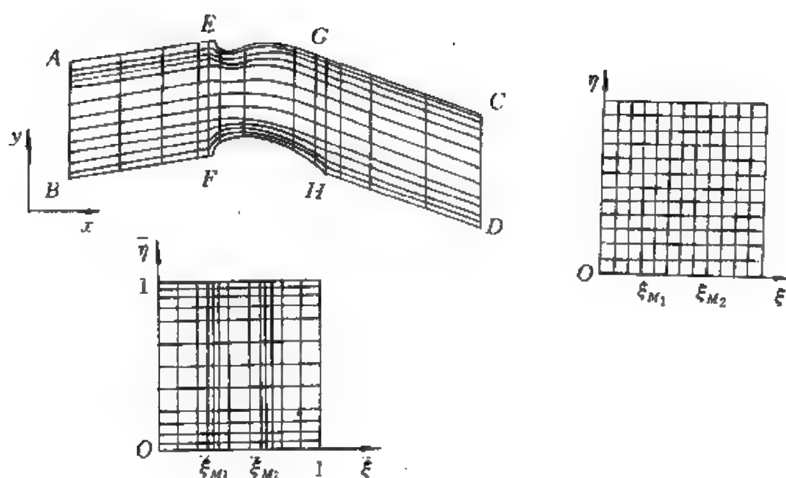


图 C.1.4

如果进一步引入变换

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\xi} &= \begin{cases} \dfrac{\xi_{M_1}}{b_1}\text{th}\left[\dfrac{\xi}{\xi_{M_1}}\text{th}^{-1}b_1\right] & 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_M \\ (\xi_{M_2}-\xi_{M_1})\left\{\dfrac{1}{2b_2}\text{th}\left[\left(2\,\dfrac{\xi-\xi_{M_1}}{\xi_{M_2}-\xi_{M_1}}-1\right)\text{th}^{-1}b_2\right]+\dfrac{1}{2}\right\}+\xi_{M_2} & \xi_{M_1} \leqslant \xi \leqslant \xi_{M_2} \\ (1-\xi_{M_2})\left\{\dfrac{1}{b_3}\text{th}\left[\left(\dfrac{\xi-\xi_{M_2}}{1-\xi_{M_2}}-1\right)\text{th}^{-1}b_3\right]-1\right\}+\xi_{M_2} & \xi_{M_2} \leqslant \xi \leqslant 1 \end{cases} \\
\bar{\eta} &= \frac{1}{2a}\text{th}[(2\eta-1)\text{th}^{-1}a]+\frac{1}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{C.1.2.2}$$

其中 a，b_1，b_2，b_3 均为大于零的常数，在（0，1）范围内选用。通过以上变换就可以将非均匀网格变为 ξ，η 平面上的均匀网格了。这种变换有时也叫拉伸变换。

将上述两种变换组合起来，就将不均匀分布的坐标曲线与均匀分布坐标曲线联系起来了。

这里采用的实际是线性插值法，比如（C.1.2.1）式可以写作

$$\left.\begin{aligned} x &= (1-\bar{\xi})x_0 + \bar{\xi}x_M \\ y &= (1-\bar{\eta})y_0 + \bar{\eta}y_N \end{aligned}\right\} \tag{C.1.2.3}$$

进一步写成

$$\left.\begin{aligned} x &= f_0^{(x)}(\bar{\xi})x_0 + f_M^{(x)}(\bar{\xi})x_M \\ y &= f_0^{(y)}(\bar{\eta})y_0 + f_N^{(y)}(\bar{\eta})y_N \end{aligned}\right\} \tag{C.1.2.4}$$

这里 $f^{(x)}$ 及 $f^{(y)}$ 均为插值函数，（C.1.2.3）中显然是线性插值。

实用中还有许多特殊的插值函数，最常用的还有以下几种：

（1）Lagrange 插值公式

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N}\varphi_n(x)f_n \tag{C.1.2.5}$$

其中
$$\phi_n(x)=\prod_{\substack{l\neq n\\l=1}}^{N}\frac{x-x_l}{x_n-x_l} \tag{C.1.2.6}$$

显然
$$\phi_n(x_m)=\delta_{nm}\qquad(m,n=1,2,\cdots,N) \tag{C.1.2.7}$$

（2）Hermite 插值公式

Lagrange 公式只拟合函数值，Hermite 公式不只拟合函数值还拟合导数值，即
$$f(x)=\sum_{n=1}^{N}\omega_n(x)\cdot f_n+\sum_{n=1}^{N}\psi_n(x)f'_n \tag{C.1.2.8}$$
$$\left.\begin{aligned}\omega_n(x)&=[1-2\phi'_n(x)(x-x_n)]\phi_n^2(x)\\ \psi_n(x)&=(x-x_n)\phi_n^2(x)\end{aligned}\right\} \tag{C.1.2.9}$$

其中 f_n 是 f 在 x_n 点的函数值，f'_n 则为导数值，$\phi_n(x)$ 为拉格朗日插值函数。显然这里有：
$$\left.\begin{aligned}\omega_n(x_m)&=\delta_{nm}\qquad \omega'_n(x_m)=0\\ \psi_n(x_m)&=0\qquad \psi'_n(x_m)=\delta_{nm}\end{aligned}\right\} \tag{C.1.2.10}$$

（3）Spline 插值公式

以上公式均为多项式插值，当插值点很多时会引起不必要的波动。Spline 插值在每一个小区间内是三次插值。

可以写作
$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{(x_{j+1}-x)^3}{6(x_{j+1}-x_j)}f''_j+\frac{(x-x_j)^3}{6(x_{j+1}-x_j)}f''_{j+1}+\left(\frac{1}{x_{j+1}-x_j}f_j-\frac{x_{j+1}-x_j}{6}f''_j\right)(x_{j+1}-x)\\&+\left(\frac{1}{x_{j+1}-x_j}f_{j+1}-\frac{x_{j+1}-x_j}{6}f''_{j+1}\right)(x-x_j)\end{aligned} \tag{C.1.2.11}$$
$$x_j<x<x_{j+1}\quad(j=1,2,\cdots,N-1)$$

而 f''_j 应满足以下方程（即插值公式区间联接处应当导数相等，即光滑联接）：
$$\begin{aligned}&(x_j+x_{j-1})f''_{j-1}+2(x_{j+1}-x_{j-1})f''_j+(x_{j+1}-x_j)f''_{j+1}\\&=6\left(\frac{f_{j+1}-f_j}{x_{j+1}-x_j}-\frac{f_j-f_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}\right)\qquad(j=2,3,\cdots,N-1)\end{aligned} \tag{C.1.2.12}$$

取 $f''_1=f''_N=0$，在确定 f''_j 后插值公式就完整了。

在确定插值公式后，代数生成法就容易建立了。用不同的插值公式可以建立不同的代数生成法。如一曲边四边形，设想它对应一矩形域。在曲边四边形中选取一些内点（可以根据需要人为地选用），这些内点以（i，j）标号表示。它们的位置为（x_{ij}，y_{ij}），它们对应 ξ，η 中的（ξ_i，η_j）点，如图 C.1.5 所示。

设（x_{1j}，y_{1j}），（x_{2j}，y_{2j}），…，（x_{xj}，y_{xj}）点均在 $\eta=\eta_j$ 所对应的曲线上。在这些点之间的曲线上的点的坐标可以用插值公式计算得到。比如设 $\alpha_i(\xi)$ 是一插值公式（它可以是 Lagrange公式，Spline 公式），在 $\eta=\eta_j$ 上的任意与 ξ 值对应的点的坐标为
$$\left.\begin{aligned}x(\xi,\eta_j)&=\sum_{i=1}^{I}\alpha_i(\xi)x_{ij}\\ y(\xi,\eta_j)&=\sum_{i=1}^{I}\alpha_i(\xi)y_{ij}\end{aligned}\right\} \tag{C.1.2.13}$$

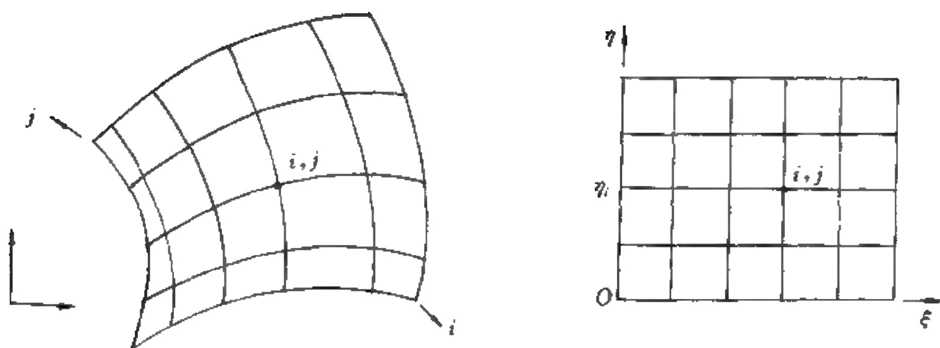


图 C.1.5

其中 $$a_i(\xi_k)=\delta_{ik}\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ I)$$

类似地

$$\left.\begin{aligned}x(\xi_i,\eta)&=\sum_{j=1}^{J}\beta_j(\eta)x_{ij}\\ y(\xi_i,\eta)&=\sum_{j=1}^{J}\beta_j(\eta)y_{ij}\end{aligned}\right\}\tag{C.1.2.14}$$

其中 $$\beta_j\ (\eta_l)\ =\delta_{jl}\qquad (j,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ J)$$

这样就生成了一组曲线坐标，这种方法可以推广到三维。

如果在 i，j 点不只要求坐标曲线通过其位置，并且要求沿确定的方向，这时就要求给定下列导数$\frac{\partial x}{\partial \xi}$，$\frac{\partial x}{\partial \eta}$；$\frac{\partial y}{\partial \xi}$，$\frac{\partial y}{\partial \eta}$。这样就可以采用 Hermite 公式做插值。在坐标点上这样做易于保证正交或接近正交，但在非给定节点则不能保证，有时反而更差。因此一般应当用图象显示的方法观察并进行修正。关于它的作法以及其它相关的方法在此不做详细介绍，读者可以参看 J. F. Thompson 的专著。

1.2.2 保角变换

保角变换的数学基础是复变函数中的解析变换，因此它所得到的坐标是正交的。设物理平面为（x，y），其上任一点可以用复数 $z=x+iy$ 表示，而变换平面为 $\zeta=\xi+i\eta$ 平面，其中 ζ 与 z 之间的关系为一解析函数关系 $\zeta=\zeta(z)$。解析函数的条件是 ξ，η 满足柯西-黎曼条件，即

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \eta}{\partial y},\qquad \frac{\partial \xi}{\partial y}=-\frac{\partial \eta}{\partial x}\tag{C.1.2.15}$$

在流体力学中常用的保角变换为

儒可夫斯基变换

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{a^2}{z}\right)\quad 或\quad \frac{\zeta-a}{\zeta+a}=\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^2\tag{C.1.2.16}$$

它的变换如图 C.1.6 所示。

广义儒可夫斯基变换

$$\frac{\zeta-a}{\zeta+a}=\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{2-\sigma}\tag{C.1.2.17}$$

$\sigma>0$，为一小数，它将一尾缘角不为零的机翼外缘变换为一圆。

指数函数

$$\zeta=e^{\frac{2\pi z}{a}}\tag{C.1.2.18}$$

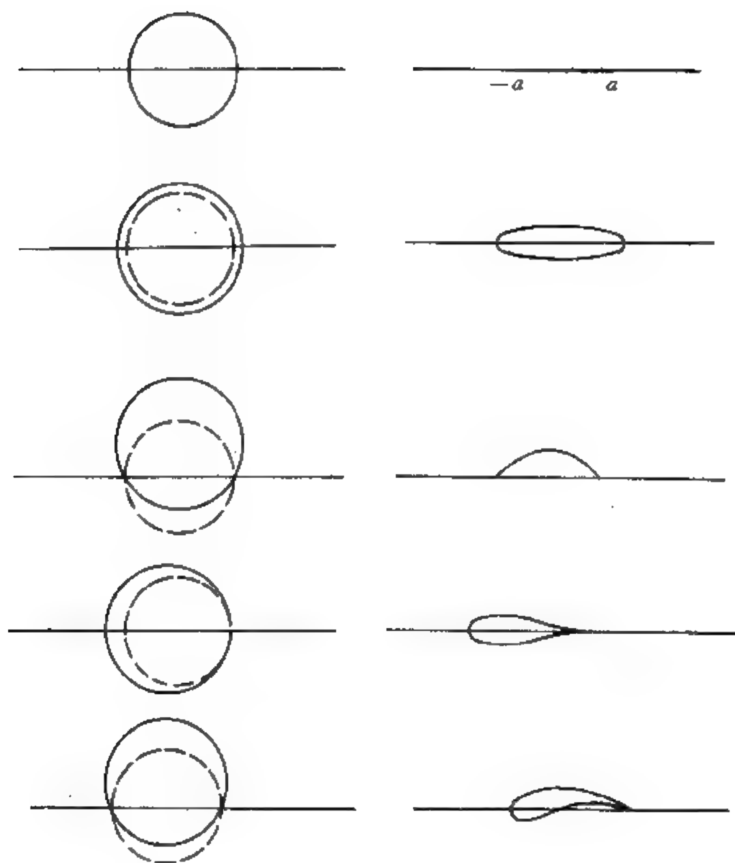


图 C.1.6

它将 $0<y<a$ 的条状区变为全平面，但正实轴除外，所以它可以将叶栅变为单翼。

近似圆变为圆

$$\ln\frac{z}{\zeta}=C_0+\frac{C_1}{\zeta}+\frac{C_2}{\zeta^2}+\cdots \tag{C.1.2.19}$$

z 平面上为圆，ζ 平面上为近似圆，C_0，C_1，C_2…由叠代计算确定。

舒瓦兹-克列斯托夫尔变换 (Schwarz-Christoffel) 将多角形的内域变换为一个半平面，如图 C.1.7 所示。

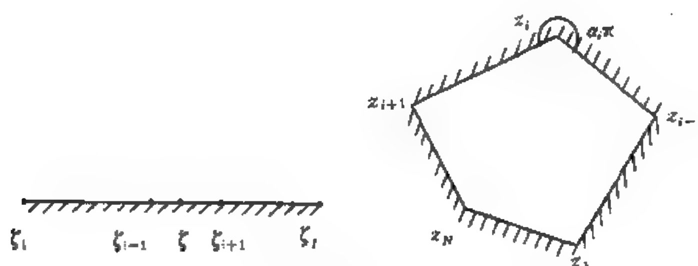


图 C.1.7

其变换为

$$z = \int \frac{\mathrm{d}\zeta}{C\prod_{i=1}^{N}(\zeta - \zeta_i)^{\alpha_i}} \tag{C.1.2.20}$$

在以上变换的基础上，如设 $\zeta(z)$ 和 $x(\zeta)$ 均为解析函数，则 $x(z)$ 也是解析函数。利用这一点可以构成许多保角变换。

但保角变换的局限性比较大。首先已知的典型变换不多（除了以上讨论的外常用的已不多了）；其次该方法比较适用于反问题，即给一变换看变成什么形状，从已知域的形状来确定相应的变换是困难的，有时往往是不可能的；最后该方法只能应用于二维问题。

1.2.3 解椭圆型方程的数值生成方法

设坐标变换关系为

$$(x,y) \Longleftrightarrow (\xi,\eta)$$

希望变换前后的坐标都是正交的，这就要求

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

或由此得到关系

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{C.1.2.21}$$

求解这两个方程就可以得到 $\xi(x,y)$；$\eta(x,y)$，变换关系就建立了。但由于所得到的解未必满足柯西-黎曼条件，所以坐标线不一定正交。如希望正交或尽可能正交，则需采取进一步措施（见后面的讨论）。

在实际使用时，由于区域在 $(x,\ y)$ 平面上是一个不规则区，而在 $(\xi,\ \eta)$ 平面上则是一规则区；另外在 $(x,\ y)$ 平面的边界上可以选定几个与 $(\xi,\ \eta)$ 平面的规则区域边界对应的点，这样一来，实际就给出了 $(\xi,\ \eta)$ 平面求解域边界上的 x，y 值，因此，如果将方程转变为以 ξ，η 为自变量将更为方便。

由于

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \xi} \end{aligned}\right\} \tag{C.1.2.22}$$

$$J = \det\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right|$$

利用这些关系式可以将方程（C.1.2.21）变换为

$$\left.\begin{aligned} Ax_{\xi\xi} - 2Bx_{\xi\eta} + Cx_{\eta\eta} = 0 \\ Ay_{\xi\xi} - 2By_{\xi\eta} + Cy_{\eta\eta} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{C.1.2.23}$$

其中 $A = x_\eta^2 + y_\eta^2$，$C = x_\xi^2 + y_\xi^2$，$B = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$

由于 $B^2 - AC < 0$，故方程保持椭圆型。

实际上由于人们希望坐标是正交的，因正交时 $B=0$，所以为了计算方便，也可以将方程简化为 $B=0$，即直接解

$$\left.\begin{aligned} Ax_{\xi\xi} + Cx_{\eta\eta} = 0 \\ Ay_{\xi\xi} + Cy_{\eta\eta} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{C.1.2.24}$$

由于 $A>0$，$C>0$，所以它是 Laplace 型方程，它们的解只在边界上取极值。因此只要边界上的点取单调值，即点的顺序是单调的，则解将是唯一的，而且不会出现坐标线的交错与分岔，坐标曲面的卷折。坐标的稀疏情况将与边界点的设置有关。

图 C.1.8 分别表示 O 型，C 型及 O-C 型的变换。

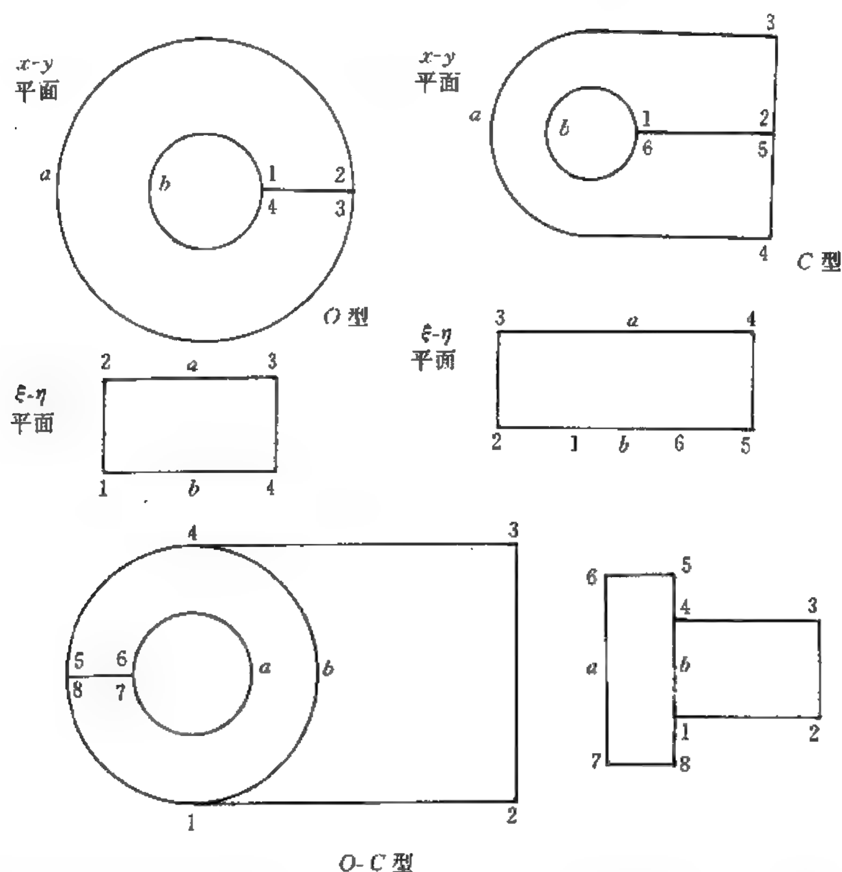


图 C.1.8

以上变换是均匀的或者称作自然的，也就是说只与边界的设置有关。事实上，如果加上一些辅助项还能使坐标拉伸或压缩，间距也得以调整。下面就来说明这一点。

考察方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}x^2}=0$$

它的解为　　$\xi=C_1x+C_2$

这就建立了 ξ-x 的转换关系，显然这是一个线性转换。ξ 坐标上等间距的点变换到 x 轴上时也是等间距的。如果方程改为

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}x^2}=C$$

它的解为　　$\xi=\frac{1}{2}Cx^2+C_1x+C_2$

为方便起见，设端点的条件为 $\xi(x=0)=0$，

$\xi(x=x_M)=1$，则有

$$\xi=\frac{1}{2}Cx^2+\left(1-\frac{1}{2}Cx_M^2\right)x/x_M$$

在 ξ 坐标上选取的等距点，对应在 x 坐标上已不是等距点了。当 $C>0$ 时，$x=0$ 处的点加密，$C<0$ 时则变疏。可见改变 C 值就可以改变网格点的疏密。如果人们希望在确定的 ξ_1 所对应的 x_1 附近改变坐标的疏密可以采用以下的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}x^2}=-a\mathrm{sgn}(\xi-\xi_1)\exp\{-C|\xi-\xi_1|\} \tag{C.1.2.25}$$

其中

$$\mathrm{sgn}(\eta)=\begin{cases}1 & \eta>0\\ 0 & \eta=0\\ -1 & \eta<0\end{cases} \tag{C.1.2.26}$$

这时对应 ξ_1 的 x_1 处附近坐标变疏。如果有 n 个这样的点可取如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}x^2}=-\sum_{i=1}^{p}a_i\mathrm{sgn}(\xi-\xi_i)\exp\{-C_i|\xi-\xi_i|\} \tag{C.1.2.27}$$

当 C_i 比较大时，由于指数函数衰减很快，所以各点间的影响可以很小。图 C.1.9 显示了以上几种情况的 x-ξ 之间的关系

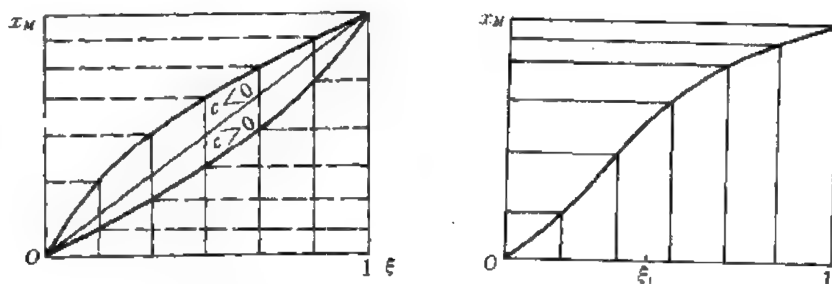


图 C.1.9

将上述方法推广到二维问题中，得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=P(\xi,\eta)\\ \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=Q(\xi,\eta)\end{aligned}\right\} \tag{C.1.2.28}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}P(\xi,\eta)=&-\sum_{i=1}^{p}a_i\mathrm{sgn}(\xi-\xi_i)\exp[-c_i|\xi-\xi_i|]\\ &-\sum_{j=1}^{q}b_j\mathrm{sgn}(\xi-\xi_j)\exp\left[-d_j\sqrt{(\xi-\xi_j)^2+(\eta-\eta_j)^2}\right]\\ Q(\xi,\eta)=&-\sum_{i=1}^{p}a_i\mathrm{sgn}(\eta-\eta_i)\exp[-c_i|\eta-\eta_i|]\\ &-\sum_{j=1}^{q}b_j\mathrm{sgn}(\eta-\eta_j)\exp\left[-d_j\sqrt{(\eta-\eta_j)^2+(\xi-\xi_j)^2}\right]\end{aligned}\right\} \tag{C.1.2.29}$$

实际求解时用逆变换方程

$$\left.\begin{aligned}&\alpha x_{\xi\xi}-2\beta x_{\xi\eta}+\gamma x_{\eta\eta}=-J^2(x_\xi P(\xi,\eta)+x_\eta Q(\xi,\eta))\\ &\alpha y_{\xi\xi}-2\beta y_{\xi\eta}+\gamma y_{\eta\eta}=-J^2(y_\xi p(\xi,\eta)+y_\eta Q(\xi,\eta))\\ &\alpha=x_\eta^2+y_\eta^2 \qquad \gamma=x_\xi^2+y_\xi^2\\ &\beta=x_\xi x_\eta+y_\xi y_\eta \qquad J=x_\xi y_\eta-x_\eta y_\xi\end{aligned}\right\} \tag{C.1.2.30}$$

应该说明的是，这里实际生成了一个椭圆型方程。求解时边界值给定，采用超松弛迭代，计算是比较花时间的。实际上因为坐标是人为选定的，即使得到精确解也不能保证是正交坐标系。所以实际计算时方程可以简化，迭代精度不要过高。右端项可以取作零，在一次变换后再作拉伸、压缩变换就可以得到变距网格。这种方法比直接解（C. 1. 2. 30）式要简单得多。

为了进一步简化计算，人们采用以下两种简化的方法：

（1）双曲型方程网格生成法

人们希望得到正交网格，故应当有

$$\nabla\xi \cdot \nabla\eta = 0$$

通过变换得到方程

$$x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0 \tag{C. 1. 2. 31}$$

又若人为地给出 $(\xi, \eta) \Rightarrow (x, y)$ 各点的放大系数 H，这相当于给定雅可比行列式的值

$$x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = H(\xi,\eta) \tag{C. 1. 2. 32}$$

（C. 1. 2. 31，32）式构成一对方程，局部线性化后可得：

$$\left.\begin{aligned} x_\eta^0 x_\xi + y_\eta^0 y_\xi + x_\xi^0 x_\eta + y_\xi^0 y_\eta = 0 \\ y_\eta^0 x_\xi - x_\eta^0 y_\xi - y_\xi^0 x_\eta + x_\xi^0 y_\eta = H(\xi,\eta) \end{aligned}\right\} \tag{C. 1. 2. 33}$$

其中，x^0，y^0 是事先构成的一组初值。（C. 1. 2. 33）式可简写为

$$A\boldsymbol{r}_\xi + B\boldsymbol{r}_\eta = \boldsymbol{F} \tag{C. 1. 2. 34}$$

其中

$$\boldsymbol{r}=\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad A=\begin{bmatrix} x_\eta^0 & y_\eta^0 \\ y_\eta^0 & -x_\eta^0 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} x_\xi^0 & y_\xi^0 \\ -y_\xi^0 & x_\xi^0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{F}=\begin{Bmatrix} 0 \\ H+H^0 \end{Bmatrix} \tag{C. 1. 2. 35}$$

这是一个双曲型方程，对 ξ 用中心差分，η 用后向差分计算可推进进行。类似地也可有 ξ 为后向差分，η 为中心差分进行计算。计算分别沿 η，ξ 方向作 n 次，即得 (x, y) 和 (ξ, η) 之间的数值变换关系。计算时为稳定引入人工粘性系数，具体格式如下：

$$\boldsymbol{r}_{i,j+1} - \boldsymbol{r}_{i,j} + \frac{1}{2}B^{-1}A(\boldsymbol{r}_{i+1,j+1} - \boldsymbol{r}_{i-1,j+1}) = B^{-1}\boldsymbol{F}_{i,j+1} + \varepsilon \cdot (\nabla_i \nabla_j)^2 \boldsymbol{r}_{i,j} \tag{C. 1. 2. 36}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_i \boldsymbol{r}_{i,j} = \boldsymbol{r}_{i+1,j} - \boldsymbol{r}_{i,j} \qquad \nabla_j \boldsymbol{r}_{i,j} = \boldsymbol{r}_{i,j} - \boldsymbol{r}_{i,j-1} \\ &(\nabla_i \nabla_j)^2 \boldsymbol{r}_{i,j} = \boldsymbol{r}_{i+2,j} - 2\boldsymbol{r}_{i+2,j-1} + \boldsymbol{r}_{i+2,j-2} - 2\boldsymbol{r}_{i+1,j} \\ &\qquad + 4\boldsymbol{r}_{i+1,j-1} - 2\boldsymbol{r}_{i+1,j-2} + \boldsymbol{r}_{i,j} - 2\boldsymbol{r}_{i,j-1} + \boldsymbol{r}_{i,j-2} \end{aligned}\right\} \tag{C. 1. 2. 37}$$

ε 人为选定，它起稳定计算的作用。H^0 可取零。这一计算可以反复 n 次，由于计算是推进进行的，故工作量不大。这里求解的是一双曲型方程，故又称作双曲型方程生成法。

（2）抛物型方程生成法

如果对计算做进一步简化，还可以得到更加简单的抛物型生成法。具体作法如下。

在采用椭圆型方程生成网格时一般采用中心差分格式。为简单起见，设方程为 Laplace 方程（其它系数较为复杂的方程作法一样），即

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{C. 1. 2. 38}$$

差分格式如图 C. 1. 10，则差分方程为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{x_{i-1,j}-2x_{i,j}+x_{i+1,j}}{\Delta\xi^2}+\frac{x_{i,j-1}-2x_{i,j}+x_{i,j+1}}{\Delta\eta^2}=0\\
&\frac{y_{i-1,j}-2y_{i,j}+y_{i+1,j}}{\Delta\xi^2}+\frac{y_{i,j-1}-2y_{i,j}+y_{i,j+1}}{\Delta\eta^2}=0
\end{aligned}\right\}\qquad(C.1.2.39)
$$

若将 $x_{IM,j}$，$y_{IM,j}$代替 $x_{i+1,j}$，$y_{i+1,j}$，则由于

$$
\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}\approx\frac{(IM-i)x_{i-1,j}-(IM-i+1)x_{i,j}+x_{IM,j}}{(IM-i)(IM-i+1)\Delta\xi^2/2}
$$

(C.1.2.39) 式可改写为

$$
\frac{(IM-i)x_{i-1,j}-(IM-i+1)x_{i,j}+x_{IM,j}}{(IM-i)(IM-i+1)\Delta\xi^2/2}+\frac{x_{i,j-1}-2x_{i,j}+x_{i,j+1}}{\Delta\eta^2}=0\qquad(C.1.2.40)
$$

由于 $x_{IM,j}$ 是已知的，$x_{i-1,j}$ 在推进计算中由上一步计算得到，所以可以建立关于 $x_{i,2}$，$x_{i,3}$，…，$x_{i,IM-1}$的代数方程组。这样可以先计算 $i=2$（$i=1$ 的 $x_{1,j}$ 也是已知的），再计算 $i=3$，…，$i=IM-1$。当系数比较复杂时可以推进 n 次，使计算值稳定下来就不再计算了。如果将 $x_{i,IM}$代替 $x_{i,j+1}$，则 η 方向也可用类似的差分格式，于是可以逐点计算了。因为 $x_{i-1,j}$，$x_{i,j-1}$都由上一步计算得到了。这样计算起来就十分方便。y 的计算也是类似的。这种方法称之为抛物型方程生成法，因为将（C.1.2.40）作台劳展开可得

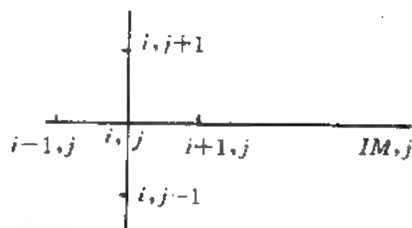


图 C.1.10

$$
a\frac{\partial x}{\partial\xi}=\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}+cx+d+O(\Delta\xi,\Delta\eta^2)\qquad(C.1.2.41)
$$

其中 $a=\dfrac{2}{\xi_{IM}-\xi_{i-1}}$，$c=\dfrac{2}{(\xi_{IM}-\xi_i)(\xi_{IM}-\xi_{i-1})}$，$d=\dfrac{2x_{IM,j}}{(\xi_{IM}-\xi_i)(\xi_{IM}-\xi_{i-1})}$

不难看出（C.1.2.41）式为抛物型方程。

应当说明一点是，由于计算是推进进行的，利用上述这些方法网格的好坏不易控制，要有一定的经验，所以实际使用时应与图象显示结合，不断调整边界点的位置以得到比较好的网格。

1.2.4 正交网格生成

前面讨论中已经指出，除保角变换方法外其它方法都不能保证网格是正交的。实际使用中发现，正交网格产生的附加误差最小，特别在壁面边界附近，正交性的要求更高。

由正交性条件知，(x,y) 与 (ξ,η) 之间应当满足柯西-黎曼条件，即

$$
\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y},\quad\frac{\partial\xi}{\partial y}=-\frac{\partial\eta}{\partial x}\qquad(C.1.2.42)
$$

由于
$$
d\xi=\frac{\partial\xi}{\partial x}dx+\frac{\partial\xi}{\partial y}dy
$$

故
$$
\left.\begin{aligned}
(\mathrm{d}\xi)_\eta &= \frac{\partial \xi}{\partial x}(\mathrm{d}x)_\eta + \frac{\partial \xi}{\partial y}(\mathrm{d}y)_\eta \\
0 &= \frac{\partial \xi}{\mathrm{d}x}(\mathrm{d}x)_\xi + \frac{\partial \xi}{\partial y}(\mathrm{d}y)_\xi \\
0 &= \frac{\partial \eta}{\partial x}(\mathrm{d}x)_\eta + \frac{\partial \eta}{\partial y}(\mathrm{d}y)_\eta \\
(\mathrm{d}\eta)_\xi &= \frac{\partial \eta}{\partial x}(\mathrm{d}x)_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial y}(\mathrm{d}y)_\xi
\end{aligned}\right\} \tag{C.1.2.43}
$$
同理

其中 $(\mathrm{d}\,*)_\xi$ 表示 ξ 不变的微分量，且有
$$
\frac{(\mathrm{d}x)_\eta}{(\mathrm{d}\xi)_\eta} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \qquad \frac{(\mathrm{d}x)_\xi}{(\mathrm{d}\eta)_\xi} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \qquad \frac{(\mathrm{d}y)_\xi}{(\mathrm{d}\eta)_\xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta} \qquad \frac{(\mathrm{d}y)_\eta}{(\mathrm{d}\xi)_\eta} = \frac{\partial y}{\partial \xi}
$$
以及 $\mathrm{d}\xi_\xi = 0 \qquad \mathrm{d}\eta_\eta = 0$

因此由（C.1.2.43）式可得
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \eta} \\
\frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \xi}
\end{aligned} \tag{C.1.2.44}
$$
其中
$$
J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right|
$$
利用（C.1.2.44）式不难将柯西-黎曼条件改写为
$$
\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \xi}
$$
消去 J 即得
$$
\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}
$$
于是直接得到方程
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= 0
\end{aligned} \tag{C.1.2.45}
$$
在实际使用中还可以引入尺度因子，即
$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{C.1.2.46}
$$
利用中心差分格式求解。但这样得到的不一定是正交网格线，关键在于不断调整边界点。具体做法是，首先在边界上假设一些点，即给出 (ξ,η) 求解域边界上的 x，y 值，求解（C.1.2.46）式后得到网格点。由边界内相邻网格线上的节点向边界做垂线，得到新的垂足，用它来代替旧点，重复以上过程直到新点和旧点之间的距离足够小为止（参见图 C.1.11）。这里为实现收敛，要求原边界的角点处（如图 C.1.11）应当有相邻边正交的条件，否则将无法收敛。当然收敛条件也不必过于苛求，以免花费机时过多。

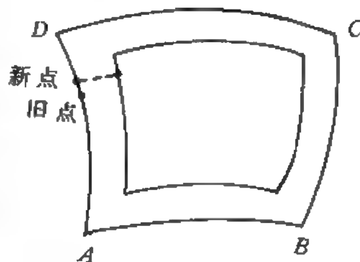


图 C.1.11

以上比较详细地讨论了贴体网格微分方程的生成方

法。虽然所举的是二维的例子，但对三维问题其方法是相同的。此时计算量将大大增加，另外生成正交化或接近正交化的网格将更加困难。

1.3 转换关系

在确定贴体坐标系后需要将方程由直角坐标系转换到曲线坐标中去。

设曲线坐标系为 $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$，直角坐标系为 $(x,\ y,\ z)$，它们之间的关系记作

$$\xi=\xi(x,y,z)\quad \eta=\eta(x,y,z)\quad \zeta=\zeta(x,y,z) \tag{C.1.3.1}$$

利用复合函数求导的方法可以得到

$$\left.\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial \xi}{\partial z} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial \eta}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial \zeta}\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial \eta}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial \zeta}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{C.1.3.2}$$

引入记号

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=(\boldsymbol{F}_\gamma)^{\mathrm{T}},\quad \left(\frac{\partial f}{\partial \xi},\frac{\partial f}{\partial \eta},\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)=(\boldsymbol{F}_\rho)^{\mathrm{T}}\\
&\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \xi}{\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\end{pmatrix}=\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)},\quad \begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \zeta}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta}\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta}\end{pmatrix}=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\\
&J=\left|\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)}\right|,\quad J^{-1}=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right|
\end{aligned}\right\} \tag{C.1.3.3}$$

其中$|\cdot|$表示行列式值

于是（C.1.3.2）式可以简写为

$$(\boldsymbol{F}_\gamma)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{F}_\rho)^{\mathrm{T}}\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)},\quad (\boldsymbol{F}_\rho)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{F}_\gamma)^{\mathrm{T}}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} \tag{C.1.3.4}$$

不难看出

$$\left(\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)}\right)=\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right)^{-1} \tag{C.1.3.5}$$

并由此可得

$$\left.\begin{aligned}
\xi_x&=\frac{y_\eta z_\zeta-y_\zeta z_\eta}{J^{-1}},\quad \xi_y=\frac{x_\zeta z_\eta-x_\eta z_\zeta}{J^{-1}},\quad \xi_z=\frac{x_\eta y_\zeta-x_\zeta y_\eta}{J^{-1}}\\
\eta_x&=\frac{y_\zeta z_\xi-y_\xi z_\zeta}{J^{-1}},\quad \eta_y=\frac{x_\xi z_\zeta-x_\zeta z_\xi}{J^{-1}},\quad \eta_z=\frac{x_\zeta y_\xi-x_\xi z_\zeta}{J^{-1}}\\
\zeta_x&=\frac{y_\xi z_\eta-y_\eta z_\xi}{J^{-1}},\quad \zeta_y=\frac{x_\eta z_\xi-x_\xi z_\eta}{J^{-1}},\quad \zeta_z=\frac{x_\xi y_\eta-x_\eta y_\xi}{J^{-1}}
\end{aligned}\right\} \tag{C.1.3.6}$$

此外，对于弧元也要做相应的变化。引入记号

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = x, & x_2 = y, & x_3 = z \\ \xi_1 = \xi, & \xi_2 = \eta, & \xi_3 = \zeta \end{array}\right\} \tag{C.1.3.7}$$

由于 $\mathrm{d}s^2 = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_k$，又因为 (C.1.3.8)

$$\mathrm{d}x_k = \sum_{i=1}^{3} x_{k,\xi_i} \mathrm{d}\xi_i \tag{C.1.3.9}$$

故

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} x_{k,\xi_i}\mathrm{d}\xi_i\right)\left(\sum_{j=1}^{3} x_{k,\xi_j}\mathrm{d}\xi_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3} x_{k,\xi_i}x_{k,\xi_j}\right)\mathrm{d}\xi_i\mathrm{d}\xi_j \xlongequal{\text{记作}} \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{i,j}\mathrm{d}\xi_i\mathrm{d}\xi_j \end{aligned} \tag{C.1.3.10}$$

其中

$$g_{i,j} = \sum_{k=1}^{3} x_{k,\xi_i}x_{k,\xi_j} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \tag{C.1.3.11}$$

如果将 $g_{i,j}$ 构成一矩阵 $G = \{g_{i,j}\}$，利用直接计算可以验证

$$G = \left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right) \tag{C.1.3.12}$$

而且有

$$|G|^{\frac{1}{2}} = J^{-1} \tag{C.1.3.13}$$

其中 $|G|^{\frac{1}{2}}$ 表示 G 的行列式的绝对值的平方根，有时为简单起见记作 $g^{\frac{1}{2}}$，即

$$g^{\frac{1}{2}} = |G|^{\frac{1}{2}} = J^{-1} \tag{C.1.3.14}$$

并且在 x，y，z 空间的网格微元体积与 ξ，η，ζ 空间的网格微元体积之间的关系为

$$\mathrm{d}V = g^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{C.1.3.15}$$

可以看出雅可比行列式的值反映了二个坐标系间各点体积放大和缩小的比值。

由于

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_i}, \frac{\partial x_3}{\partial \xi_i}\right)\mathrm{d}\xi_i \tag{C.1.3.16}$$

是当 ξ_i 变化而其它坐标不变时矢径 $\boldsymbol{r}$ 向量的变化向量，记作 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$ ($\boldsymbol{r} = (x, y, z)$)，所以 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j$ 之间的夹角为

$$\cos\theta_{ij} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_j}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i| \cdot |\mathrm{d}\boldsymbol{r}_j|} = \frac{g_{i,j}}{(g_{i,i} \cdot g_{j,j})^{1/2}} \tag{C.1.3.17}$$

若坐标系正交，$\cos\theta_{ij} = 0$ ($i \neq j$)，故

$$g_{i,j} = 0 \quad (i \neq j) \tag{C.1.3.18}$$

另外当 $i = j$ 时引入记号

$$g_{i,i} = h_i^2 = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \tag{C.1.3.19}$$

h_i 在正交坐标系中称作拉梅系数。

有了以上关系式和表达式后，原则上说所有直角坐标系下的方程都可以改写为曲线坐标系下形式。因为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi_j} \qquad (i=1,2,3)\\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_i}\frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_k} \quad (i,j=1,2,3)\end{aligned}\right\} \tag{C.1.3.20}$$

将以上关系代入原来直角坐标系下的方程即可得到曲线坐标下的方程。如拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \tag{C.1.3.21}$$

在曲线坐标下可写为

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial^2 T}{\partial \xi_k^2}+\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{3}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_i}\frac{\partial^2 T}{\partial \xi_k \partial \xi_l}$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i^2}\frac{\partial T}{\partial \xi_k}=0 \tag{C.1.3.22}$$

设 $\quad J=\det\left|\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)}\right|$

引入记号

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{11}=\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2, \quad \gamma_{12}=2(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y+\xi_z\eta_z)\\ &\alpha_{22}=\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2, \quad \gamma_{23}=2(\eta_x\zeta_x+\eta_y\zeta_y+\eta_z\zeta_z)\\ &\alpha_{33}=\zeta_x^2+\zeta_y^2+\zeta_z^2, \quad \gamma_{31}=2(\zeta_x\xi_x+\zeta_y\xi_y+\zeta_z\xi_z)\end{aligned}\right\} \tag{C.1.3.23}$$

则（C.1.3.22）式可改写为比较对称的形式

$$-\left\{\left(\frac{\nabla^2\xi}{J}\right)T\right\}_\xi-\left\{\left(\frac{\nabla^2\eta}{J}\right)T\right\}_\eta-\left\{\left(\frac{\nabla^2\zeta}{J}\right)T\right\}_\zeta+\left\{\left(\frac{\alpha_{11}}{J}\right)T\right\}_{\xi\xi}$$
$$+\left\{\left(\frac{\alpha_{22}}{J}\right)T\right\}_{\eta\eta}+\left\{\left(\frac{\alpha_{33}}{J}\right)T\right\}_{\zeta\zeta}+\left\{\left(\frac{\gamma_{12}}{T}\right)T\right\}_{\xi\eta}+\left\{\left(\frac{\gamma_{23}}{J}\right)T\right\}_{\eta\zeta}+\left\{\left(\frac{\gamma_{13}}{J}\right)T\right\}_{\zeta\xi}=0 \tag{C.1.3.24}$$

其中 $$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

不难看出，曲线坐标下的形式比直角坐标下的形式复杂得多。

在正交曲线坐标系下

$$\frac{1}{J}=J^{-1}=g^{\frac{1}{2}}=(g_{11}g_{22}g_{33})^{\frac{1}{2}}=h_1h_2h_3 \tag{C.1.3.25}$$

其中 $$h_i=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i}\right)^2 \qquad (i=1,2,3)$$

$$\gamma_{12}=\gamma_{23}=\gamma_{31}=0$$

由（C.1.3.6）式可得

$$\alpha_{11}=\frac{1}{(J^{-1})^2}[(y_\eta z_\zeta-y_\zeta z_\eta)^2+(x_\zeta z_\eta-x_\eta z_\zeta)^2+(x_\eta y_\zeta-x_\zeta y_\eta)^2]$$
$$=\frac{1}{(J^{-1})^2}[(x_\eta^2+y_\eta^2+z_\eta^2)(x_\zeta^2+y_\zeta^2+z_\zeta^2)-(x_\zeta x_\eta+y_\zeta y_\eta+z_\zeta z_\eta)^2]$$

正交坐标时有

$$\alpha_{11}=\frac{h_2^2h_3^2}{h_1^2h_2^2h_3^2}, \quad \frac{\alpha_{11}}{J}=\frac{h_2h_3}{h_1}$$

类似地有

$$\frac{\alpha_{22}}{J}=\frac{h_1h_3}{h_2}, \quad \frac{\alpha_{33}}{J}=\frac{h_1h_2}{h_3} \tag{C.1.3.26}$$

并且$\left(\frac{\alpha_{11}}{J}\right)_\xi$，$-\frac{\nabla^2\xi}{J}$在正交坐标系条件下为零。故（C.1.3.24）式在正交坐标系下简化为

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial T}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial T}{\partial\zeta}\right)=0 \qquad (C.1.3.27)$$

用这种方法来导出曲线坐标下的 NS 方程是十分复杂的。

另一种方法是将方程改写为散度形式，这时化简比较方便。为简单起见，这里先介绍二维的情况，比如只有一阶导数，即

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=0 \qquad (C.1.3.28)$$

利用关系（C.1.3.20）式可得

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial\xi}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial\eta}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial\eta}=0$$

引入 $J=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x$ 则上式可改写为

$$\left(\frac{U}{J}\right)_t+\left(\frac{\xi_xF+\xi_yG}{J}\right)_\xi+\left(\frac{\eta_xF+\eta_yG}{J}\right)_\eta=0 \qquad (C.1.3.29)$$

这里只要考虑到

$$\frac{\xi_xF_\xi}{J}=\left(\frac{\xi_xF}{J}\right)_\xi-F\cdot\left(\frac{\xi_x}{J}\right)=\left(\frac{\xi_xF}{J}\right)_\xi-F\cdot(y_\eta)_\xi$$

及其它类似的关系即可导出（C.1.3.29）式。在这里还可以注意到（C.1.3.29）式的物理意义。比如设向量 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{G}\boldsymbol{e}_y$ 为 $\boldsymbol{D}$，即 F，G 为 $\boldsymbol{D}$ 的二个分量。如果设 $\boldsymbol{D}$ 向量在沿等 ξ 线的法向投影，则可得到 $(F\xi_x+G\xi_y)\Big/\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}$；在沿等 η 线的法向投影，则得到 $(F\eta_x+G\eta_y)\Big/\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2}$（图 C.1.12）。而

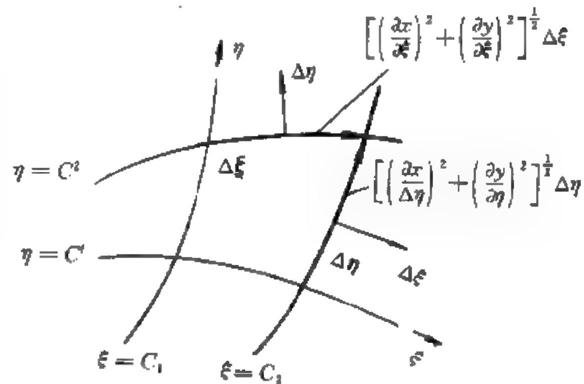


图 C.1.12

$$\sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2}=J\sqrt{y_\eta^2+x_\eta^2}=|\Delta\eta|\cdot J$$

$$\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2}=J\sqrt{x_\xi^2+y_\xi^2}=|\Delta\xi|\cdot J$$

对有限大的单元，应用通量守恒应有

$$\begin{aligned}\left(\frac{U}{J}\right)_{t+\Delta t}-\left(\frac{U}{J}\right)_t&=(\boldsymbol{D}|_\xi\cdot|\Delta\eta|)_{\xi+\Delta\xi}-(\boldsymbol{D}|_\xi\cdot|\Delta\eta|)_\xi\\&+(\boldsymbol{D}|_\eta\cdot|\Delta\xi|)_{\eta+\Delta\eta}-(\boldsymbol{D}|_\eta\cdot|\Delta\xi|)_\eta\\&=\left(\frac{F\xi_x+G\xi_y}{J|\Delta\eta|}\cdot|\Delta\eta|\right)_{\xi+\Delta\xi}-\left(\frac{F\xi_x+G\xi_y}{J|\Delta\eta|}\cdot|\Delta\eta|\right)_\xi\\&+\left(\frac{F\eta_x+G\eta_y}{J|\Delta\xi|}\cdot|\Delta\xi|\right)_{\eta+\Delta\eta}-\left(\frac{F\eta_x+G\eta_y}{J|\Delta\xi|}\cdot|\Delta\xi|\right)_\eta\end{aligned}$$

当 Δt，$\Delta\xi$，$\Delta\eta\to0$ 时即得

$$\left(\frac{U}{J}\right)_t+\left(\frac{F\xi_x+G\xi_y}{J}\right)_\xi+\left(\frac{F\eta_x+G\eta_y}{J}\right)_\eta=0$$

或引入记号 $\qquad F^*=F\xi_x+G\xi_y,\quad G^*=F\eta_x+G\eta_y$

则有
$$\left(\frac{U}{J}\right)_t + \left(\frac{F^*}{J}\right)_\xi + \left(\frac{G^*}{J}\right)_\eta = 0$$

它与（C.1.3.29）式是一致的，其物理意义格外明确。这一方法同样可推广到三维，此时有

$$\left(\frac{U}{J}\right)_t + \left(\frac{F^*}{J}\right)_\xi + \left(\frac{G^*}{J}\right)_\eta + \left(\frac{H^*}{J}\right)_\zeta = 0 \qquad \text{(C.1.3.30)}$$

其中
$$J = \det\left|\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)}\right|$$
$$F^* = F\xi_x + G\xi_y + H\xi_z$$
$$G^* = F\eta_x + G\eta_y + H\eta_z$$
$$H^* = F\zeta_x + G\zeta_y + H\zeta_z$$

有二阶导数时，方程写作

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad \text{(C.1.3.31)}$$

这一方程可以改写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial R}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-\varepsilon)\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}\right] \qquad \text{(C.1.3.32)}$$

其中 ε 是一个待选的参数。利用前面关于（C.1.3.28）式改写为（C.1.3.29）式的方法可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{U}{J}\right) + \frac{\partial F^*}{\partial \xi} + \frac{\partial G^*}{\partial \eta} = \frac{\partial P^*}{\partial \xi} + \frac{\partial Q^*}{\partial \eta} \qquad \text{(C.1.3.33)}$$

其中

$$F^* = \frac{1}{J}(\xi_x F + \xi_y G), \qquad G^* = \frac{1}{J}(\eta_x F + \eta_y G) \qquad \text{(C.1.3.34-1)}$$

$$\begin{aligned}P^* &= \frac{1}{J}\{\xi_x(R_x + \varepsilon S_y) + \xi_y[(1-\varepsilon)S_x + T_y]\} \\ &= \frac{1}{J}\{[\xi_x R + (1-\varepsilon)\xi_y S]_x + [\xi_x \varepsilon S + \xi_y T]_y - (\xi_{xx}R + \xi_{xy}S + \xi_{yy}T)\} \\ &= \left[\frac{\xi_x^2 R + \xi_x\xi_y S + \xi_y^2 T}{J}\right]_\xi + \left[\frac{\xi_x\eta_x R + \eta_x\xi_y S + \varepsilon JS + \xi_y\eta_y T}{J}\right]_\eta \\ &\quad - \frac{\xi_{xx}R + \xi_{xy}S + \xi_{yy}T}{J}\end{aligned} \qquad \text{(C.1.3.34-2)}$$

类似地

$$\begin{aligned}Q^* &= \frac{1}{J}\{\eta_x(R_x + \varepsilon S_y) + \eta_y[(1-\varepsilon)S_x + T_y]\} \\ &= \left[\frac{\eta_x^2 R + \eta_y\xi_x S + \varepsilon JS + \eta_y\xi_y T}{J}\right]_\xi + \left[\frac{\eta_x^2 R + \eta_x\eta_y S + \eta_y^2 T}{J}\right]_\eta \\ &\quad - \frac{\eta_{xx}R + \eta_{xy}S + \eta_{yy}T}{J}\end{aligned} \qquad \text{(C.1.3.34-3)}$$

将它们代入（C.1.3.33）式，整理后可得

$$U_t^* + F_\xi^{*\,*} + G_\eta^{*\,*} = R_{\xi\xi}^* + S_{\xi\eta}^* + T_{\eta\eta}^* \qquad \text{(C.1.3.35)}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
U^{*} &= \frac{U}{J} \\
F^{**} &= F^{*} + \frac{\xi_{xx}R + \xi_{xy}S + \xi_{yy}T}{J} \\
G^{**} &= G^{*} + \frac{\eta_{xx}R + \eta_{xy}S + \eta_{yy}T}{J} \\
R^{*} &= \frac{\xi_x^2 R + \xi_x\xi_y S + \xi_y^2 T}{J} \\
S^{*} &= \frac{2\xi_x\eta_x R + (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)S + 2\xi_y\eta_y T}{J} \\
T^{*} &= \frac{\eta_x^2 R + \eta_x\eta_y S + \eta_y^2 T}{J}
\end{aligned}\right\} \tag{C.1.3.36}
$$

J 由（C.1.3.23）式定义，F^{*}，G^{*} 由（C.1.3.34）定义。

由于流体力学的基本方程均可写成（C.1.3.31）的形式，所以方程在曲线坐标下的形式均可写出来。这一部分留给读者自行完成，它们的形式在本章末的习题中均可以找到。

1.4 寄生截断误差

在前面讨论贴体坐标的生成过程中可以看到，由于坐标形式的多样性和复杂性，因此变换一般不能用解析形式表示，而只能采用离散形式。各种参数如 x_ξ，x_η，y_ξ，y_η，$x_{\xi\xi}$ 等的导数，行列式 J 各元素的计算都只能用近似的差商来计算。这种计算也会产生附加的误差，这种误差称作寄生误差或寄生的截断误差。

首先以一维函数为例说明由于网格不均匀引起的误差。设 $q(\lambda)$ 是一个足够光滑的单调变化的函数，且 $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 时，$0\leqslant q(\lambda)\leqslant1$，又设空间坐标 x 和计算坐标号之间的关系为

$$x = q(\xi/N) \tag{C.1.4.1}$$

其中 $\xi=0$，1，2，…，$N-1$，N，分别对应数，x_1，x_2…，x_{N-1}，$x_N=1$。对于均匀网格，中心差分具有二阶精度；在不均匀网格时，会产生如下疑问：

（1）当网格分布不变，也就是说 $q(\lambda)$ 不变时，网格点增加时中心差分格式是否是二阶精度?

（2）网格数不变，分布规律变化将对误差产生什么影响?

一维时

$$f_x = f_\xi / x_\xi \tag{C.1.4.2}$$

设 $x_\xi=\dfrac{1}{N}q'\left(\dfrac{\xi}{N}\right)$ 可以解析地得到，则数值计算 f_x 为

$$f_x = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2x_\xi} + T_1 \tag{C.1.4.3}$$

由（C.1.4.1）式可知 $\Delta\xi=1$，T_1 为截断误差。由台劳公式可得

$$T_1 = -\frac{1}{6}\frac{f_{\xi\xi\xi}}{x_\xi} - \frac{1}{120}\frac{f_{\xi\xi\xi\xi\xi}}{x_\xi} + \cdots \tag{C.1.4.4}$$

又由于 $f_\xi = f_x\, x_\xi$ (C.1.4.5)

二边分别对 ξ 求 1，2…次导数，可得

$$\left.\begin{aligned} f_{\xi\xi} &= x_{\xi\xi}f_x + x_\xi^2 f_{xx} \\ f_{\xi\xi\xi} &= x_{\xi\xi\xi}f_x + 3x_\xi x_{\xi\xi}f_{xx} + x_\xi^3 f_{xxx} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{C.1.4.6}$$

又由于

$$x_\xi = \frac{1}{N}q', \quad x_{\xi\xi} = q''/N^2 \cdots \tag{C.1.4.7}$$

故将（C.1.4.6）与（C.1.4.7）式代入（C.1.4.4）式，计及 $1/N^2$ 量级可知

$$T_1 = -\frac{1}{6}\frac{x_{\xi\xi\xi}}{x_\xi}f_x - \frac{1}{2}x_{\xi\xi}f_{xx} - \frac{1}{6}x_\xi^2 f_{xxx} + \cdots \tag{C.1.4.8}$$

所以说 $T_1 \sim 1/N^2$，在网格均匀时 x_ξ^2 也不为零，但 $x_{\xi\xi}$，$x_{\xi\xi\xi}$为零；在网格不均匀时第一，二项为寄生的截断误差，所以可以看出网格不均匀时误差会增加。

另一方面如果点数不变，则点的位置变化也会引起截断误差的变化。为了保持截断误差阶数不变，要求

$$x_{\xi\xi\xi} \sim x_\xi^3, \qquad x_{\xi\xi} \sim x_\xi^2$$

但这个要求一般达不到，所以在这种达不到的地方，应当加密网格点。

以上分析中我们假定 x_ξ 具有解析的形式，但是在许多情况下，$x=q$（ξ/N）没有解析形式，只有数值关系。这时

$$f_x = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} + T_2 \tag{C.1.4.9}$$

利用台劳展开有

$$\begin{aligned} T_2 &= f_x - \{f_x(x_{i+1} - x_{i-1}) + \frac{1}{2}f_{xx}[(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2] \\ &\quad + \frac{1}{6}f_{xxx}[(x_{i+1} - x_i)^3 - (x_{i-1} - x_i)^3]/(x_{i+1} - x_{i-1})\} \\ &= -\frac{1}{2}f_{xx}(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) \\ &\quad - \frac{1}{6}f_{xxx}\frac{(x_{i+1} - x_i)^3 - (x_{i-1} - x_i)^3}{x_{i+1} - x_{i-1}} \end{aligned} \tag{C.1.4.10}$$

其中 f_{xx}的系数是 $x_{\xi\xi}$ 的差分表达式，而 f_{xxx} 的表达式是 x_ξ^2 的近似表达式。由于第一项也具有二阶精度，所以 f_{xx} 项与解析的情况是相同的。第二项影响比较小。因此可见，解析的和数值的估计，截断误差相差不多，可以将截断误差看作：

$$T = -\frac{1}{2}x_{\xi\xi}f_{xx} - \frac{1}{6}x_\xi^2 f_{xxx} \tag{C.1.4.11}$$

根据人们已有的经验，$q(\xi/N)$ 的几种形式比较如下：

（1）指数函数不如双曲正切，双曲正弦函数好；

（2）在边界层底部用双曲正弦函数最好；

（3）在边界层外部用误差函数或双曲正切（双曲正切用于边界层内近外侧）最好；

（4）对数函数、正弦、正切、反正切、逆双曲正切、二次曲线、逆双曲正弦都不好。

下面讨论二维情况。二维时

$$f_x = (y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta)/\sqrt{g} \tag{C.1.4.12}$$

其中 $\sqrt{g} = |J| = |\partial(x,y)/\partial(\xi,\eta)| = |x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi|$。

如果全部导数项都用中心差分的方法，又设 $\Delta\xi=\Delta\eta=1$，则

$$f_x = \frac{1}{2\sqrt{g}}[y_\eta(f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) - y_\xi(f_{i,j+1} - f_{i,j-1})] + T_x \tag{C. 1. 4. 13}$$

用台劳展开可以得到

$$T_x = \frac{1}{2\sqrt{g}}(y_\xi x_\eta x_{\eta\eta} - x_\xi x_\eta x_{\xi\xi})f_{xx} + \frac{1}{2\sqrt{g}}y_\xi y_\eta(y_{\eta\eta} - y_{\xi\xi})f_{yy}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{g}}[y_\xi y_\eta(x_{\eta\eta} - x_{\xi\xi}) + x_\eta y_\xi y_{\eta\eta} - x_\xi y_\eta y_{\xi\xi}]f_{xy} + \text{二阶项} \tag{C. 1. 4. 14}$$

其中 x_ξ，x_η…的计算也用中心差分格式

$$\left.\begin{aligned} x_\xi &= \frac{1}{2}(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \\ x_\eta &= \frac{1}{2}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \\ x_{\xi\xi} &= x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j} \\ x_{\eta\eta} &= x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1} \end{aligned}\right\} \tag{C. 1. 4. 15}$$

为了保持原有的截断误差的量级，要求 x_ξ，x_η，y_ξ，$y_\eta \to 0$ 时

$$\frac{x_{\xi\xi}}{|\boldsymbol{r}_\xi|^2}, \quad \frac{y_{\xi\xi}}{|\boldsymbol{r}_\xi|^2}, \quad \frac{x_{\eta\eta}}{|\boldsymbol{r}_\eta|^2}, \quad \frac{y_{\eta\eta}}{|\boldsymbol{r}_\eta|^2} \tag{C. 1. 4. 16}$$

应当有界。另外 $\sqrt{g}\to 0$ 的速度也应当是有限的，这一条件实际上相当于网格的交角（$\xi=c$ 及 $\eta=c$ 的交角）θ 不能是无限小的，也就是说 $\mathrm{ctg}\theta$ 应当是有界的，即要求

$$|\mathrm{ctg}\theta| \leqslant M \text{ 或}$$

$$g \geqslant \frac{1}{M^2+1}|\boldsymbol{r}_\xi|^2 \cdot |\boldsymbol{r}_\eta|^2 \tag{C. 1. 4. 17}$$

（这是二维时的公式）。显然，当 $\theta\sim 0$ 时，$M\to\infty$，$g\geqslant 0$，即 g 没有下界（绝对值）。而 $g=J^2$，所以 J 没有下界时变换就是奇性，会产生很大的寄生误差。

二阶导数的分析更为复杂，但结论也是要求 θ 不能太小，所以我们希望曲线坐标尽量地正交。

关于曲线坐标引起的寄生误差是一个比较复杂的问题，还有待于进一步深入地进行分析。

小　结

贴体坐标的出现，使计算流体力学的应用得以迅速推广。本章首先介绍了贴体坐标的基本概念。生成贴体坐标的方法有三类。代数生成法是插值法的推广，关键是插值函数的选用。保角变换方法只能应用于二维问题，并且针对一些特殊问题可以解析地得到变换关系。其它大多数情况与数值求解微分方程的方法是相似的。本章着重介绍了偏微分方程生成贴体坐标的方法。本章最后讨论了贴体坐标下的一些转换关系以及分析了由于坐标转换带来的寄生截断误差的估计。并指出正交或接近正交贴体坐标生成的必要性。

参考文献

1. Thompson J F, Warsi Z U A, Mastin C W. Numerical Grid Generation: Foundations and Applications. North-Holland, 1985

2. Thompson J F, Warsi Z U A, Mastin C W. Boundary Fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations —A Review. J of Comp Phys. 1982, 47 (1): 1—108

3. Warschawsri S E. On Theodorsen's Method of Conformal Mapping of Nearly Circular Regions. Quarterly of Appl Math. 1945, 3; 12—18

4. Papantonis D E, Athamassiadis N A. A numerical Body-Fitted Coordinate systems with Direct Determination of Grid Points on the Boundary. Inter J for Numerical Methods in Fluids. 1985, 5: 245—255

5. Eiseman P R. Geometric Methods in Computational Fluid Dynamics, ICASE. 80—11 NASA Langley Reserch Center, 1980

6. Eiseman P R. Grid Generation For fluid Mechamics Computations. Annual Reu. of Fluid Mech vol. 17, 1985

7. 苏铭德，叶宏开．流体力学（上册）．清华大学力学系，核工业部研究生部讲义，1988

习　题

1. 写出 $N=2$，3，4，5 时，Lagrange 和 Hermite 多项式的具体公式。

2. 将下列四曲边形区域内（包括边界）取 $M\times N$ 个点（参看图 C. 1. 13）

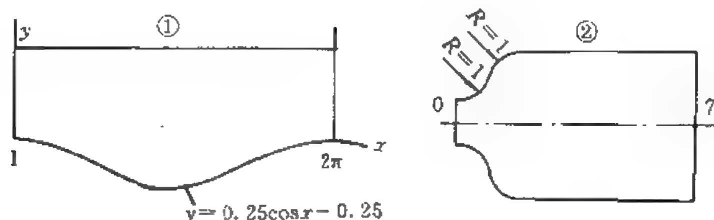


图 C. 1. 13

(x_{ij}, y_{ij}) $(i=1, 2, \cdots, M; j=1, 2, \cdots, N)$

记它们对应于一正方形域 $(0\leqslant\xi\leqslant1; 0\leqslant\eta\leqslant1)$ 为 (ξ_{ij}, η_{ij}) $(i=1, 2\cdots M; j=1, 2\cdots N)$

记 $\left.\begin{array}{l}x=x(\xi_i, \eta)\\ y=y(\xi_i, \eta)\end{array}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{a}_i(\eta)$，即 $\xi=\xi_i$ 时的各点构成一个二维向量

$\left.\begin{array}{l}x=x(\xi, \eta_i)\\ y=y(\xi, \eta_i)\end{array}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{b}_j(\xi)$

引入函数

$$\alpha_i(\xi) \quad i=1,2,\cdots,M, \quad \beta_j(\eta) \quad j=1,2,\cdots,N$$

$$\alpha_i(\xi_{\bar{i}})=\delta_{i\bar{i}}; \quad i=1,2,\cdots,M, \quad \beta_j(\eta_{\bar{j}})=\delta_{j\bar{j}} \qquad \bar{j}=1,2,\cdots,N$$

$$\boldsymbol{F}_1(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{M}\alpha_i(\xi)\boldsymbol{a}_i(\eta)$$

$$\boldsymbol{F}_2(\xi,\eta)=\sum_{j=1}^{N}\beta_j(\eta)[\boldsymbol{b}_j(\xi)-\boldsymbol{F}_1(\xi,\eta)]+\boldsymbol{F}_1(\xi,\eta)$$

试说明 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，分别代表二族曲线，它们通过上述选取的 $(M\times N)$ 个点。取 α，β 为 Lagrange 函数，编制相应的程序和显示所得的曲线坐标系。(以上方法又称之为点有限域插值法)。

3. 试用保角变换作出图 C.1.14 所示图形的贴体网格线。

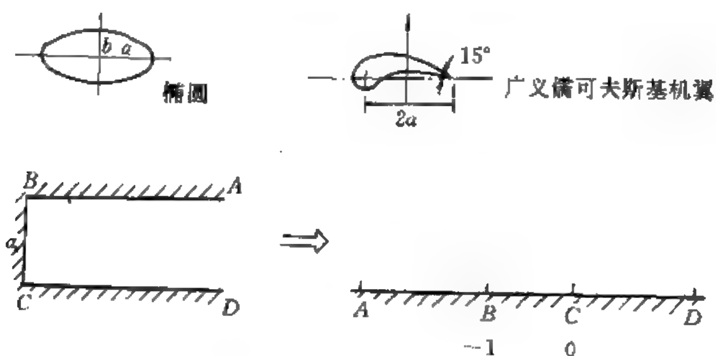


图 C.1.14

4. 试用偏微分方程建立图 C.1.15 所示图形的贴体网格。

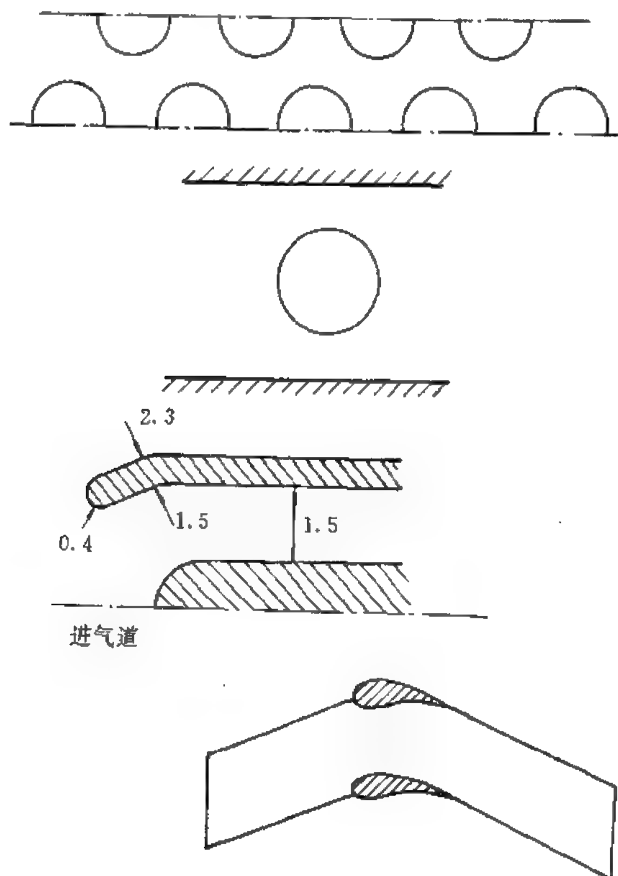


图 C.1.15

5. 验证 (C.1.3.12) 式。

6. 证明 $\boldsymbol{a}_i=\sqrt{g}\,(\boldsymbol{a}^j\times\boldsymbol{a}^k)$

其中 $\boldsymbol{a}^j=\nabla\xi_j$，$\boldsymbol{a}^k=\nabla\xi_k$ $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ 为曲线坐标系

$$\boldsymbol{a}_i = \lim_{\xi_i \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(\xi_i + \Delta\xi_i) - \boldsymbol{r}(\xi_i)}{\Delta\xi_i} \qquad \boldsymbol{r} = (x, y, z)$$

7. 记 $g_{ij}=\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j$，$g^{ij}=\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}^j$

试证明

$$g_{il} = g(g^{jm}g^{kn} - g^{jn}g^{km})$$

$$\left.\begin{matrix}(i,j,k)\\(l,m,n)\end{matrix}\right\}\text{构成}(1,2,3)\text{ 正向循环}$$

8. 说明 ξ_i 变化的弧元长为

$$\mathrm{d}s_i = \sqrt{g_{ii}}\mathrm{d}\xi_i \quad (\text{不对 } i \text{ 求和}) \quad (i = 1,2,3)$$

ξ_i 不变面上的面元面积为

$$\mathrm{d}\sigma_i = (\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k)\mathrm{d}\xi_j\mathrm{d}\xi_k = \sqrt{g_{jj}g_{kk} - (g_{jk})^2}\mathrm{d}\xi_j\mathrm{d}\xi_k$$

$$\left.\begin{matrix}(i,j,k)\\(l,m,n)\end{matrix}\right\}\text{构成}(1,2,3)\text{ 正向循环}$$

体元体积

$$\mathrm{d}V = |\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)|\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3 = \sqrt{g}\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3$$

9. 证明

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \xi_i} \cdot (\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k) \qquad (i,j,k)\text{ 构成}(1,2,3)\text{ 正向循环}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}[(\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{a}_k - (\boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{a}_j]_{\xi_i} \qquad \text{守恒型}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}[(\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{A}_{\xi_i})\boldsymbol{a}_k - (\boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{A}_{\xi_i})\boldsymbol{a}_j] \qquad \text{非守恒型}$$

$$\nabla\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k)\frac{\partial\phi}{\partial\xi_i}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \sum_{i=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\left\{\frac{1}{\sqrt{g}}(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k) \cdot [(\boldsymbol{a}_m \times \boldsymbol{a}_n)\phi]_{\xi_l}\right\}_{\xi_i} \qquad \text{守恒型}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}(\boldsymbol{a}_j \times \boldsymbol{a}_k) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{g}}\{(\boldsymbol{a}_m \times \boldsymbol{a}_n)\phi\}_{\xi_l}\right]_{\xi_i} \qquad \text{非守恒型}$$

(l, m, n) 构成正向循环

10. 证明

$$\det|g^{ij}| = \frac{1}{\det|g_{ij}|}$$

11. (1) 设

$$x = q\left(\frac{\xi}{N}\right) = \frac{\exp(\alpha\xi/N) - 1}{\exp(\alpha) - 1} \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant N$$

证明 (C. 1. 4. 8) 式中第二项对第三项之比在 $\xi=0$ 时为 $1/NS$，$\xi=N$ 时为 1，其中 $S=(x_\xi)_0$ 且 $S \to 0$

(2) 证明上面的比值在 ξ 从 0 到 N 之间的平均为

$$\frac{1}{N}\int_0^N \frac{x_{\xi\xi}}{x_\xi^2}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{(x_\xi)_0} - \frac{1}{(x_\xi)_N}\right]$$

(3) 证明（C.1.4.8）式中第一项引起的部分误差为

$$-\frac{1}{6N^2\ln^2\left(\frac{1}{NS}\right)} \qquad \text{（设 } f_x \text{ 在区间内不变化）}$$

12. 对于下列两种情况研究第 11 题中同样的问题：

(1) $x=q\left(\frac{\xi}{N}\right)=\frac{\sinh(\alpha\xi/N)}{\sinh(\alpha)} \qquad 0\leqslant\xi\leqslant N$

(2) $q\left(\frac{\xi}{N}\right)=1-\frac{\mathrm{th}[\alpha(1-\xi/N)]}{\mathrm{th}\alpha} \qquad 0\leqslant\xi\leqslant N$

13. 设曲线是下列二曲面的交线

$$F(x,y,z)=0$$
$$G(x,y,z)=0$$

证明切向单位向量为

$$t=\frac{iJ_1+jJ_2+kJ_3}{\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}}$$

其中 $J_l=F_{x_m}G_{x_n}-F_{x_n}G_{x_m}$，$l$，$m$，$n\Rightarrow$ 1⟶2⟶3⟶1（循环）

14. 设坐标系

$$x=\psi(\zeta),\quad y=f(\zeta)\cos\xi,\quad z=f(\zeta)\sin\xi$$

其中
$$f(\zeta)=\frac{2e^{\zeta}}{1+e^{2\zeta}},\quad \psi(\zeta)=\frac{1-e^{2\zeta}}{1+e^{2\zeta}} \qquad 0\leqslant\xi\leqslant\pi$$

求 a_i，a^i，g_{ij}，g^{ij}，$\sqrt{g}$。

15. 设坐标系

$$x=\tau\mathrm{ch}\eta\cos\zeta,\quad y=\tau\mathrm{sh}\eta\sin\zeta\cos\xi,\quad z=\tau\mathrm{sh}\eta\sin\zeta\sin\xi$$

τ 为常数，求 a_i，a^i，g_{ij}，g^{ij}，$\sqrt{g}$。

16. 设方程为

$$U_t+F_x+G_y=(\alpha R_x)_x+(\beta S_y)_x+(\delta S_x)_y+(\gamma T_y)_y$$

其中 α，β，δ，γ 均为 x，y 的函数，试证明曲线坐标下的形式为（C.1.3.35）式。其中

$$F^{**}=F^*+[(\alpha\xi_x)_xR+(\beta\xi_x)_yS+(\delta\xi_y)_xS+(\gamma\xi_y)_yT]\left(\frac{1}{J}\right)$$

$$G^{**}=G^*+[(\alpha\eta_x)_xR+(\beta\eta_x)_yS+(\delta\eta_y)_xS+(\gamma\eta_y)_yT]\left(\frac{1}{J}\right)$$

$$R^*=[\alpha\xi_x^2R+(\beta+\delta)\xi_x\xi_yS+\gamma\xi_y^2T]\left(\frac{1}{J}\right)$$

$$S^*=[2\alpha\xi_x\eta_xR+(\delta+\beta)(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)S+2\gamma\xi_y\eta_yT]\left(\frac{1}{J}\right)$$

$$T^*=[\alpha\eta_x^2R+(\beta+\delta)\eta_x\eta_yS+\gamma\eta_y^2T]\left(\frac{1}{J}\right)$$

17. 证明三维问题中若方程具有如下形式

$$U_t+F_x+G_y+H_z=0$$

则曲线坐标下为

$$U_t^*+F_\xi^*+G_\eta^*+H_\zeta^*=0$$

其中
$$U^*=U/J$$

$$F^* = (F\xi_x + G\xi_y + H\xi_z)/J$$
$$G^* = (F\eta_x + G\eta_y + H\eta_z)/J$$
$$H^* = (F\zeta_x + G\zeta_y + H\zeta_z)/J$$
$$J = \det\left|\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,y,z)}\right|$$

18. 流体力学基本方程改写为曲线坐标下的形式可逐步进行，如可压缩粘性流体流动的基本方程为（A.2.2.9）式。对二维问题有：

连续方程 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0$

x 方向的动力学方程

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(p+\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

y 方向的动力学方程

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(p+\rho v^2)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}[u(E_s+p)]+\frac{\partial}{\partial y}[v(E_t+p)]$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{4}{3}u^2+\frac{v^2}{2}\right)-\frac{c_p}{c_v}T\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{4}{3}u^2+\frac{v^2}{2}\right)-\frac{c_p}{c_v}T\right]\right\}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\mu u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{3}\mu v\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

分别利用题 16 的形式写出曲线坐标下的公式。

第2章　无粘性流体流动的数值计算

从本章起，将讨论流场计算中的一些特殊问题。在上一篇中介绍的各种方法在流体力学中都将得到应用。在讨论那些方法时都以线性方程为例。关于它们的收敛性、精度分析都是以方程为线性的前提下进行的。在流体力学中绝大多数的问题是非线性的，所以无论在收敛性、稳定性的分析以及离散化方程的求解都产生了一系列的问题，解决这些问题，得到正确的结果正是计算流体力学的重要课题。

本书的讨论由简到繁，流体流动满足NS方程，直接求解NS方程是比较困难的，所以首先讨论它的简化，即无粘性Euler方程的求解。事实上Euler方程也不是最简单的，作为最简单的简化是不可压缩无粘性的流动，方程将是线性的，如果流体可压缩，但压缩程度不大，即低马赫数的流动，方程是弱非线性的，求解比较复杂一些。流动达到跨音速时，计算就比较困难，流动在超声速的情况下，会出现激波，这给计算带来了比较多的困难。本章将讨论无粘性流的计算，关于有粘性流动的计算将在下一章讨论。然后在后二章将讨论工程中经常见到的一些流动问题的计算。为了适应现代计算流体力学的迅速发展，在本篇最后一章将介绍一些新的方法和方向。

2.1　等熵流动的数值计算

根据流体力学理论的分析，众所周知，无粘性流动，在不出现激波的情况下，流动微团的熵在流动过程中是不变的。如果流动是定常的，则沿流线熵是不变的，如果来流是均匀的，则全流场都是均熵的，所以等熵流动应当包括直至有小超声速区的跨声速流动在内的低马赫数流动或不可压缩的流动，这种流动的基本方程是线性的或弱非线性的，它们的求解方法是比较简单的。

2.1.1　不可压缩无粘性流动的数值计算

应该指出，实际问题中属于这类流动的问题不多。一类问题是有自由面的问题，特别是水波问题，它的主要困难转移到自由边界问题上去了，这一类问题有专门的著作加以讨论。水波问题的基本方程具有双曲型的特点，它们的求解可以借助于本章以后几节中讨论的关于超声速流动的数值解法进行计算，本书不准备详细讨论这个问题。另一类问题是低速流动，但许多低速流动中粘性将起重要作用，所以无粘性的不可压缩流动实际意义不大，但是由于这种流动的流线与等位线构成一对正交曲线坐标系，并且是一种贴体坐标系，所以计算这种流场可以用来生成正交贴体坐标系，因而是很有意义的。

不可压无粘性流体流动的基本方程为连续方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{C.2.1.1}$$

动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} = \boldsymbol{f} - \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) \tag{C.2.1.2}$$

对于二维问题，可以引入流函数 ψ，使

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{C.2.1.3}$$

动力学方程取旋得到

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=0 \tag{C.2.1.4}$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}=\zeta\boldsymbol{k},\quad \zeta=-\Delta\psi \tag{C.2.1.5}$$

流函数满足的方程为

$$\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y}=0 \tag{C.2.1.6}$$

压力满足的方程为

$$\nabla^2\left(\frac{p}{\rho}\right)=-2\left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right] \tag{C.2.1.7}$$

在流动有位时存在位势 φ

$$\boldsymbol{V}=\nabla\varphi \tag{C.2.1.8}$$

由连续方程知

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{C.2.1.9}$$

压力可由柯西积分确定：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{p}{\rho}+\Pi+\frac{1}{2}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi=f(t) \tag{C.2.1.10}$$

其中 Π 为体积力位势，$f(t)$ 为积分常数，同时由于有位，故 $\zeta=0$，因此

$$\Delta\psi=0 \tag{C.2.1.11}$$

可见不可压无粘性流动有位时可以由解一组拉普拉斯方程来确定流场。关于拉普拉斯方程的求解，在前面一篇的讨论中已经作了很多的讨论。它可以用有限单元法或有限差分法来求解。这里需要讨论的是边界条件的确定和具体解法。

1. 平面位势流

由于方程（C.2.1.9 和 11）不显含时间，所以定常和不定常流的区别只表现在边界条件上，在物面上，边界条件为

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial s}\right|_{\Gamma}=-v_n,\quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Gamma}=v_n \tag{C.2.1.12}$$

其中 v_n 为物面速度在物面法向上的分量。

对于外流，如机翼绕流等，无限远处的来流可以认为是均匀流，故有

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{\infty}=U_{\infty}\cos\alpha,\quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{\infty}=-U_{\infty}\sin\alpha \tag{C.2.1.13}$$

这里 α 是来流的攻角，即与 x 轴之间的夹角。对于有光点的物体，还要用儒可夫斯基条件，这在稍后分析。

对于大多数问题，采用有限元方法是最方便的，具体作法在上一篇中已作了详细讨论，这里给出几个例子，读者可以作为例子自行完成。

（1）平直槽道内的圆柱绕流

这里的边界条件为图 C.2.1 所示，在（b）中取了四分之一区，计算量可以减少到 1/4。该问题的精确解为

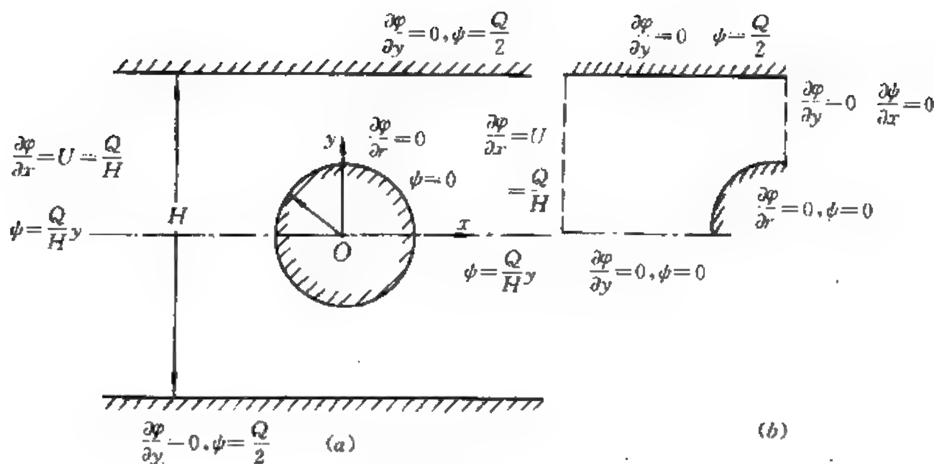


图 C.2.1

$$\psi = U\left\{y - \frac{H\mathrm{sh}^2\left(\frac{\pi a}{H}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{H}\right)}{2\pi\left[\mathrm{ch}^2\left(\frac{\pi x}{H}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi y}{H}\right)\right]}\right\} \tag{C.2.1.14}$$

（2）非对称机翼绕流

这里除了来流条件，物面条件外还要附加K-ホ条件，即在尾缘处速度为零（图C.2.2）。

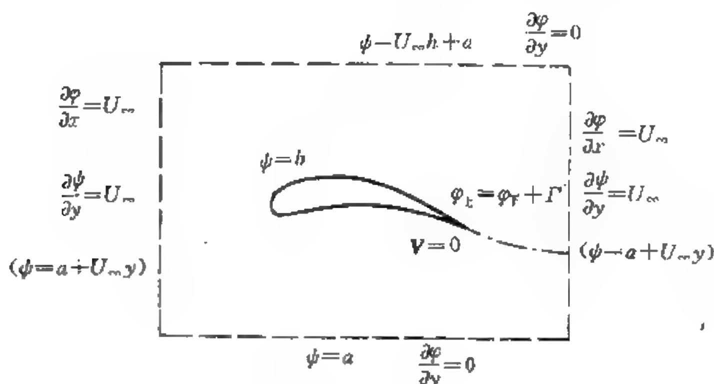


图 C.2.2

为了满足这一条件，可以采用如下方法，即设

$$\psi = \psi_1 + a\psi_2 + b\psi_3 \tag{C.2.1.15}$$

让 ψ_1，ψ_2，ψ_3 分别满足以下条件：

$$\left.\begin{array}{lll}\Delta\psi_1 = 0, & \Delta\psi_2 = 0, & \Delta\psi_3 = 0 \\ \psi_{1|物面} = 0, & \psi_{2|物面} = 0, & \psi_{3|物面} = 1 \\ \psi_{1|\infty} = Uy, & \psi_{2|\infty} = 1, & \psi_{3|\infty} = 0\end{array}\right\} \tag{C.2.1.16}$$

在解得 ψ_1，ψ_2，ψ_3 后，计算尾缘处的 $\boldsymbol{V}_1$，$\boldsymbol{V}_2$，$\boldsymbol{V}_3$，利用

$$\left.\begin{array}{l}u_1 + au_2 + bu_3 = 0 \\ v_1 + av_2 + bv_3 = 0\end{array}\right\} \tag{C.2.1.17}$$

可得 a，b 值。对于儒可夫斯基机翼存在精确解，计算结果可与之比较。

(3) 翼栅流动

这里进出口的 U 值是不同的（图 C.2.3），但 $U_入\cos\alpha=\frac{Q}{T}=U_出\cos\beta$，其中 Q，α 是给定的，而 β，$U_出$ 是待定的，ψ_1，ψ_2 是虚设边界上的 ψ 值，已知在这上面的速度值满足周期条件；ψ 值相差 Q。计算时应假定 β 值，得到 ψ 值后计算尾缘处的 $\boldsymbol{V}$。在其值为零时对应的 β 值才是正确的值。

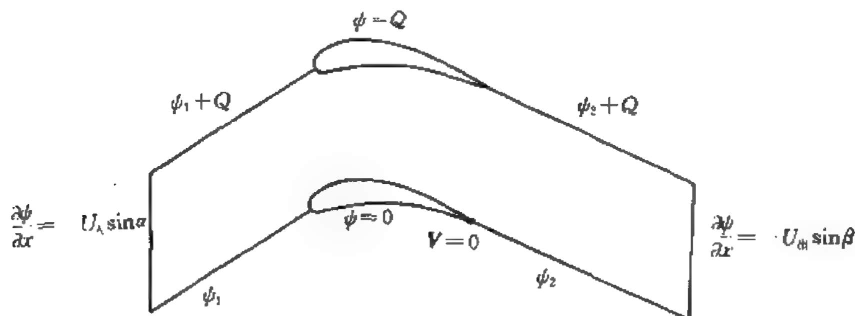


图 C.2.3

以上位势流方法可以推广到三维问题中去，那时可采用位势函数，具体方程为

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \qquad (C.2.1.18)$$

采用有限元方程作法同前。

2. 有自由面的位势流

在水动力学中有一大类问题属于有自由面的问题（图 C.2.4）。比如水闸的泄水，越坝水流，自由射流等问题，它们的共同特点是自由面形状事先未知。对于定常流动问题，自由面形状是不变的，在自由面上一般给出动力学条件，即压力为常数，速度值可由伯努利方程确定，自由面本身也是一条流线，这种情况下，方程和边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\psi=0\\&\psi|_{自由面}=常数,\quad p|_{自由面}=常数\\&\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{均匀流动处}=0\end{aligned}\right\} \qquad (C.2.1.19)$$

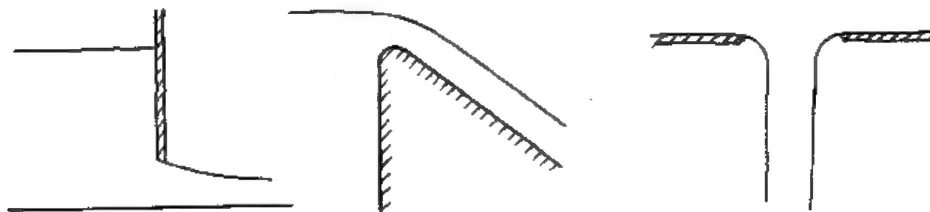


图 C.2.4

以水闸泄流为例，首先将流场划分为小单元（图 C.2.5），自由面形状可以根据物理图案

假定，流量则假定一个值。

自由面的形状记作 $y^{(0)}(x)=h^{(0)}$，流量为 $Q^{(0)}$，利用有限元方法可以得到 $\psi^{(0)}$ 的分布，由此可以计算自由面上的速度 $V^{(0)}$，再由伯努利方程

$$H=h+\frac{V^2}{2g} \qquad (C.2.1.20)$$

将 $V^{(0)}$ 代入 V，可以计算得新的 h 值。它一般与 $h^{(0)}$ 是不相等的。可以用所得的 h 值来修正 $h^{(0)}$ 值。比如 $h^{(1)}=h^{(0)}+\alpha\Delta h, \Delta h=h-h^{(0)}$。

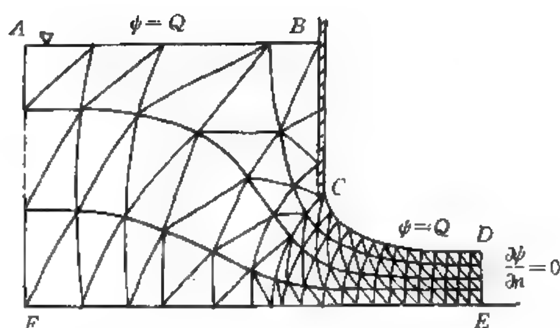


图 C.2.5

另外在 C 点处速度应为 $V_C=\sqrt{2g(H-h_C)}$，由 $\psi^{(0)}$ 计算值 $V_C^{(0)}$ 与 V_C 是不等的，因此设 $Q^{(1)}=\frac{Q^{(0)}}{V_C^{(0)}}V_C$，在新的 $h^{(1)}$，$Q^{(1)}$ 条件下作重复计算，直到计算收敛为止。此处 α 松驰因子，一般取小于 1。

上述问题的另一个方法是用变分法，变分原理为

$$\Pi=\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]-g(H-y)\right\}d\Omega \qquad (C.2.1.21)$$

这里 Ω 是可变边界的，故 Π 是 ψ，h 的泛函，因此

$$\delta\Pi=-\int_\Omega\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\delta\psi d\Omega+\int_{\partial\Omega_{固定}}\frac{\partial\psi}{\partial n}\delta\psi d\partial\Omega$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega_{自由}}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2-2g(H-h)\right]\delta n d\partial\Omega$$

其中 $\partial\Omega_{固定}$ 为固定边界部分，$\partial\Omega_{自由}$ 为自由边界部分。

注意到这里流量也是未知的，所以进一步可以将 Q 值也吸收到变分中来．可以用如下变分原理

$$\tilde{\Pi}=\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]-g(H-y)\right\}d\Omega$$
$$-\int_{CD}\sqrt{2g(H-y)}\psi d\Omega \qquad (C.2.1.22)$$

在这些变分计算时注意到 h 变化时网格也是变化的，所以人们设一部分网格（如闸外部分）与 h 有关，计算便可以得到简化。另外（C.2.1.22）中 $\int_{CD}$ 积分部分 y 就是 h，但它以 y 形式出现表示它在关于 h 取导时不出现，这在生成有限元离散方程时要特别注意。

以上方法只适用于定常问题，关于不定常问题，原则上是一样的，实际计算大为复杂，这里不拟详细讨论。

2.1.2 亚声速无粘性流体流动的数值计算

亚声速流动没有激波，来流一般为均匀的，所以流动可以认为是无旋的，对于定常流动，一般采用全位势方程

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\left(1-\frac{w^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

$$-\frac{2uv}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{2uw}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}-\frac{2vw}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}=0 \tag{C. 2. 1. 23}$$

其中

$$a^2=a_\infty^2+\frac{\gamma-1}{2}U_\infty^2-\frac{\gamma-1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]$$

这是一个关于 φ 的非线性偏微分方程。

下面用有限元法解二维机翼的全位势流动。

这里以二维问题为例来说明（C. 2. 1. 23）式的求解方法。用有限元方法求解，首先将方程改写为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{u^2}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{v^2}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{2uv}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \tag{C. 2. 1. 24}$$

或

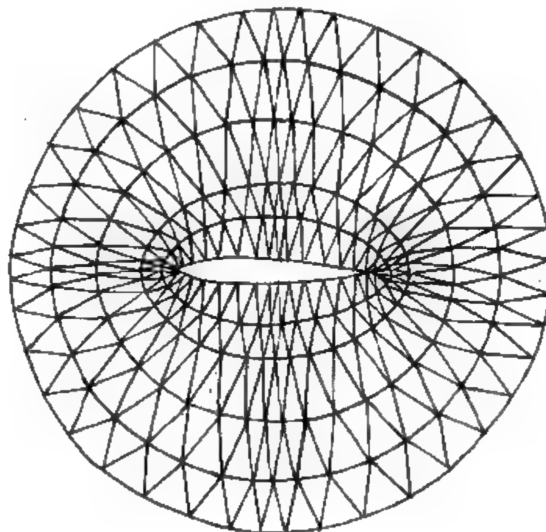
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=q \tag{C. 2. 1. 25}$$

这是一个泊松方程，求解过程为

（1）假定一个 $\varphi^{(0)}$，比如它可以是不可压缩流动时的 φ 值，由此确定 $q^{(0)}$。

（2）由 $q^{(0)}$ 求解得 $\varphi^{(1)}$，当 $\varphi^{(1)}-\varphi^{(0)}$ 不够小时将 $\varphi^{(1)}$ 代替 $\varphi^{(0)}$。重复以上过程，直到 $\varphi^{(1)}-\varphi^{(0)}$ 足够小时为止。

这里需要给出尾缘处的 K-noJ 条件，为此求解（C. 2. 1. 25）时应当从尾缘给出一流线，其形状是假定的（图 C. 2. 6）。这里需要假定 Γ 值，在计算得到 φ 值后，要计算上下的速度，在不等的情况下要调整尾缘流线的形状，而且还要调整 Γ 值，使得尾缘速度达最小值。所以每求解一次（C. 2. 1. 25）式时本身又有一个迭代的过程，不难看出计算工作量是很大的。



绕流场网格

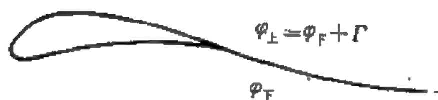
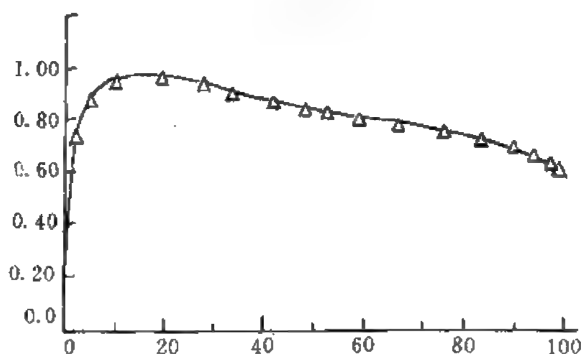


图 C. 2. 6

本问题还可以直接引用变分原理

$$\left.\begin{aligned}\delta\Pi&=0\\ \Pi&=\int_\Omega p(\psi)\mathrm{d}\Omega\end{aligned}\right\} \tag{C. 2. 1. 26}$$

$$P(\psi)=(1-\nabla\psi\cdot\nabla\psi)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{C. 2. 1. 27}$$



$M=0.72$ 时的解

图 C. 2. 7

它可以直接生成非线性的有限元方程，当然求解也是很困难的。

Habashi 对圆柱和单翼进行计算；Baskharone 和 Hamed 对翼栅进行了计算，部分结果如图 C. 2. 7 及图 C. 2. 8 所示。

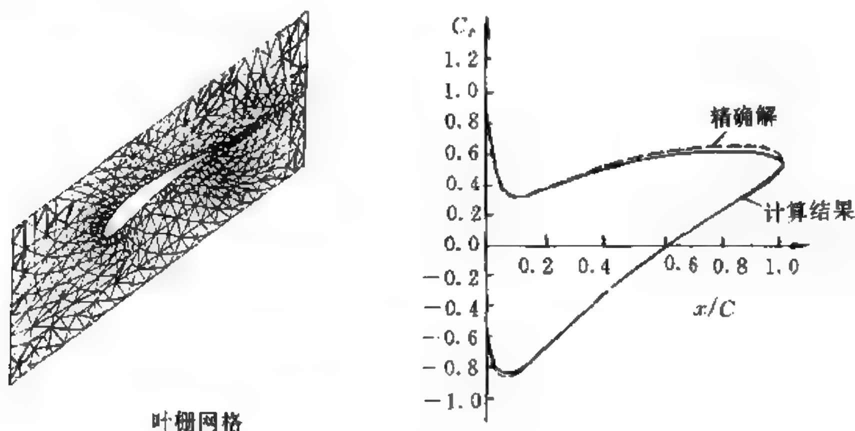


图 C. 2. 8

下面介绍二维流动的有限元基本解法。

对于薄翼小攻角这样扰动比较小的流动，亚声速位势流方程可以线性化而得到如下方程：

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{C. 2. 1. 28}$$

其中 $\beta=\sqrt{1-M_\infty^2}$，$x$ 为主流方向。在二维时，方程进一步简化为：

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{C. 2. 1. 29}$$

大家知道，上述方程的基本解为：

$$\frac{Q}{2\pi}\ln \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\beta^2} \tag{C. 2. 1. 30}$$

其中 ξ，η 为空间某一点。该解表示一个源的流动，Q 为源的强度，另外一个基本解为涡：

$$\frac{\Gamma}{2\pi}\text{arc tg}\,\frac{\beta(y-\eta)}{x-\xi} \tag{C. 2. 1. 31}$$

Γ 为涡强度，如果在空间分布许多的点源和点涡，则流场的总位势可以是它们的叠加：

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{Q_j}{2\pi}\ln \sqrt{(x-\xi_j)^2+\beta^2(y-\eta_j)^2} + \frac{\Gamma_j}{2\pi}\text{arc tg}\,\frac{\beta(y-\eta_j)}{x-\xi_j}\right] \tag{C. 2. 1. 32}$$

如果用复数形式表示，则设 $z=\bar{x}+i\bar{y}$；$\bar{x}=x$，$\bar{y}=\beta y$，则复势 $W=\varphi+i\psi$ 为：

$$W = \sum_{j=1}^{N}\frac{Q_j}{2\pi}\ln(z-\zeta_j) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z-\zeta_j) \tag{C. 2. 1. 33}$$

其中 $\zeta=\xi+i\beta\eta$，而 $\varphi=\text{Re}(W)$ 。由 $(\xi_j,\ \eta_j)$ 点的源汇引起的诱导速度为

$$
\left.\begin{aligned}
u_j^Q &= \frac{Q_j}{2\pi}\frac{x-\xi_j}{(x-\xi_j)^2+\beta^2(y-\eta_j)^2}\\
u_j^\Gamma &= -\frac{\Gamma_j}{2\pi}\frac{\beta(y-\eta_j)}{(x-\xi_j)^2+\beta^2(y-\eta_j)^2}\\
v_j^Q &= \frac{Q_j}{2\pi}\frac{\beta^2(y-\eta_j)}{(x-\xi_j)^2+\beta^2(y-\eta_j)^2}\\
v_j^\Gamma &= \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\beta(x-\xi_j)}{(x-\xi_j)^2+\beta^2(y-\eta_j)^2}
\end{aligned}\right\}\tag{C.2.1.34}
$$

总的速度为

$$
u=\sum_{j=1}^{N}(u_j^Q+u_j^\Gamma),\quad v=\sum_{j=1}^{N}(v_j^Q+v_j^\Gamma)\tag{C.2.1.35}
$$

这里要注意的是，源、涡点对本身位置的诱导速度为零。所以如果计算 N 个奇点对各点的诱导速度时，本身点的影响不计算在内，如果这些奇点分布在物体表面，则 (C.2.1.35) 中的求和就演变为积分，即：

$$
\left.\begin{aligned}
u &= \oint\left[\frac{q(\xi,\eta)}{2\pi}\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+\beta^2(y-\eta)^2}-\frac{\gamma(\xi,\eta)}{2\pi}\frac{\beta(y-\eta)}{(x-\xi)^2+\beta^2(y-\eta)^2}\right]\mathrm{d}s\\
v &= \oint\left[\frac{q(\xi,\eta)}{2\pi}\frac{\beta^2(y-\eta)}{(x-\xi)^2+\beta^2(y-\eta)^2}+\frac{\gamma(\xi,\eta)}{2\pi}\frac{\beta(x-\xi)}{(x-\xi)^2+\beta^2(y-\eta)^2}\right]\mathrm{d}s
\end{aligned}\right\}\tag{C.2.1.36}
$$

其中 $\mathrm{d}s$ 为弧元长，积分沿物面周线进行，(x, y) 不在周线上；当 (x, y) 落在周线上时，则积分应为主值积分，$\oint$ 改写为 $⨏$。

对于机翼绕流的流动，在物面上分布源与涡，它们的强度为 $q(\xi,\eta)$；$\gamma(\xi,\eta)$，为了计算它们的大小，需要由边界条件确定。设来流为 U_∞，则物面上

$$
\left.\frac{v}{U_\infty+u}\right|_\Gamma=\mathrm{tg}\theta\tag{C.2.1.37}
$$

由于 u、v 都比较小，所以可以近似为

$$
v|_\Gamma=U_\infty\mathrm{tg}\theta\tag{C.2.1.38}
$$

在尾缘处的条件为

$$
U_\infty+u=0\qquad v=0
$$

即

$$
\left.\begin{aligned}
u|_{\text{尾缘}} &= -U_\infty\\
v|_{\text{尾缘}} &= 0
\end{aligned}\right\}\tag{C.2.1.39}
$$

将这些条件代入 (C.2.3.6) 式，则将建立一些关于 γ，q 的积分方程，在实际求解时一般用离散化方程，即用 (C.2.1.35)，可以得到：

$$
\left.\begin{aligned}
&\left[U_\infty+\sum_{j=1}^{N}(u_j^Q+u_j^\Gamma)\right]_l\mathrm{tg}\theta=\left[\sum_{j=1}^{N}(v_j^Q+v_j^\Gamma)\right]_l\quad l=1,2,\cdots,N\\
&\left[\sum_{j=1}^{N}(u_j^Q+u_j^\Gamma)\right]_{\text{尾缘}}=-U_\infty,\quad \left[\sum_{j=1}^{N}(v_j^Q+v_j^\Gamma)\right]_{\text{尾缘}}=0
\end{aligned}\right\}\tag{C.2.1.40}
$$

由于 u_j^Q，v_j^Q，u_j^Γ，v_j^Γ 都与 γ，q 有关，这就建立了关于 γ，q 的方程，求解后可得速度分布，进而得到位势分布。

以上方法对于亚声速可压流动时只适用于小扰动线化方程。若对于不可压流，则不限于小扰动，但这时边界条件应当采用(C.2.1.37)而不是(C.2.1.38)。

顺便指出，有限基本解实际上就是边界元方法的一种应用。关于这一点是很易得到说明的。比如只考虑源点的情况，由边界元方法知，内点 φ 的计算可由以下公式确定

$$\varphi=\frac{1}{2\pi}\left[\oint \ln r\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}s-\oint\frac{\partial \ln r}{\partial n}\varphi\,\mathrm{d}s\right] \tag{C.2.1.41}$$

其中 ds 为物面线元，$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\beta^2}$，$n$ 为物面法向，在物面上分若干块，在每一块上定义一个 φ 值，这里用最简单的常数函数作面元上的插值函数，将它代入上式即可得到关于 φ 的表达式，其中物面上 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 的值是已知的、φ 在物面上的各单元分别为 φ_i，代入后即得关于 φ_i 的代数方程。这里用的格林函数为 $\ln r$，如果考虑涡时，可以用 $\frac{\partial}{\partial n}$（$\ln r$）作格林函数。关于这一问题的讨论可以参考 Flechter（1984）一书及 Jaswon 和 Symm（1977）的论文。

利用有限基本解的方法的计算已有不少论文。这一方法还推广到三维的情况，详细讨论可以参考安继光的“亚声速空气动力学中的有限基本解方法”等书和论文。

2.1.3 跨声速无粘性流体流动的数值计算

一般来说，流场中既有超声速区又有亚声速区的情况，都可以称作跨声速流动。对于一般情况来说，这种流场的计算比较困难，因为：(1) 对于定常流动，亚声速区方程属于椭圆型，超声速区方程属于双曲型，二种类型方程有很大区别，所以求解方法不同，由于事先不知道什么区域是亚声速的，什么区域是超声速的，所以给求解带来了困难；(2) 在出现超声速区时，当流动由超声速减速为亚声速时，会出现激波，这是一种强间断，而且位置也是事先不知道的，计算时遇到极大的困难，鉴于以上二个原因，促进计算流体动力学的迅速发展。

本节限于全流场大部分是亚声速，只有一个小的超声速区，且激波强度很弱，可以近似将流动仍视为等熵流动。关于有强激波流动的计算将在以后的章节讨论。这样，本节将着重讨论超声速区的处理。

大家知道，不定常无粘性可压缩流体的流动，基本方程总是双曲型的，所以超声速和亚声速的区域可以用相同的方法来处理，解决定常跨声速流的一个简单方法是将它看作不定常流动在时间趋向无穷时的渐近结果，计算就很方便了，只是比较花计算时间。关于不定常流的计算也将在以后章节中讨论。顺便说一下，这种将定常流看作不定常流渐近的方法又叫时间相关法。

另外一种处理跨声速流中不同区域的计算的方法叫类型相关法。在定常流动中，亚声速区时方程是椭圆型的，超声速区时方程是双曲型的，椭圆型方程求解应当用中心差分方法，而双曲型方程求解时应当用迎风格式，并且计算时应当推进计算。因此人们在计算时设计的格式与方程在当地的类型相关，即亚声速时自动取中心差分格式，超声速时自动取迎风格式。在计算开始时由于不能确定哪里是亚声区，哪里是超声区，可以根据经验假设，在计算过程中不断修正，直到收敛为止。计算结束时自动显示亚声速区和超声速区。下面以定常小扰动跨声速流为例来说明上述思想实行时的具体步骤。

定常小扰动跨声速流的位势方程为

$$[K-(\gamma+1)\varphi_x]\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0 \tag{C.2.1.42}$$

这里将问题限于二维，对于三维的情况是类似的，读者可以自行完成。其中 $K=(1-M_\infty^2)/\tau^{2/3}$，$y=\tau^{1/3}\bar{y}$，$x=\bar{x}$，$\tau=\delta/c$，$\bar{x}$，$\bar{y}$ 为 x，y 方向坐标值与参考长度（如翼弦长 c）之比值，ϕ

为扰动位势，方程在

$$\left.\begin{array}{ll}K-(\gamma+1)\varphi_x>0 & \text{亚声速、椭圆型} \\ K-(\gamma+1)\varphi_x<0 & \text{超声速、双曲型}\end{array}\right\} \tag{C.2.1.43}$$

上述方程的边界条件为

上游来流

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \tag{C.2.1.44}$$

壁面条件

$$v_n=0$$

或由于薄翼可近似为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=U_\infty h'(x) \tag{C.2.1.45}$$

或无量纲化后为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=M_\infty\tau^{-1/3}h'(x) \tag{C.2.1.46}$$

尾缘处用 K-ЖK 条件，即速度为零，对称机翼时不用附设 K-ЖK 条件，不对称机翼还要设一环量 Γ，使尾缘上下处的位势及速度满足

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_{上}-\varphi_{下}=\Gamma \\ \dfrac{v_{上}}{u_{上}+U_\infty}=\dfrac{v_{下}}{v_{下}+U_\infty}\end{array}\right\} \tag{C.2.1.47}$$

下游条件：

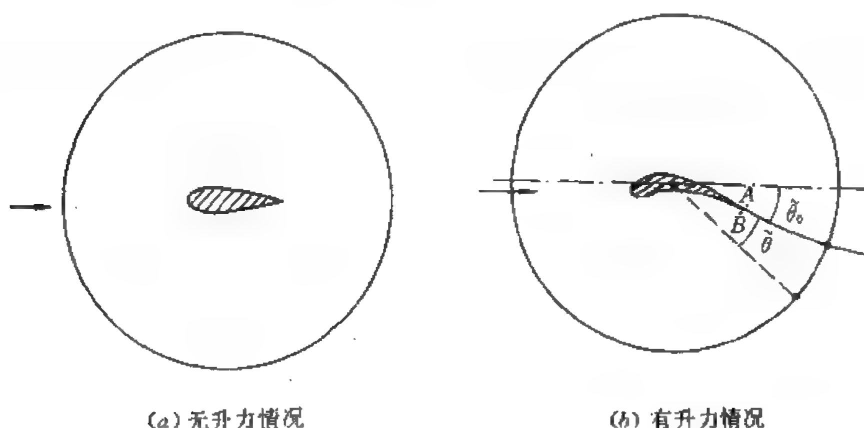
当机翼对称时由于流动大部分亚声速，所以下游一般也是亚声速的，故下游条件也是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

当不对称时有举力，这时 ϕ 分成二个部分：$\varphi_{无}+\varphi_{举}$，前者表示无举力的部分，后者是有举力部分，$\varphi_{举}=\dfrac{\Gamma}{2\pi}\theta$，$\theta$ 如图 C.2.9 所示，以顺时针方向为正。图中 $\tilde{\theta}$ 是在 x，βy 坐标下的计算值，与 θ 的关系为

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}[\beta\mathrm{tg}(\tilde{\theta}_0+\tilde{\theta})]-\mathrm{tg}^{-1}[\beta\mathrm{tg}\tilde{\theta}_0] \qquad (\beta=\sqrt{1-M_\infty^2}) \tag{C.2.1.48}$$

在以上边界条件下求解方程 (C.2.1.42)，在小扰动时边界条件还可以更为简化。比如翼



(a) 无升力情况　　(b) 有升力情况

图　C.2.9

面条件及尾缘分区线都可以假定在 x 轴上，从而使计算大为简化。如图 C.2.10 所示。

现在的问题是建立差分格式，根据类型相关的基本思想，格式写作

$$p_{i,j}+q_{i,j}-\mu_{i,j}(p_{i,j}-p_{i,j-1})=0 \tag{C.2.1.49}$$

图 C.2.10

其中
$$\mu_{i,j}=\begin{cases}0 & K-(\gamma+1)(\varphi_x)_{i,j}>0\\ 1 & K-(\gamma+1)(\varphi_x)_{i,j}<0\end{cases} \tag{C.2.1.50}$$

$$\begin{cases}p_{i,j}=\left[K-(\gamma+1)\dfrac{\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i-1,j}}{2\Delta x}\right]\dfrac{\varphi_{i+1,j}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i-1,j}}{\Delta x^2}\\ q_{i,j}=\dfrac{\varphi_{i,j+1}-2\varphi_{i,j}+\varphi_{i,j-1}}{\Delta y^2}\\ (\varphi_x)_{i,j}=\dfrac{\varphi_{i+1,j}-\varphi_{i-1,j}}{2\Delta x}\end{cases} \tag{C.2.1.51}$$

不难看出，$K-(\gamma+1)(\varphi_x)_{i,j}>0$ 时引用节点与 $K-(\gamma+1)(\varphi_x)_{i,j}<0$ 时不同的边界条件离散点如图 C.2.11 所示，使前后缘落在网格点之间（见图 C.1.12）。

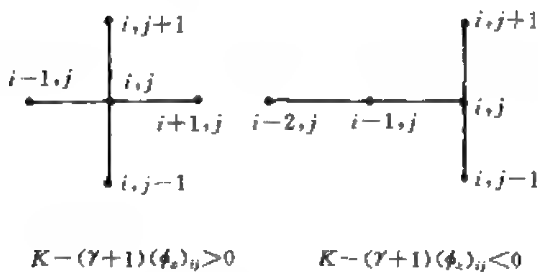


图 C.2.11

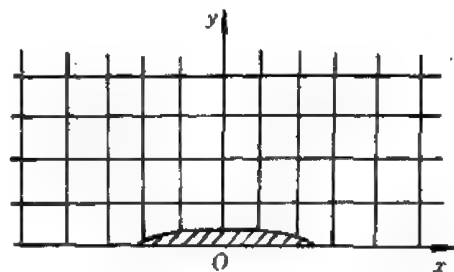


图 C.2.12

边界条件离散化如下：

进口

$$\varphi_{1,j+1}=\varphi_{1,j}\qquad j=1,2,\cdots,J-1(\text{均为零})$$

上、下边

$$\varphi_{i+1,J}=\varphi_{i,J}+\Delta\varphi_{i,J}\qquad i=1,2,\cdots,I-1$$
$$\varphi_{i+1,1}=\varphi_{i,1}-\Delta\varphi_{i+1,1}\qquad i=1,2,\cdots,I-1 \tag{C.2.1.52}$$
$$\Delta\varphi_{i,J}=\Delta\varphi_{i,1}=U_\infty\Delta x_i$$

出口

$$\varphi_{I,j}=\varphi_{I,j+1}+\Delta\varphi_{I,j}\qquad j=1,2,\cdots,J-1$$

物面上

$$\begin{aligned}&\frac{-3\varphi_{i,j_c}+4\varphi_{i,j_c+1}-\varphi_{i,j_c+2}}{2\Delta y}=M_\infty\tau^{-\frac{1}{3}}h(x_i)_{上}\\ &\frac{3\varphi_{i,j_c}-4\varphi_{i,j_c-1}+\varphi_{i,j_c-2}}{2\cdot\Delta y}=M_\infty\tau^{-\frac{1}{3}}h(x_i)_{下}\\ &i_a\leqslant i\leqslant i_b\end{aligned} \tag{C.2.1.53}$$

bc 上

$$\varphi_{i,j_{c上}} = \varphi_{i,j_{c下}} + \Gamma \qquad i_b < i < I \tag{C.2.1.54}$$

以上 (C.2.1.52) 有 $(I-2)*(J-2)-(I-i_a)$ 个方程，物面上 $I*(i_b-i_a+1)$ 个方程，bc 上有 $(I-i_b-1)$ 个方程，而点则共有 $(I-2)*(J-2)+(I-i_a)$ 个，尚缺 $(I-I_b-1)$ 个方程，它们为 bc 上，设

$$\left(\frac{\varphi_{i,j_c+1}-\varphi_{i,j_c}}{\Delta y}\right)_{上} = \left(\frac{\varphi_{i,j_c+1}-\varphi_{i,j_c}}{\Delta y}\right)_{下} \tag{C.2.1.55}$$

所有这些方程构成一大型稀疏阵，可以用松弛方法解，点松弛比较慢，线松弛则比较快。沿垂直的网格线上可以构成三对角方程组。松弛因子 ω 在 (1.5～2) 之间选取。

$$\varphi^{(k+1)} = \omega\varphi^{(k)} + (1-\omega)\tilde{\varphi}^{(k+1)} \tag{C.2.1.56}$$

$\tilde{\varphi}$为第 $k+1$ 次的计算值。

Murman 和 Cole 首先采用上述方法计算一对称圆弧机翼的跨声速线流，其结果如图 C.2.13 所示。

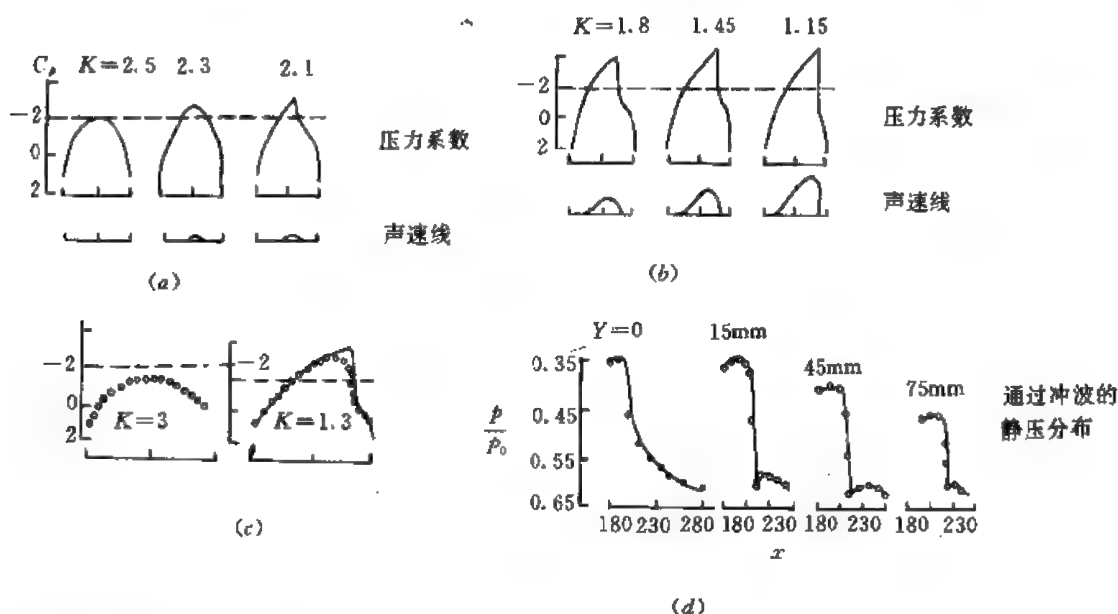


图 C.2.13

这里需要说明几点：

(1) 这里将双曲型格式中，用 $(i-1, j)$ 点的 x 方向二阶差商代替了 (i, j) 点的二阶差商，这种做法造成了一个一阶的误差，实际上相当于加了一项人工粘性项，它的作用是使计算收敛，并自动出现压缩激波。

(2) 上述计算过程可以应用于不可压和全亚声速流动。计算中要求 $M_\infty < 1$。

以上的方法可以进一步推广到全位势流动，即不限于小扰动的范围，具体作法是将方程在流场的各局部位置分别取流向为当地的流动方向，设为 s 方向，与它正交的方向为 n，则方程可写作

$$(a^2-q^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2} = 0 \tag{C.2.1.57}$$

由于 s，n 方向分别与 $(u/q, v/q)$ 及 $(-v/q, u/q)$ 平行，$q=\sqrt{u^2+v^2}$，故

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}&=\frac{1}{q^2}\left(u^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2uv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+v^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}&=\frac{1}{q^2}\left(v^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2uv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+u^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\end{aligned}\right\}\tag{C.2.1.58}$$

当 $q<a$ 时用中心差分，$q>a$ 时用前向差，$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}$仍用上游点，即取

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}-\Delta\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\right)$$

由于 $\Delta\cdot\frac{\partial}{\partial s}=\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{v}{u}\Delta x\frac{\partial}{\partial y}\overset{\text{或}}{=\!=}\frac{u}{v}\Delta y\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}$，故人工粘性项实际为

$$-\frac{1}{q^2}(a^2-q^2)\left[\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\right)+\frac{v}{u}\Delta x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\right)\right]\tag{C.2.1.59}$$

因为

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{ij}&=\frac{\varphi_{i,j}-2\varphi_{i-1,j}+\varphi_{i-2,j}}{\Delta x^2}+\Delta x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\\ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)_{ij}&=\frac{\varphi_{i,j}-\varphi_{i-1,j}-\varphi_{i,j-1}+\varphi_{i-1,j-1}}{\Delta x\cdot\Delta y}+\frac{1}{2}\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)\\ &\quad+\frac{1}{2}\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}&=\frac{\varphi_{i,j}-2\varphi_{i,j-1}+\varphi_{i,j-2}}{\Delta y^2}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\end{aligned}\right\}\tag{C.2.1.60}$$

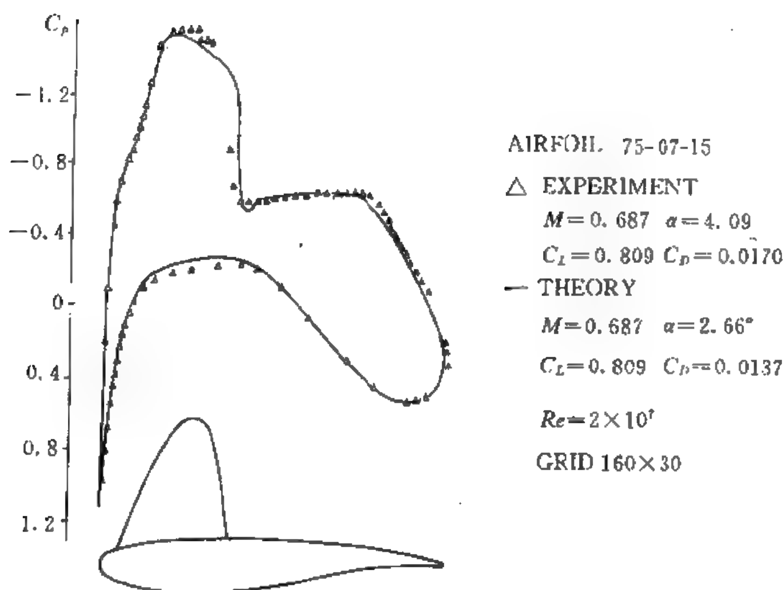


图 C.2.14

△实验值 —理论值

所以

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\right)_{ij}=\frac{u^3}{q}\Delta x\,\frac{\varphi_{i,j}-2\varphi_{i-1,j}+\varphi_{i-2,j}}{\Delta x^2}+\frac{v^3}{q}\Delta y\,\frac{\varphi_{i,j}-2\varphi_{i,j-1}+\varphi_{i,j-2}}{\Delta y^2}$$
$$+\left(\frac{u}{q}\Delta x+\frac{v}{q}\Delta y\right)uv\,\frac{\varphi_{i,j}-\varphi_{i-1,j}-\varphi_{i,j-1}+\varphi_{i-1,j-1}}{\Delta x\Delta y}$$
$$+\Delta x\,\frac{u}{q}\,(u^2u_{xx}+uvv_{xx})\;+\Delta y\,\frac{v}{q}\,(uvu_{yy}+v^2v_{yy}) \qquad (\text{C. 2. 1. 61})$$

以上假定 $u>0$，$v>0$，如 $u<0$，$v<0$ 或其中之一小于零时，以上公式要作相应变化。

以上是在直角坐标下进行的。如果用贴体坐标更为方便，并且可采用守恒型，再利用类型相关的思想建立差分格式，用松弛方法求解。Jamson 首先实现了上述方法，所得结果如图 C. 2. 14 所示。

可以看出计算结果与实验相符甚好。Jamson 还计算了 $M_\infty=1$ 的情况，为跨声速流的研究提供了有力的数据。

除了上述方法外，跨声速流的计算还存在人工密度、人工压力的方法，它们只用于小超声速区，这种方法目前应用很少，所以不作详细介绍，有兴趣的读者可以参考有关文献。

2.2 Burger 方程及其求解

上一节讨论的问题总的说来可以归结为弱非线性问题。对于有激波的问题，则属于强非线性问题，为了以后进一步讨论气体动力学方程的求解，首先需要从模型方程出发，讨论激波的生成和有关的一系列问题。最具有典型意义并且与以后讨论相关的是 Burger 方程。

一维 Burger 方程具有如下的形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (\nu>0) \qquad (\text{C. 2. 2. 1})$$

当 $\nu=0$ 时方程叫做无粘性 Burger 方程，具有如下的形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (\text{C. 2. 2. 2})$$

（C. 2. 2. 1）式是可以求解的，引入 Hopf-Cole 变换

$$u=-2\nu\frac{\phi_x}{\phi}=-2\nu(\ln\phi)_x \qquad (\text{C. 2. 2. 3})$$

代入（C. 2. 2. 1）式可得

$$\left(\frac{\phi_x}{\phi}\right)_t=\nu\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi}\right)_x$$

由于 $(\phi_x/\phi)_t=(\phi_t/\phi)_x$，故上式改写为

$$\left(\frac{\phi_t}{\phi}\right)_x=\nu\left(\frac{\phi_{xx}}{\phi}\right)_x$$

二边关于 x 积分，设无限远处 $u=$ 常数，则二边积分得

$$\phi_t=\nu\phi_{xx} \qquad (\text{C. 2. 2. 4})$$

这是一个热传导方程，假定起始条件为

$$u_{ini}(x,0)=\varphi(x) \qquad (\text{C. 2. 2. 5})$$

则
$$\psi(x,0)=\exp\left[-\frac{1}{2\nu}\int_0^x\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta\right]\xlongequal{\text{记作}}\Phi(x) \tag{C.2.2.6}$$

方程（C.2.2.4）在起始条件（C.2.2.6）时的解为

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t}\right]\mathrm{d}\xi \tag{C.2.2.7}$$

由 Hopf-Cole 变换可得

$$u(x,t)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\xi}{t}\exp\left[-\frac{1}{2\nu}\int_0^{\xi}\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t}\right]\mathrm{d}\xi}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2\nu}\int_0^{\xi}\varphi(\eta)\mathrm{d}\eta-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t}\right]\mathrm{d}\xi} \tag{C.2.2.8}$$

当 $\nu=0$ 时则解为

$$u(x,t)=\varphi(z)\qquad z=x-u(x,t)t \tag{C.2.2.9}$$

不难看出

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}t\right)$$

或
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\varphi'(z)}{1+t\varphi'(z)} \tag{C.2.2.10}$$

其中 $\varphi(x)$ 为 $u(x,0)$，上式可以看出，当 $1+t\varphi'(z)=0$ 时，$\frac{\partial u}{\partial x}$ 变为无限大，如果 $\varphi'(x)$ 有负值，则 t 达到使 $1+t\varphi'(z)$ 为零时，$\frac{\partial u}{\partial x}$ 就变为无限大，如图 C.2.15 所示。



图 C.2.15

这就意味着不连续点的出现。

若设

$$u(x,0)=\begin{cases}+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -1 & x>0\end{cases} \tag{C.2.2.11}$$

代入（C.2.2.8）式即可得到

$$u(x,t)=\frac{-\exp\left(\frac{x}{\nu}\right)\int_{-\frac{x+t}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty}\exp(-\xi^2)\mathrm{d}\xi+\int_{\frac{x-t}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty}\exp(-\xi^2)\mathrm{d}\xi}{\exp\left(\frac{x}{\nu}\right)\int_{-\frac{x+t}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty}\exp(-\xi^2)\mathrm{d}\xi+\int_{\frac{x-t}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty}\exp(-\xi^2)\mathrm{d}\xi}$$

当 $t\to\infty$ 时，对于固定的 x，上式中的积分均趋于 $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\xi^2)\mathrm{d}\xi$，因此

$$u(x,t\to\infty)=-\operatorname{th}\left(\frac{x}{2\nu}\right) \tag{C.2.2.12}$$

并且当 $\nu\to 0$ 时，$u(x,t\to\infty)$ 与(C.2.2.11)式相同，也就是说 $u(x,t)=u(x,0)$，即 $u(x,t)$ 不随时间变化，保持初始的形状。$u(x,t)$ 解的一般情况如图 C.2.16 所示。

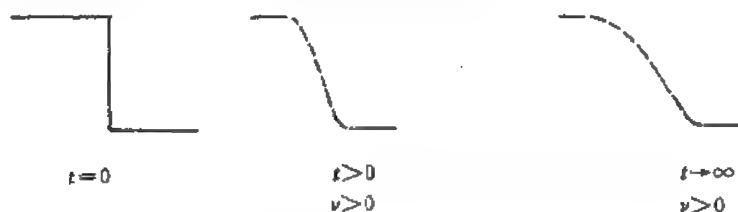


图 C.2.16

从图中看出，$\nu>0$ 时，u 在一个有限范围内保持较大的变化速度。

如果给出的初值为

$$\varphi(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ +1 & x>0\end{cases} \tag{C.2.2.13}$$

若 $\nu=0$，方程（C.2.2.2）的特征为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u \tag{C.2.2.14}$$

显然，$x>0$ 时特征线指向 x 的正向，$x<0$ 时特征线指向 x 的负向，二族特征线在二个方向上向外进行，在它们之间有一个膨胀区，其解为

$$u(x,t)=\begin{cases}1 & x>t\\ \dfrac{x}{t} & -t\leqslant x\leqslant t\\ -1 & x<-t\end{cases} \tag{C.2.2.15}$$

这一解在 $x=\pm t$ 处一阶导数不连续（图 C.2.17），当 $\nu\neq 0$ 时，u 的解可写为

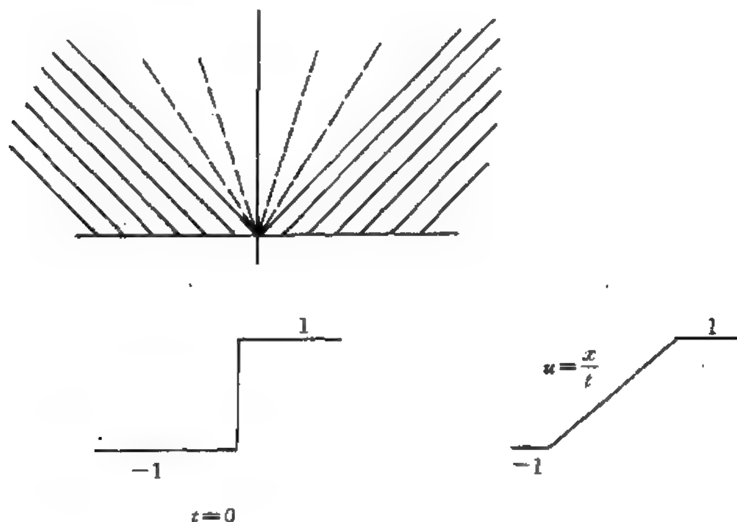


图 C.2.17

$$u(x,t)=\frac{\exp\left(-\frac{x}{\nu}\right)\int_{\frac{t-x}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty}\exp(-\xi^2)\mathrm{d}\xi-\int_{\frac{t+x}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty}\exp(-\xi^2)\mathrm{d}\xi}{\exp\left(-\frac{x}{\nu}\right)\int_{\frac{t-x}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty}\exp(-\xi^2)\mathrm{d}\xi+\int_{\frac{t+x}{2\sqrt{\nu t}}}^{\infty}\exp(-\xi^2)\mathrm{d}\xi} \tag{C.2.2.16}$$

当 $t\to\infty$ 时，解 $u(x,t)\to 0$。事实上，当 x 固定时，积分下限在 $t\to\infty$ 时趋于无限大。于是与上限相同了，积分趋于零。这表明，当 $t\to\infty$ 时，初始的间断被抹掉了，这与前面的情况不同。在前者，初始的间断变为一有限区域内的变化，它被抹平了，但没有抹掉，抹平过程也是由于粘性作用所造成的，这说明前者的间断被保留下来，后者的间断是保留不住的。这里说明间断是否容许和间断性质有关。对于一般情况，什么样的间断是容许的呢？

为了讨论这个问题，首先引入弱解的概念。大家知道微分方程的解应当是连续的和可微的，有间断的解是不满足微分方程的，因为在间断点上不存在导数。但如果将微分方程改写一下，比如方程（C.2.2.2）式改写为散度形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)=0 \tag{C.2.2.17}$$

利用格林公式有

$$\int_{\Omega}\left[\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}\Omega=\oint_{\partial\Omega}\left(un_t+\frac{u^2}{2}n_x\right)\mathrm{d}l$$

其中 $\mathrm{d}l$ 是 Ω 域边界 $\partial\Omega$ 上的微元，n_t，n_x 是外法向的二个分量（图 C.2.18）。

如果在间断线 Γ 上取一封闭的曲线，它的二侧无限接近 Γ，而跨过 Γ 的厚度又无限小，于是上述积分就变为

$$\mathrm{d}l\left(u_-n_{-t}+\frac{u_-^2}{2}n_{-x}+u_+n_{+t}+\frac{u_+^2}{2}n_{+x}\right)=0$$

由于 $\quad n_{-t}\mathrm{d}l=\mathrm{d}x,\qquad n_{-x}\mathrm{d}l=-\mathrm{d}t,$

$\quad n_{+t}\mathrm{d}l=-\mathrm{d}x,\qquad n_{+x}\mathrm{d}l=\mathrm{d}t$

上式可得

图 C.2.18

$$(u_--u_+)\mathrm{d}x=\left(\frac{u_-^2}{2}-\frac{u_+^2}{2}\right)\mathrm{d}t$$

如果将 $u^2/2$ 写作 f，则具有更加一般的形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(u_--u_+)=f_--f_+ \tag{C.2.2.18}$$

这里下标"－"和"＋"分别表示间断的左侧和右侧，这里间断解不满足方程本身，但满足相应的积分关系式，这种解叫做弱解，比如满足初始条件（C.2.2.11）和方程（C.2.2.2）的解 $u(x,t)=u(x,0)$ 是一个弱解。但

$$u(x,t)=\begin{cases}1 & x<-\frac{1}{2}(a-1)t\\ -a & -\frac{1}{2}(a-1)t<x<0\\ a & 0<x<\frac{1}{2}(a-1)t\\ -1 & x>\frac{1}{2}(a-1)t\end{cases}\qquad a>1$$

也满足上述方程和起始条件，这说明弱解不唯一。为了使弱解是唯一的，应当附加一些条件，(C.2.2.18) 式又叫做 Ranking-Hugoniot 间断条件。

在前面提到的二个例子中，第二个例子里左右侧的特征向外，中间点的传播速度为零，而中间点的速度可以写作

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{f_{+}-f_{-}}{u_{+}-u_{-}}$$

第二个例子中

左特征速度<间断速度<右特征速度

这个例子中间断是不保留的，在第一个例子中则正相反。

左特征速度>间断速度>右特征速度

这时间断保持，左特征速度表示为

$$\lim_{w\to u_{-}}\frac{f_{-}-f_{w}}{u_{-}-w}=\text{左特征速度}$$

其中 f_w 表示 $u=w$ 时 f 的值。类似地

$$\lim_{w\to u_{+}}\frac{f_{+}-f_{w}}{u_{+}-w}=\text{右特征速度}$$

Oleinik 的进一步研究表明，间断或弱解唯一性的条件是满足

$$\frac{f_{-}-f_{w}}{u_{-}-w}\geqslant\frac{f_{+}-f_{-}}{u_{+}-u_{-}}\geqslant\frac{f_{+}-f_{w}}{u_{+}-w} \tag{C.2.2.19}$$

其中 w 为 u_+ 和 u_- 之间的任何值。上述条件可以理解为左右区的特征线应当是交汇的，如果发散，间断就会逐渐消失，间断不会保持（图 C.2.19）。

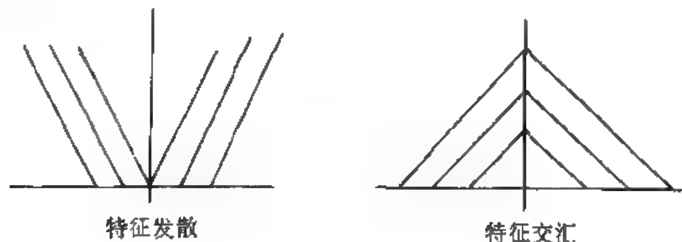


图 C.2.19

上述确定间断解存在的条件 (C.2.2.19) 又叫做熵条件。这是对于一个方程而言的，对于方程组，Lax 证明：

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}=0 \tag{C.2.2.20}$$

改写为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A(U)\frac{\partial U}{\partial x}=0 \tag{C.2.2.21}$$

在纯双曲型时 $A(U)$ 存在 n 个实特征 λ_1，λ_2，…，λ_n，它们由小到大排列。满足

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{k-1}(U_{-})<\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}<\lambda_{k}(U_{-})\\ \lambda_{k}(U_{+})<\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}<\lambda_{k+1}(U_{+})\end{aligned}\right\} \tag{C.2.2.22}$$

的间断叫 k 激波，它是可能出现的间断解。上述条件相当于

$$\lambda_k(U_+) < \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} < \lambda_k(U_-) \tag{C.2.2.23}$$

如一维不定常无粘可压缩气体的 Euler 方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho E u + p u) = 0$$

三条特征线方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u - c, u, u + c$$

设激波轨迹为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = N$，则可能的激波为

(1) $N < u_- - c_-$，$u_+ - c_- < N < u_-$　向左传播的激波

(2) $u_+ - c_+ < N < u_-$，$u_+ < N < u_- + c_-$　向右传播的激波

(3) $u_- < N < u_- + c_-$，$u_+ + c_- < N$　$\Rightarrow N - u_- < c_-$，$N - u_+ > c_+$

表示激波速度相对波后流动为亚声速，相对波前流动是超声速的

由上讨论可知，满足熵条件的间断才是可能的间断。

对于有粘性的情况，解实际是连续的，$\nu \to 0$ 时解才趋于满足熵条件的不连续解。当人们用差分计算无粘性 Burger 方程时，实际上加入了人工粘性项，所以不连续分布在一个小的区域内变化，如果这个区越小，则越精确。下面来讨论用差分计算有间断解时可能出现的问题和解决的途径，也就是说如何正确又精确地捕捉激波。

2.3 激 波 的 捕 捉

上面一节讨论了 Burger 方程的解，人们发现无粘性条件下存在间断解，即弱解；在有粘性时，当粘性很小时，解也接近有间断，间断的二侧满足与微分方程相对应的积分关系。这与气体动力学中的激波是一样的。激波也是一种间断，物理量满足积分关系式（即激流前后的关系式），同时只有满足熵条件的解才是可能的间断。

由于流场中，激波位置一般事先是未知的，在复杂流场中有时连激波的个数也是未知的，所以要通过计算自动正确地显示激波的位置。形状和强度的确是一件不易办到的事。一般的作法是以 Burger 方程为模型方程，将所设计的方法应用于 Burger 方程，对出现的问题进行理论分析和数值分析，找出其存在的问题和解决方法，再将这种方法应用于气体动力学方程作数值试验。确定其可用性和精度。

下面以无粘性 Burger 方程为模型方程，介绍几种常用的差分格式及产生的问题。

方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \left(f = \frac{u^2}{2}\right) \tag{C.2.3.1}$$

起始条件为：

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 1 & x < -1 \\ 0 & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases} \tag{C.2.3.2}$$

该问题的解为：$t\to\infty$时趋向于

$$u(x,\infty)=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -1 & x>0\end{cases} \tag{C.2..3.3}$$

1. 迎风格式（Godunov 格式）

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{|u_j^n|+u_j^n}{2}\frac{f_j^n-f_{j-1}^n}{\Delta x}+\frac{u_j^n-|u_j^n|}{2}\frac{f_{j+1}^n-f_j^n}{\Delta x}=0 \tag{C.2.3.4}$$

为讨论方便起见，暂设 $u_j>0$，上式写作

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{f_j^n-f_{j-1}^n}{\Delta x}=0$$

为讨论格式的稳定性，记 ε_u 为 u^n 的误差，ε_f 为 f^n 的误差，则误差所满足的方程为

$$\frac{\varepsilon_{u_j}^{n+1}-\varepsilon_{u_j}^n}{\Delta t}+\frac{\varepsilon_{f_j}^n-\varepsilon_{f_{j-1}}^n}{\Delta x}=0$$

由于　　$\varepsilon_f=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\varepsilon_u=A\varepsilon_u$

故上式改写为

$$\begin{aligned}\varepsilon_{u_j}^{n+1}&=\varepsilon_{u_j}^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(A_j^n\varepsilon_{u_j}^n-A_{j-1}^n\varepsilon_{u_{j-1}}^n)\\ &\approx\varepsilon_{u_j}^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}A(\varepsilon_{u_j}^n-\varepsilon_{u_{j-1}}^n)\end{aligned}$$

设 $\varepsilon_{u_j}^n=A^n e^{i\theta j}$，代入上式得增长因子为：

$$\frac{A^{n+1}}{A^n}=G=1-A\frac{\Delta t}{\Delta x}+A\frac{\Delta t}{\Delta x}(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta) \tag{C.2.3.5}$$

显然稳定条件为

$$\left|A\frac{\Delta t}{\Delta x}\right|\leqslant 1$$

由于 $A=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}=u$，故稳定条件为

$$|u|_{\max}\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1 \tag{C.2.3.6}$$

应该指出，这只是一个启发性的结果，因为方程本身是非线性的，A 与 u 有关，故这一结论只作参考用。

2. Lax 格式

$$u_j^{n+1}=\frac{u_{j+1}^n+u_{j-1}^n}{2}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{f_{j+1}^n-f_{j-1}^n}{2} \tag{C.2.3.7}$$

作类似上述的分析可得增长因子为

$$G=\cos\theta-A\frac{\Delta t}{\Delta x}\mathrm{i}\sin\theta \tag{C.2.3.8}$$

稳定条件为

$$\left|A\frac{\Delta t}{\Delta x}\right|\leqslant 1 \quad 或 \quad |u|_{\max}\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1 \tag{C.2.3.9}$$

3. Lax-Wendroff 格式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{f_{j+1}^n-f_{j-1}^n}{2}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\left[A_{j+\frac{1}{2}}^n(f_{j+1}^n-f_j^n)-A_{j-\frac{1}{2}}^n(f_j^n-f_{j-1}^n)\right] \tag{C.2.3.10}$$

其中 $A_{j+\frac{1}{2}}=A(u_{j+\frac{1}{2}})=A\left(\frac{u_j^n+u_{j+1}^n}{2}\right)$

误差放大因子为

$$G=1-2\left(A\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2(1-\cos\theta)-2A\frac{\Delta t}{\Delta x}i\sin\theta \tag{C.2.3.11}$$

稳定条件为

$$\left|A\frac{\Delta t}{\Delta x}\right|\leqslant 1 \quad 或 \quad |u|_{\max}\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1 \tag{C.2.3.12}$$

4. S_β^α 格式

一般预测-校正、二步式、三层时空均为二阶精度的格式可以统一地写作如下的形式

$$\left.\begin{aligned}\overline{u_j^{n+1}}&=(1-\beta)u_j^n+\beta u_{j+1}^n-\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}(f_{j+1}^n-f_j^n)\\u_j^{n+1}&=u_j^n-\frac{\Delta t}{2\alpha\cdot\Delta x}[(\alpha-\beta)f_{j+1}^n+(2\beta-1)f_j^n\\&\quad+(1-\alpha-\beta)f_{j-1}^n+\overline{f_j^{n+1}}-\overline{f_{j-1}^{n+1}}]\end{aligned}\right\} \tag{C.2.3.13}$$

或改写为

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{2\alpha^2}\{(1-\beta)(1-\alpha-\beta)u_{j-1}^n+[2\beta(1-\beta)-\alpha(1-2\alpha)]u_j^n$$
$$-\beta(\alpha-\beta)u_{j-1}^n-(1-\alpha-\beta)\overline{u_{j-1}^{n+1}}+(\alpha-\beta)\overline{u_j^{n+1}}\}$$
$$-\frac{\Delta t}{2\alpha\Delta x}(\overline{f_j^{n+1}}-\overline{f_{j-1}^{n+1}}) \tag{C.2.3.14}$$

其中$\overline{f^{n+1}}=f(\overline{u^{n+1}})$。由于其中包含 α、β 二个参数，故称 S_β^α 格式。

当 $\alpha=1$ $\beta=0$ 或 1 时为 MacCormack 格式

$\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ 时为 Richtmyer 格式

$\alpha=1$，$\beta=\frac{1}{2}$ 时为 Rubin-Burstein 格式

$0<\alpha<1$，$\beta=\frac{1}{2}$ 时为 MeGuire-Morris 格式

$\overline{u^{n+1}}$为图 C.2.20 中虚线交点处的预测值。

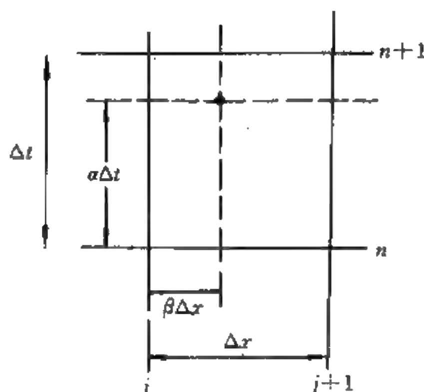


图 C.2.20

其中最常用的是 Mac Cormack 格式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(f_{j+1}^n-f_j^n) \tag{C.2.3.15}$$

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}[f_{j+1}^n-f_j^n+\overline{f_j^{n+1}}-\overline{f_{j-1}^{n+1}}]$$

类似的分析可得稳定条件为

$$\left|A\frac{\Delta t}{\Delta x}\right|\leqslant 1 \quad 或 \quad |u|_{\max}\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1 \tag{C.2.3.16}$$

5. Beam-Warming 格式（隐式）

利用时间方向中心格式得

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{n+1}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^n\right] \tag{C.2.3.17}$$

由于 f 是 u 的非线性函数，所得方程关于 u^{n+1} 求解比较困难，需要作一些简化，利用台劳展开：

$$\begin{aligned}f^{n+1}&=f^n+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^n(u^{n+1}-u^n)\\&=f^n+A^n(u^{n+1}-u^n)\end{aligned} \tag{C.2.3.18}$$

将它代入（C.2.3.17）式得

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{2}\left\{2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^n+\frac{\partial}{\partial x}[A^n(u^{n+1}-u^n)]\right\}, \tag{C.2.3.19}$$

利用中心差分可得

$$\begin{aligned}u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{2}\Big\{&2\frac{f_{j+1}^n-f_{j-1}^n}{2\Delta x}\\&+\frac{A_{j+1}^n(u_{j+1}^{n+1}-u_{j+1}^n)-A_{j-1}^n(u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^n)}{2\Delta x}\Big\}\end{aligned} \tag{C.2.3.20}$$

整理得

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta t}{4\Delta x}A_{j-1}^n u_{j-1}^{n+1}+u_j^{n+1}+\frac{\Delta t}{4\Delta x}A_{j+1}^n u_{j+1}^{n+1}\\&=-\frac{\Delta t}{2}\frac{f_{j+1}^n-f_{j-1}^n}{\Delta x}-\frac{\Delta t}{4\Delta x}A_{j-1}^n u_{j-1}^n+u_j^n+\frac{\Delta t}{4\Delta x}A_{j+1}^n u_{j-1}^n\end{aligned} \tag{C.2.3.21}$$

这是一个关于 u^{n+1} 的三对角代数方程组，容易用追赶法求解。这一格式的特点是无条件中性稳定，因为增长因子为1，格式具有二阶精度（时间和空间方向）。后面的计算表明这一格式在间断附近出现振荡，要加上一粘性项

$$-\frac{\omega}{8}(u_{j+2}^n-4u_{j+1}^n+6u_j^n-4u_{j-1}^n+u_{j-2}^n) \tag{C.2.3.22}$$

其中 $0<\omega<1$。

6. Beam-Warming 显式格式

本格式考虑迎风性，故有

$$\left.\begin{aligned}&u_j^n>0\text{ 时}\\&\overline{u_j^{n+1}}=u_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(f_j^n-f_{j-1}^n)\\&u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{2}\left[\frac{2f_j^n-3f_{j-1}^n+f_{j-2}^n}{\Delta x}+\frac{\overline{f_j^{n+1}}-\overline{f_{j-1}^{n+1}}}{\Delta x}\right]\\&u_j^n<0\text{ 时}\\&\overline{u_j^{n+1}}=u_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(f_{j+1}^n-f_j^n)\\&u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{2}\left[\frac{-2f_j^n+3f_{j+1}^n-f_{j+2}^n}{\Delta x}+\frac{\overline{f_{j+1}^{n+1}}-\overline{f_j^{n+1}}}{\Delta x}\right]\end{aligned}\right\} \tag{C.2.3.23}$$

本格式具有二阶精度，稳定条件为

$$\left|A\frac{\Delta t}{\Delta x}\right|\leqslant 2\quad\text{或}\quad |u|_{\max}\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 2 \tag{C.2.3.24}$$

7. Rusanov 格式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{2\Delta x}(f_{j+1}^n-f_{j-1}^n)+\frac{\omega}{2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n) \qquad \text{(C.2.3.25)}$$

显然本格式具有二阶精度，方程右端附加人工粘性项，ω 为选用参数。

8. Rusanov 三阶精度格式

$$\begin{cases} u_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}=\dfrac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_j^n)-\dfrac{\Delta t}{3\Delta x}(f_{j+1}^n-f_j^n) \\ u_j^{(2)}=u_j^n-\dfrac{2}{3}\dfrac{\Delta t}{\Delta x}(f_{j+\frac{1}{2}}^{(1)}-f_{j-\frac{1}{2}}^{(1)}) \\ u_j^{n+1}=u_j^n-\dfrac{1}{24}\dfrac{\Delta t}{\Delta x}(-2f_{j+2}^{(2)}+7f_{j+1}^{(2)}-7f_{j-1}^{(2)}+2f_{j-2}^{(2)}) \\ \qquad -\dfrac{3}{8}\dfrac{\Delta t}{\Delta x}(f_{j+1}^{(2)}-f_{j-1}^{(2)})-\dfrac{\omega}{24}(u_{j+2}^n-4u_{j+1}^n+6u_j^n-4u_{j-1}^n+u_{j-2}^n) \end{cases} \qquad \text{(C.2.3.26)}$$

其中要求

$$\left|A\frac{\Delta t}{\Delta x}\right|\leqslant 1 \quad 或 \quad |u|_{\max}\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1 \qquad \text{(C.2.3.27)}$$

以及

$$\left.\begin{aligned} &(4s^2-s^4)\leqslant\omega\leqslant 3 \\ &s=|u|_{\max}\frac{\Delta t}{\Delta x} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(C.2.3.28)}$$

采用以上各种格式得到的计算结果如图 C. 2. 21 所示，计算结果表明，Rusanov I 格式，Beam-Warming 显式格式结果比较好一些。迎风格式和 Lax 格式将间断明显地抹平了，其它方法在间断前面产生振荡，NND 格式将在后面进一步说明。由上可以看出，计算结果不理想，不是产生振荡，就是间断被抹平，要想消灭附加的振荡而间断限制在尽可能小的范围内（如一二个网格之间），需要对格式作一些分析，并针对问题采取必要的措施。下面来讨论这一问题。

间断二侧产生波动的原因和消除方法：

Godunov 发现，一般显式格式可以写为如下的形式

$$u_j^{n+1}=\sum_{k=1}^{N}a_k u_{j+k-l}^n \qquad (l\leqslant N) \qquad \text{(C.2.3.29)}$$

如果 a_k 均为正的（$a_k>0$），则若 u_j^n 关于 j 是单调变化的，则 u_j^{n+1} 保持 u_j^n 的单调性，即

若 $a_k>0$（$\forall k$）

则当 $u_j^n\geqslant u_{j-1}^n$（$\forall j$）时有 $u_j^{n+1}\geqslant u_{j-1}^{n+1}$ （$\forall j$）

当 $u_j^n\leqslant u_{j-1}^n$（$\forall j$）时有 $u_j^{n+1}\leqslant u_{j-1}^{n+1}$ （$\forall j$） (C. 2. 3. 30)

这一点是容易证明的，因为

$$u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}=\sum_{k=1}^{N}a_k(u_{j+k-l}^n-u_{j+k-l-1}^n)$$

由于 $a_k>0$（$\forall k$），故单调性保持不变。

由此可知，$a_k>0$（$\forall k$）是保持单调性的充分条件。迎风格式、Lax 格式满足这一条件，所以计算不出现波动，Beam-Warming 显式格式不满足上述条件，但在本例中不出现波动，说明 Godunov 条件只是充分条件，另一方面，由于迎风格式，Lax 格式具有一阶精度，这相当于附加上一项比较大的二阶人工粘性项，所以使间断被抹平，因此尽管它保持单调性，但结

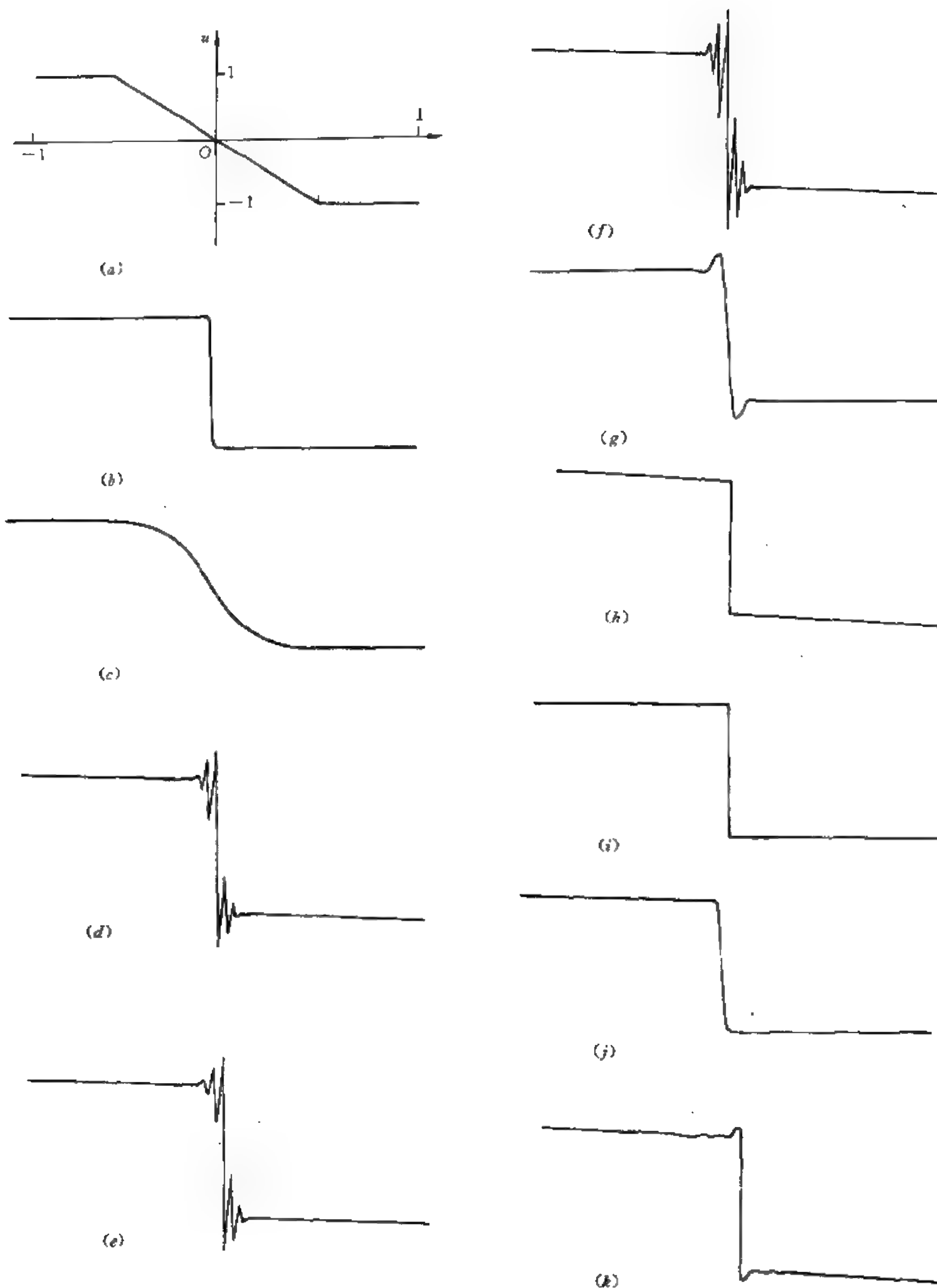


图 C. 2. 21

(a) u 初值；(b) Upwind Scheme $n=100$（(−1，1) 之间离散点数）$it=300$（时间步数）$\sigma=\frac{\Delta t}{\Delta x}=0.1$；(c) Lax Scheme $n=100$ $it=300$ $\frac{\Delta t}{\Delta x}=0.1$；(d) Lax-Wendroff 格式 $n=100$ $it=300$ $\frac{\Delta t}{\Delta x}=0.1$；(e) Mc Cormack 格式 $n=100$ $it=300$ $\frac{\Delta t}{\Delta x}=0.1$；(f) Beam-Warming 隐式格式 $n=100$ $it=300$ $\sigma=0.1$ $\omega=0$；(g) Beam-Warming隐式格式 $n=100$ $it=300$ $\omega=0.5$ $\sigma=0.1$；(h) Beam-Warming 显式格式 $n=100$ $it=300$ $\sigma=0.1$；(i) NND、格式，Zhang 格式 $n=100$ $it=300$ $\sigma=0.1$；(j) RusanovI 格式 $n=100$ $it=300$ $\sigma=0.1$ $\omega=0.5$；(k) Rusanov 三阶格式 $n=100$ $it=300$ $\sigma=0.1$ $\omega=0.5$

果与实际相去甚远。

现在的问题首先是为什么会出现间断附近的振荡，为此采用修正方程来加以讨论，以上各种格式所对应的修正方程具有如下的统一形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_2\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\cdots \tag{C. 2. 3. 31}$$

其中 ν_2，ν_3，…都是与 u 有关的函数，因此是一个比较复杂的方程。为简化起见，考虑到上下游远处 u 为一常数，故设 $u=u_+ +u'$ 或 $u=u_- +u'$。u_+、u_- 分别为下游和上游远处的 u 值。u' 为一小量。代入上式，略去高阶小量可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u_0\frac{\partial u}{\partial x}=\nu_2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\nu_3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\cdots \tag{C. 2. 3. 32}$$

其中 u' 用 u 代替，以便书写方便，u_0 为 u_+ 或 u_-，是一常数，ν'_2，ν'_3…均为 ν_2，ν_3 在 $u=u_0$ 处的值。而上式中 ν'_2，ν'_3，…又都简写为 ν_2，ν_3，…，这里它们都是常数。

迎风格式的修正方程（C. 2. 3. 32）式的具体形式为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=&\left\{\frac{\Delta x}{2}(1-2\sigma u)+\Delta x^2\left(\frac{3}{4}\sigma u_x-\frac{3}{2}\sigma^2 uu_x\right)\right\}u_x^2\\&+\left\{\frac{\Delta x}{2}u(1-\sigma u)+\Delta x^2\left[\left(5\sigma u-\frac{1}{2}\right)u_x-\frac{5}{2}\sigma^2u^2u_x\right]\right\}u_{xx}\\&+\Delta x^2u\left\{\left(\frac{\sigma u}{2}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{3}\sigma^2u^2\right\}u_{xxx}+\cdots\end{aligned}$$

若设 $u=u_-+u'$，$u_-=1$，则代入上式得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\Delta x}{2}(1-\sigma)u_{xx}-\frac{\Delta x^2}{6}(1-\sigma)(1-2\sigma)u_{xxx}+\cdots$$

这一方程与 $\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0$ 在 $a=1$ 时的迎风格式对应之修正方程完全一样。由于从 Burger 方程出发直接推导修正方程比较复杂，而简化后所得的形式与 Burger 方程线化后的方程直接导出的修正方程具有相同的形式，所以一般采用后面的方法导出线化后的修正方程。这样 B 篇中所得到的修正方程就可以直接使用了。

鉴于上述考虑，线化后的修正方程（C. 2. 3. 32）式可以改写为以下形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{n=2}^{\infty}\nu_n\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \tag{C. 2. 3. 33}$$

设 u 的初值 $u(x,0)=e^{ikx}$，则当 $\nu_2=\nu_3=\cdots=0$ 时，$u(x,t)=e^{ik(x-at)}$，即波的形状和幅度均保持不变，只是沿 x 方向以速度 a 传播。在 $\nu_n\neq0$ 时，设 $u(x,t)=e^{\beta t}e^{ikx}$ 代入（C. 2. 3. 33）式得

$$\beta+ika=\sum_{l=1}^{\infty}\nu_{2l}k^{2l}(-1)^l+\sum_{l=1}^{\infty}\nu_{2l+1}k^{2l+1}(-1)^l i$$

或

$$\beta=-ika+\sum_{l=1}^{\infty}\nu_{2l}k^{2l}(-1)^l+i\sum_{l=1}^{\infty}\nu_{2l+1}k^{2l+1}(-1)^l \tag{C. 2. 3. 34}$$

于是

$$u(x,t) = e^{ik\left\{x - \left[a - \sum_{l=1}^{\infty} \nu_{2l+1} k^{2l} (-1)^l t\right]\right\}} \cdot e^{\sum_{l=1}^{\infty} \nu_{2l} k^{2l} (-1)^l t} \tag{C. 2. 3. 35}$$

可见波幅衰减，衰减因子为 $\exp \sum_{l=1}^{\infty} \nu_{2l} k^{2l} (-1)^l t$。波速发生了变化，由 a 变为 $a - \sum_{l=1}^{\infty} \nu_{2l+1} k^{2l} (-1)^l$。显然：$\nu_2>0$，$\nu_4<0$，$\nu_5>0$，…时波被衰减，即被耗散 $\nu_3<0$，$\nu_5>0$，$\nu_7<0$，…时波速减小，波速的变化与波数 k 有关，所以这种现象也叫色散或频散，因为不同波数的波将以不同的速度传播。

对于 Burger 方程，在初始条件（C. 2. 3. 2）下，将得到一个 $t\to\infty$ 的间断解（C. 2. 4. 3）。设想截取一段有限长的区间（$-L/2$，$L/2$），并以 L 为周期向外延拓，可以得到一周期函数（一方形脉冲波），利用富氏级数展开的方法，可以得到一系列不同波数的波（当 $L\to\infty$ 时这些波数将是连续变化的）。在有限差分计算中，由于计算在有限多个离散点上进行，所以所取的波数的个数实际上总是只有有限多个，这些波由于耗散和色散的原因，即使在某一时刻叠加结果在离散点上显示结果与（C. 2. 3. 3）式相同（这实际上很难做到）。在以后的时刻也会显示出耗散和色散的影响。耗散作用的大小与波数有关，波数越大，衰减越快，所以过大的耗散作用将使间断变得很平坦，被抹平。另外由于色散的作用，不同波数的波由于不同的传播速度而被分散，于是在间断二侧显示出波动，这就是所谓的 Gibbs 现象。在耗散不太大时，这种现象就会表现得很明显。

利用这个分析，就可以明白前面各种格式计算时，不是被抹平就是产生振荡的原因了。

迎风格式和 Lax 格式都只有一阶精度，所以它们的修正方程中 $\nu_2>0$ 而且比较大，对波有较强的衰减性，使解没有波动，但间断被抹平了。例如 Lax 格式的修正方程线化后的形式为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{1}{\sigma} - \sigma\right)u_{xx} + \frac{\Delta x^2}{3}(1-\sigma^2)u_{xxx} + \cdots$$

这里 $\sigma=\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$，当 σ 比较小时 ν_2 就比较大了，而且 $\nu_2\sim O$（Δx），所以衰减性比较强。

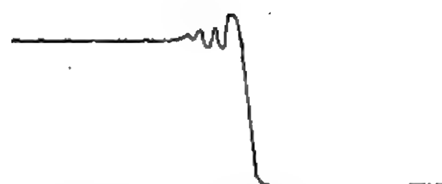
Lax-Wendroff 和 MacCormack 格式具有二阶精度的差分格式，它们的修正方程线化后为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{6}\Delta x^2(1-\sigma^2)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{1}{8}\Delta x^3\sigma(1-\sigma)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots$$

由稳定性条件要求 $\sigma<1$，故这里 $\nu_2=0$，$\nu_3<0$，$\nu_4<0$。因此仍有衰减性。但是 $\nu_4\sim O$（Δx^3），所以衰减性大为削弱，而 $\nu_3<0$，所以在 $u_-=1$ 的区域（即间断上游区）的波传播速度减小了，即向上游分散。类似地分析可以知道，在 $u_+=-1$ 的区域（即间断下游区）的波传播速度增加了，即向下游分散。因此上下游都出现波动。这在图 C. 3. 21 中可以明显看到。为了更直观地说明这一问题，可以解下面的方程：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ &u(x,0) = \begin{cases} 1 & x<0 \\ -1 & x>0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{C. 2. 3. 36}$$

在这里，由于方程中的系数 $a=1>0$，所以上下游的波都是减速的，根据以上分析，应该估计波动将只限于间断上游，用 L-W 或 MacCormack 格式计算表明正如上述分析一样，其结果在图 C. 2. 22 中所示。



L-W 和 MacCormack 计算结果



B-W 隐式格式计算结果



B-W 显示格式计算结果



反扩散隐式格式计算结果

图 C. 2. 22

Beam-Warming 的隐式格式是一个中性稳定的格式，它的修正方程线化后的形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{l=1}^{\infty}\nu_{2l+1}\frac{\partial^{2l+1}u}{\partial x^{2l+1}} \tag{C.2.3.37}$$

没有衰减项，所以必然出现振荡，因此在前面的计算中即使 $\omega=0.8$，粘性项比较大了，但振荡仍然衰减不掉。用这一格式计算所得结果如图 C. 2. 22 所示，间断二侧都有振荡。

Beam-Warming 的显式格式，其修正方程线化后的形式为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=&-\frac{1}{6}\Delta x^2(\sigma-1)(2-\sigma)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\\&-\frac{1}{8}\Delta x^3(\sigma-1)^2(2-\sigma)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\cdots\end{aligned} \tag{C.2.3.38}$$

为保持稳定性，要求 $\sigma<2$，当 σ 比较小时，$\nu_3>0$，$\nu_4<0$，所以有衰减性，波动传播速度是增加的，所以波动应当在间断下游出现。计算也表明了这一点（图 C. 2. 22）。同样的方法分析 Burger 方程的计算中 B-W 显式格式并没有出现波动，其原因是上游的波是加速的，而下游的

波又是减速的，因此它们都进入“间断陷阱”，因此振荡不出现了；从而得到比较好的结果。

Rusanov I 格式由于加强了粘性，也使间断抹平，而三阶格式修正方程线化后为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\Delta x^3}{24}\left(\frac{\omega}{\sigma}-4\sigma+\sigma^3\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

$$+\frac{\Delta x^4}{120}(-5\omega+4+15\sigma^2-4\sigma^4)\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\cdots$$

稳定性条件要求 $\sigma<1$，$4\sigma^2-\sigma^4\leqslant\omega\leqslant3$，这就要求 $\nu_4<0$，但由于 $\nu_4\sim O(\Delta x^4)$，仍不能有效抑制振荡，所以仍有振荡出现。

根据以上分析可以看出，格式应当有比较高的精度，以减小衰减，使间断保持在比较小的范围内，但同时，为了减小振荡，可以设法使间断二侧波速的变化呈相反方向进行，即上游波加速，下游波减速，从而使波动进入“间断陷阱”，使波动减小，正是利用这种设想，人们设计新的差分格式。

1. 混合反扩散格式的形成

这种格式的基本思想是，一阶格式精度低，但可以有效地抑制振荡，二阶格式精度高，但不能抑制振荡，于是将它们组合起来。在远离间断的区域，采用二阶格式，在接近间断区用一阶格式，这样就形成一个混合格式：

$$u_j^{n+1}=Lu_j^n=[\theta L_1+(1-\theta)L_2]u_j^n \tag{C.2.3.39}$$

其中 L_1 表示一阶格式，L_2 表示二阶格式，在间断区取 $\theta=1$，在无间断区取 $\theta=0$，但由于间断位置事先不确定，故设

$$\theta=\left|\frac{|u_{j+1}-u_j|-|u_j-u_{j-1}|}{|u_{j+1}-u_j|+|u_j-u_{j-1}|}\right|^m\quad(m=1\sim2) \tag{C.2.3.40}$$

在一般情况下，$\theta=0$，在有间断时，$\theta=1$，如对方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{C.2.3.41}$$

一阶格式用迎风格式，二阶格式是在一阶格式上加一附加项后得到，具体形式为

$$u_j^{n+1}=L_1u_j^n=u_j^n-\frac{a}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)$$

$$+\frac{|a|}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n) \tag{C.2.3.42}$$

$$u_j^{n+1}=L_2u_j^n=u_j^n-\frac{a}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)+\frac{|a|}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)$$

$$-\frac{1}{2}Q(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n) \tag{C.2.3.43}$$

为使（C.2.3.43）具有二阶精度，应选

$$Q=\frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(1-\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right)$$

考虑到 $a<0$ 的情况，作类似分析可得

$$Q=\frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\left(1-\frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\right) \tag{C.2.3.44}$$

将它代入（C.2.3.43）后即可知，它与 MacCormack 格式是一样的，但是这里的出发点是加一附加项，用它来消去二阶误差项。这种方法建立的格式又叫反扩散格式。这一想法不仅可以应用于显式格式，还可以应用于隐式格式。

比如人们采用下面的隐式格式，则有

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{a\Delta t}{4\Delta x}\left[(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)+(u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1})\right] \tag{C.2.3.45}$$

这种格式虽然是无条件稳定的，但是增长因子为 1，对角优势也不大，为了提高它的稳定性，应当增加其粘性，这样还可以生成对角更占优势的求解矩阵，为此上式加上附加项，得到

$$\begin{aligned}u_j^{n+1}=&u_j^n-\frac{a\Delta t}{4\Delta x}\left[(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)+(u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1})\right]\\&+\frac{1}{2}Q_1(u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1})\end{aligned} \tag{C.2.3.46}$$

这就成了一阶格式，降低了精度，为此再改为二步格式，第一步为

$$\begin{aligned}\overline{u_j^{n+1}}=&u_j^n-\frac{a\Delta t}{4\Delta x}\left[(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)+(\overline{u_{j+1}^{n+1}}-\overline{u_{j-1}^{n+1}})\right]\\&+\frac{1}{2}Q_1(\overline{u_{j+1}^{n+1}}-2\overline{u_j^{n+1}}+\overline{u_{j-1}^{n+1}})\end{aligned}$$

第二步为

$$u_j^{n+1}=\overline{u_j^{n+1}}-\frac{1}{2}Q_1(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n) \tag{C.2.3.47}$$

这就是一个二阶精度的反扩散格式了，Q_1 选在 0.1～0.3 之间，而混合反扩散隐式格式为

$$u_j^{n+1}=\left[\overline{u_j^{n+1}}-\frac{1}{2}Q_1(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)\right](1-\theta)+\theta\,\overline{u_j^{n+1}} \tag{C.2.3.48}$$

显然，$\theta=0$ 时即二阶格式（C.2.3.47），$\theta=1$ 时接近一阶格式（C.2.3.46）。

可以证明显式反扩散格式稳定条件为$\frac{|a|\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$，而隐式反扩散格式是无条件稳定的。

反扩散格式推广应用于非线性方程（C.2.3.1）时，显式具有如下形式：

$$\begin{aligned}u_j^{n+1}=&u_j^n-\frac{\Delta t}{2\Delta x}(f_{j+1}^n-f_{j-1}^n)+\frac{a_+^n}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)\\&-\frac{1-\theta}{2}Q(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)\end{aligned} \tag{C.2.3.49}$$

其中
$$Q=\frac{a_+^n\Delta t}{\Delta x}\left(1-\frac{a_+^n\Delta t}{\Delta x}\right),\quad a_+=\frac{a+|a|}{2},\quad a=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}$$

隐式具有如下形式：

$$\begin{aligned}u_j^{n+1}=&u_j^n-\frac{\Delta t}{4\Delta x}\left[(f_{j+1}^n-f_{j-1}^n)+(f_{j+1}^{n+1}-f_{j-1}^{n+1})\right]\\&+\frac{1}{2}Q_1(u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1})-\frac{1}{2}Q_1(1-\theta)(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)\end{aligned}$$

Q_1 在 0.1～0.3 之间变化，由于求解时 f 是 u 的非线性函数，所以要解一非线性方程组显然是

不方便的。但由于

$$f_j^{n+1} \approx \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\right)_j^n (u_j^{n+1} - u_j^n) + f_j^n = f_j^n + u_j^n(u_j^{n+1} - u_j^n)$$

因此隐式反扩散格式可改写为：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{4\Delta x}[a_{j+1}^n(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) - a_{j-1}^n(u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n)]$$

$$+ \frac{1}{2}Q_1(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) - \frac{1}{2}Q_1(1-\theta)(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (C.2.3.50)$$

利用这一格式计算 Burger 方程在（C.2.3.2）的起始条件下的解。计算表明所得结果大体上是光滑的，但仍有少许波动（见图 C.2.21），这与 Q_1 及 m 的选择有关。

2. NND 格式的形成

上述反扩散格式的思想旨在用粘性项来抑制振荡的出现，但这不能解决间断区的精度，相反间断区的范围扩大，精度下降，所以这并不是一个很好的方法，而且还需要选用参数。人们仍希望用二阶精度的格式，但可以设计格式具有如下的性质：在上游波速提高而使波向下游传；在下游正相反，波速下降，从而向上游传；最终波进入“间断陷阱”，从而使波动消失。为此人们采用迎风二阶格式，即

$$\left.\begin{aligned} a>0\text{ 时}\quad & \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + a\frac{3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{2\Delta x} = 0 \\ a<0\text{ 时}\quad & \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + a\frac{-3u_j^n + 4u_{j+1}^n - u_{j+2}^n}{2\Delta x} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (C.2.3.51)$$

当 $a>0$ 时，上述格式的半离散化修正方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = a\left(\frac{\Delta x^2}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\Delta x^3}{4}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots\right)$$

这里 $\nu_3>0$，$\nu_4<0$，前者使波动加速而向下游推进，ν_4 则使波衰减。当 $a<0$ 则半离散修正方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = a\left(\frac{\Delta x^2}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^3}{4}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots\right)$$

由于 $a<0$，故 $\nu_3<0$，$\nu_4<0$，格式仍有耗散性，但是波速下降，波向上游推进。

另外一阶导数采用中心格式，则：

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (C.2.3.52)$$

半离散化修正方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{a\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \cdots$$

显然 $\nu_4=0$，$a>0$ 时，$\nu_3<0$；$a<0$ 时，$\nu_3>0$，因此波动总是会出现的，综上所述有

$a>0$ 时　二阶迎风格式计算 $a\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial au}{\partial x}$ 时

$$\nu_3>0,\quad \nu_4<0$$

中心格式计算时

$$\nu_3<0,\quad \nu_4=0$$

$a<0$ 时　二阶迎风格式计算 $a\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial au}{\partial x}$ 时

$$\nu_3<0,\quad \nu_4<0$$

中心格式计算时

$$\nu_3 > 0, \quad \nu_4 = 0$$

所以当 a 为常数时波动不可避免，但上下游 a 不同时，则可以避免波动出现，但仍保持二阶精度，其格式选用如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} = -\frac{3f_j^{+n}-4f_{j-1}^{+n}+f_{j-2}^{+n}}{2\Delta x} - \frac{f_{j+1}^{-n}-f_{j-1}^{-n}}{2\Delta x} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{间断上游} \\
&\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} = -\frac{-3f_j^{-n}+4f_{j+1}^{-n}-f_{j+2}^{-n}}{2\Delta x} - \frac{f_{j+1}^{+n}-f_{j-1}^{+n}}{2\Delta x} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{间断下游}
\end{aligned}\right\} \tag{C.2.3.53}$$

其中

$$a = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}, \quad a^+ = \frac{a+|a|}{2}, \quad a^- = \frac{a-|a|}{2}$$

$$f^+ = a^+ u, \quad f^- = a^- u$$

这样做的目的是很明显的，以间断上游为例，a^+ 部分用二阶迎风格式，$\nu_3>0$，a^- 部分用中心格式，ν_3 也大于零，所以使波向下游传播；下游情况相反，ν_3 均小于零，所以波向上游传播，于是总的说来使波进入“间断陷阱”。应该说，如果 f 是一个数量的话，a 也是一个数量，a^+ 或 a^- 其中有一个是零，因而 f^+ 和 f^- 其中一个也为零。但如果 f、u 均为向量时，方程为一方程组时，上面的方法就可以推广，这在后面将进一步讨论。

下面将（C. 2. 3. 53）式进一步改写，（C. 2. 3. 53）中第一式可写作：

上游：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x}\Big\{\Big[f_j^{+n}+\frac{1}{2}(f_j^{+n}-f_{j-1}^{+n})\Big]-\Big[f_{j-1}^{+n}+\frac{1}{2}(f_{j-1}^{+n}-f_{j-2}^{+n})\Big] + \Big[f_{j+1}^{-n}-\frac{1}{2}(f_{j+1}^{-n}-f_j^{-n})\Big]-\Big[f_j^{-n}-\frac{1}{2}(f_j^{-n}-f_{j-1}^{-n})\Big]\Big\}$$

或简写为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x}(h_{j+\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
&h_{j+\frac{1}{2}}^n = f_{j+\frac{1}{2},L}^n + f_{j+\frac{1}{2},R}^n \\
&f_{j+\frac{1}{2},L}^n = f_j^{+n} + \frac{1}{2}(f_j^{+n} - f_{j-1}^{+n}) \\
&f_{j+\frac{1}{2},R}^n = f_j^{-n} - \frac{1}{2}(f_{j+1}^{-n} - f_j^{-n})
\end{aligned}\right\}$$

类似地下游为 （C. 2. 3. 54）

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x}(h_{j+\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
&h_{j+\frac{1}{2}}^n = f_{j+\frac{1}{2},L}^n + f_{j+\frac{1}{2},R}^n \\
&f_{j+\frac{1}{2},L}^n = f_j^n + \frac{1}{2}(f_{j+1}^{+n} - f_j^{+n}) \\
&f_{j+\frac{1}{2},R}^n = f_j^{-n} - \frac{1}{2}(f_{j+2}^{-n} - f_{j+1}^{-n})
\end{aligned}\right\}$$

如果引入记号

$$\Delta f_{j-\frac{1}{2}} = f_j - f_{j-1}, \qquad \Delta f_{j+\frac{1}{2}} = f_{j+1} - f_j \ .$$

计及

$$f = au = \frac{\partial f}{\partial u} u$$

故有

$$\Delta f_{j-\frac{1}{2}} = f_j - f_{j-1} = f_j - \left(f_j - \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u_{j-\frac{1}{2}} \right) = a_j \Delta u_{j-\frac{1}{2}}$$

$$\Delta f_{j+\frac{1}{2}} = f_{j+1} - f_j = \left(f_j + \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u_{j+\frac{1}{2}} \right) - f_j = a_j \Delta u_{j+\frac{1}{2}}$$

故

$$\frac{\Delta f_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta f_{j+\frac{1}{2}}} = \frac{\Delta u_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta u_{j+\frac{1}{2}}}$$

间断上游

$$|\Delta f_{j+\frac{1}{2}}| > |\Delta f_{j-\frac{1}{2}}| \overset{\text{等价于}}{\Longrightarrow} |\Delta u_{j+\frac{1}{2}}| > |\Delta u_{j-\frac{1}{2}}|$$

间断下游

$$|\Delta f_{j+\frac{1}{2}}| < |\Delta f_{j-\frac{1}{2}}| \overset{\text{等价于}}{\Longrightarrow} |\Delta u_{j+\frac{1}{2}}| < |\Delta u_{j-\frac{1}{2}}| \qquad \text{(C. 2. 3. 55)}$$

现在可以把上下游的公式统一起来：

$$\left.\begin{aligned} f^n_{j+\frac{1}{2},L} &= f^n_j + \frac{1}{2}\min \bmod \left(\Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}}, \Delta f^{+n}_{j+\frac{1}{2}} \right) \\ f^n_{j+\frac{1}{2},R} &= f^{-n}_{j+1} - \frac{1}{2}\min \bmod \left(\Delta f^{-n}_{j+\frac{1}{2}}, \Delta f^{-n}_{j+\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(C. 2. 3. 56)}$$

其中

$$\min \bmod (x,y) = \begin{cases} (x,y) \text{ 同号时取绝对值比较小的元素} \\ (x,y) \text{ 异号时为零} \end{cases}$$

于是（C. 2. 3. 54）式可以简写为：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\Delta x}(h^n_{j+\frac{1}{2}} - h^n_{j-\frac{1}{2}}) \\ h^n_{j+\frac{1}{2}} &= f^n_{j+\frac{1}{2},L} + f^n_{j+\frac{1}{2},R} \\ f^n_{j+\frac{1}{2},L} &= f^{-n}_j + \frac{1}{2}\min \bmod \left(\Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}}, \Delta f^{+n}_{j+\frac{1}{2}} \right) \\ f^n_{j+\frac{1}{2},R} &= f^{-n}_j - \frac{1}{2}\min \bmod \left(\Delta f^{-n}_{j+\frac{1}{2}}, \Delta f^{-n}_{j+\frac{3}{2}} \right) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(C. 2. 3. 57)}$$

计算表明这一格式在个别 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ 的点上有波动外，一般没有波动，也没有参数需要选用，所以叫做无波动无参数耗散格式，简称 NND 格式，这一格式是我国学者张涵信于 1988 年提出的，这一格式一般为二阶精度，但 $f^{+n}_{j+\frac{1}{2}}$和 $f^{+n}_{j-\frac{1}{2}}$不同号时，min mod（·，·）=0，则格式降为一阶。

张涵信证明，如果 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 用一阶差分，则稳定条件为

$$\frac{|a|\Delta t}{\Delta x} < \frac{2}{3}$$

如$\frac{\partial u}{\partial x}$用二阶差分，则稳定条件为

$$\frac{|a|\Delta t}{\Delta x} < 1$$

图C.2.21中NND格式的计算表明，确实无波动，间断区小。

以上讨论了各种差分格式计算Burger方程时产生的问题和解决问题的途径，上述讨论应用于气体动力学方程，就可以计算有间断，即有激波的问题了。需要说明的是上面讨论的是一维问题的方程，下面需要讨论的是多维方程组的问题，为了便于说明起见，本节只限于一维方程组的问题，多维问题留待以后讨论。

一维不定常气体动力学基本方程可写作

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \tag{C.2.3.58}$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ E \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} m \\ (\gamma - 1)E + \frac{3-\gamma}{2}\frac{m^2}{\rho} \\ \frac{m}{\rho}\left[\gamma E - \frac{m^2}{2\rho}(\gamma - 1)\right] \end{pmatrix} \tag{C.2.3.59}$$

$$m = \rho u, \quad E \equiv \left(e + \frac{u^2}{2}\right)\rho$$

不难验证

$$A(U) = \frac{\partial F(U)}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2}\frac{m^2}{\rho^2} & (3-\gamma)\frac{m}{\rho} & \gamma - 1 \\ -\frac{m\gamma}{\rho^2}E + (\gamma-1)\frac{m^3}{\rho^3} & \frac{\gamma E}{\rho} - \frac{3}{2}(\gamma - 1)\frac{m^2}{\rho^2} & \frac{\gamma m}{\rho} \end{pmatrix} \tag{C.2.3.60}$$

其特征值为

$$\lambda = \frac{m}{\rho}, \quad \frac{m}{\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{m^2}{\rho^2}\right)(\gamma - 1)\gamma} \tag{C.2.3.61}$$

或

$$\lambda = u, \ u \pm c$$

c 为声速。

$$c^2 = \gamma(\gamma - 1)\left(\frac{E}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{m^2}{\rho^2}\right) \tag{C.2.3.62}$$

并且有

$$F(U) = A(U)U \tag{C.2.3.63}$$

A 可以分解为：

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & u + c & u - c \\ \frac{u^2}{2} & \frac{u^2}{2} + uc + \frac{c^2}{\gamma - 1} & \frac{u^2}{2} - uc + \frac{c^2}{\gamma - 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & & \\ & u + c & \\ & & u - c \end{pmatrix}$$

$$
\cdot\begin{bmatrix}
1-\frac{\gamma-1}{2}\frac{u^2}{c^2} & (\gamma-1)\frac{u}{c} & -\frac{\gamma-1}{c} \\
-\frac{1}{2}\frac{u}{c}+\frac{\gamma-1}{4}\frac{u^2}{c^2} & -\frac{\gamma-1}{2}\frac{u}{c^2}+\frac{1}{2c} & \frac{\gamma-1}{2c^2} \\
\frac{1}{2}\frac{u}{c}+\frac{\gamma-1}{4}\frac{u^2}{c^2} & -\frac{\gamma-1}{2}\frac{u}{c^2}-\frac{1}{2c} & \frac{\gamma-1}{c}
\end{bmatrix} \tag{C.2.3.64}
$$

现在再给出一个初始条件：

$$
\left.\begin{aligned}
u(x,0) &= \begin{cases} 0 & x>0 \\ 2 & x<0 \end{cases} \\
p(x,0) &= \begin{cases} 0 & x>0 \\ 100 & x<0 \end{cases} \\
\rho(x,0) &= \begin{cases} 10 & x>0 \\ 50 & x<0 \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{C.2.3.65}
$$

此外 $c^2=\gamma p/\rho$；$\gamma=1.4$，$e=\dfrac{1}{\gamma-1}\dfrac{p}{\rho}$，$E=\rho\left(e+\dfrac{u^2}{2}\right)$。在这一初始条件下可以得到准确解。$x$-$t$ 平面可以分成 G_1—G_5 共 5 个区（图 C.2.23）。

在 G_1 中

$$
\begin{Bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ 100 \end{Bmatrix}
$$

在 G_2 中为

$$
\begin{Bmatrix} 43.7405 \\ 2.2587 \\ 76.5290 \end{Bmatrix}
$$

在 G_4 中为

$$
\begin{Bmatrix} 30 \\ 2.2587 \\ 76.5290 \end{Bmatrix}
$$

在 G_5 中为

$$
\begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

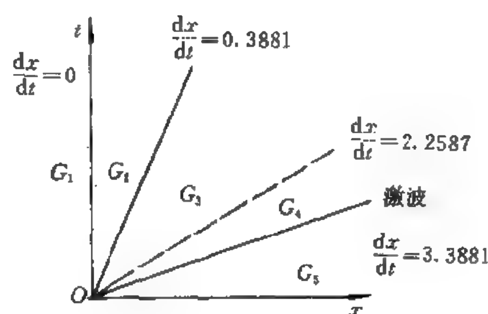


图 C.2.23

G_1 和 G_3 之间的 G_2 为一线性过渡区。

现在用上面讨论的各种格式来求解这一问题，并且与精确解比较。图 C.2.24 中显示了几个主要格式的计算结果。这里只列了几个，其它格式的算例在以后陆续给出。

需要说明的是：反扩散格式及 NND 格式对于方程组，具体作法如下：

反扩散隐式格式

$$
u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{1}{2}\Delta t\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j^{n+1}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j^n\right] \tag{C.2.3.66}
$$

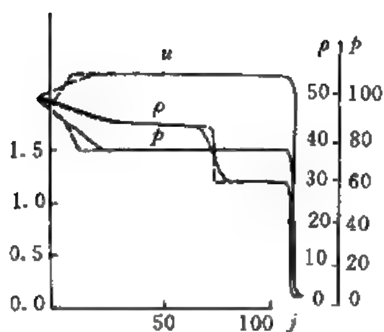
记

$$
\frac{\partial F}{\partial U}=A \qquad A=S\Lambda S^{-1}=S\Lambda_+S^{-1}+S\Lambda_-S^{-1}=A^++A^-
$$

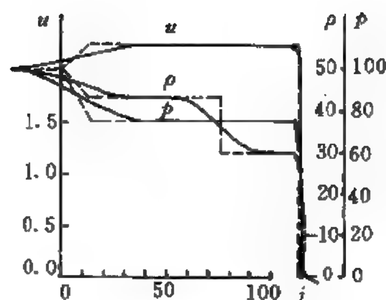
$$
F^+=A^+U \qquad F^-=A^-U
$$

代入 (C.2.3.65) 式得

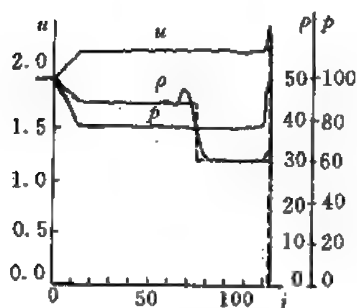
$$
U_j^{n+1}=U_j^n-\frac{1}{2}\Delta t\left[\left(\frac{\partial F^+}{\partial x}\right)_j^n+\left(\frac{\partial F^-}{\partial x}\right)^n+\left(\frac{\partial F^+}{\partial x}\right)^{n+1}+\left(\frac{\partial F^-}{\partial x}\right)^{n+1}\right]
$$



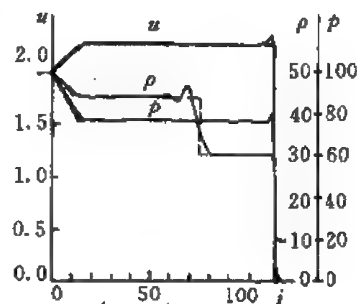
(a) 上风格式解的形状



(b) Lax 格式解的形状



(c) Lax-Wendroff 格式解的形状
（未加人为粘性项）



(d) Lax-Wendroff 格式解的形状
（加进人为粘性项）

图 C.2.24

对于 F^+ 用后向差分，F^- 用前向差分，上式可写为：

$$
\begin{aligned}
U_j^{n+1} &= U_j^n - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_j^{+n} - F_{j-1}^{+n} + F_{j+1}^{-n} - F_j^{-n} + F_j^{+n+1} - F_{j-1}^{+n+1} + F_{j+1}^{-n+1} - F_j^{-n+1}\right) \\
&= U_j^n - \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1}^{+n} - F_{j-1}^{+n} + F_{j+1}^{+n+1} - F_{j-1}^{+n+1} + F_{j+1}^{-n} - F_{j-1}^{-n} + F_{j+1}^{-n+1} - F_{j-1}^{-n+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1}^{+n} - 2F_j^{+n} + F_{j-1}^{+n} + F_{j+1}^{+n+1} - 2F_j^{+n+1} + F_{j-1}^{+n+1}\right) \\
&\quad - \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1}^{-n} - 2F_j^{-n} + F_{j-1}^{-n} + F_{j+1}^{-n+1} - 2F_j^{-n+1} + F_{j-1}^{-n+1}\right) \\
&\approx U_j^n - \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\left(F_{j+1}^n - F_{j-1}^n\right) + \left(F_{j+1}^{n+1} - F_{j-1}^{n+1}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}A_j^{+n}\left(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n + U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}\right) \\
&\quad - \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}A_j^{-n}\left(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n + U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}\right) \\
&\approx U_j^n - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_{j+1}^n - F_{j-1}^n\right) - \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(A_{j+1}^n \Delta U_{j+1}^n - A_{j-1}^n \Delta U_{j-1}^n\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}Q\left(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n + U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}\right)
\end{aligned}
\tag{C.2.3.67}
$$

其中 $Q=\frac{\Delta t}{\Delta x}\Lambda$，$\Lambda=\mathrm{diag}\ \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n\}$，$\Delta U^n=U^{n+1}-U^n$，这显然是一个一阶格式，如果在上式右端再减去

$$\frac{1}{2}Q(U_{j+1}^n-2U_j^n+U_{j-1}^n)+\frac{1}{8}Q(U_{j+2}^n-4U_{j+1}^n+6U_j^n-4U_{j-1}^n+U_{j-2}^n)$$

就成为二阶格式，即

$$\begin{aligned}U_j^{n+1}=U_j^n&-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1}^n-F_{j-1}^n)-\frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}(A_{j+1}^n\Delta U_{j+1}^n-A_{j-1}^n\Delta U_{j-1}^n)\\&+\frac{1}{4}Q(U_{j+1}^n-2U_j^n+U_{j-1}^n+U_{j+1}^{n+1}-2U_j^{n+1}+U_{j-1}^{n+1})\\&-\frac{1}{2}Q(U_{j+1}^n-2U_j^n+U_{j-1}^n)-\frac{Q}{8}(U_{j+2}^n-4U_{j+1}^n+6U_j^n-4U_{j-1}^n+U_{j-2}^n)\end{aligned}\tag{C.2.3.68}$$

实际计算中 Q 取一数值代替，用 $Q_1=qI$ 代替，I 为单位阵，$q\sim1/4$，于是（C.2.3.66）为一阶格式 $U_j^{n+1}=L_1U_j^n$；（C.2.3.67）为二阶格式 $U_j^{n+1}=L_2U_j^n$，二者组合得：

$$U_j^{n+1}=\{\theta L_1+(1-\theta)L_2\}U_j^n\tag{C.2.3.69}$$

将（C.2.3.66 和 67）代入后可得：

$$\begin{aligned}\Delta U_j^n&+\frac{\Delta t}{4\Delta x}(A_{j+1}^n\Delta U_{j+1}^n-A_{j-1}^n\Delta U_{j-1}^n)-\frac{1}{4}Q_1(U_{j+1}^n-2\Delta U_j^n+\Delta U_{j-1}^n)\\&=-\frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{j+1}^n-F_{j-1}^n)+\frac{Q}{2}\theta(U_{j+1}^n-2U_j^n+U_{j-1}^n)\\&\quad-\frac{1}{8}(1-\theta)Q_1(U_{j+2}^n-4U_{j+1}^n+6U_j^n-4U_{j-1}^n+U_{j-2}^n)\end{aligned}\tag{C.2.3.70}$$

这就是用于方程组的反扩散格式。

NND 格式在方程组时写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}&U_j^{n+1}-U_j^n=-\frac{\Delta t}{\Delta x}(H_{j+\frac{1}{2}}^n-H_{j-\frac{1}{2}}^n)\\&H_{j+\frac{1}{2}}^n=F_{j+\frac{1}{2},L}^{+n}+F_{j+\frac{1}{2},R}^{-n}\\&F_{j+\frac{1}{2}L}^{+n}=F_j^++\frac{1}{2}\min\bmod(\Delta F_{j-\frac{1}{2}}^+,\Delta F_{j+\frac{1}{2}}^+)\\&F_{j+\frac{1}{2}R}^{-n}=F_{j+1}^--\frac{1}{2}\min\bmod(\Delta F_{j+\frac{1}{2}}^-,\Delta F_{j+\frac{3}{2}}^-)\end{aligned}\right\}\tag{C.2.3.71}$$

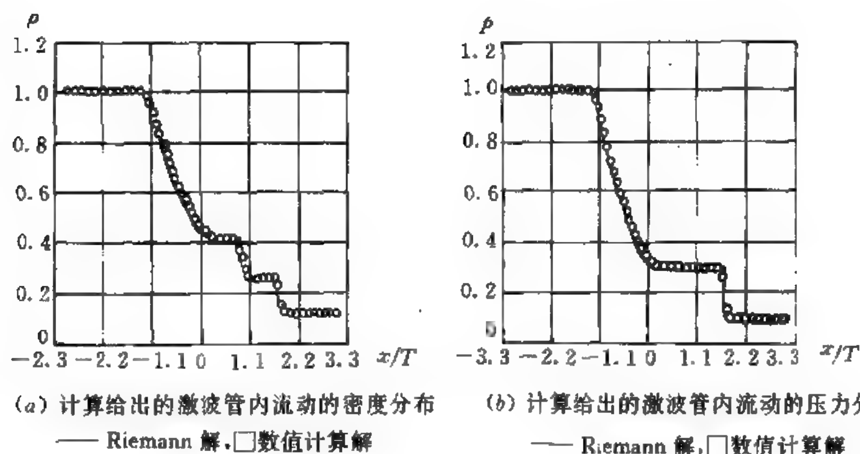
$x<0$ 时，　$\rho=1$，$u=0$，　$E=2.5$

$x>0$ 时，　$\rho=1.25$，　$u=0$，$E=0.25$

（参看图 C.2.25）所得解与 Riemann 解作比较，结果是比较满意的。

到此，读者可以看到，对于一维气体动力学问题，NND 格式是一种比较好的格式，它可以捕捉到激波，并且具有足够的精度。

应该指出，以上是从修正方程的角度出发来寻求高精度无振荡的格式，这种分析只是有启发性，并非绝对。事实上人们还从别的角度出发来寻求同样要求的格式。下面讨论的 Godunov 格式是从解 Riemann 问题的角度出发的，目前还广泛发展了一种总变差变小（或不增），（又叫 TVD 和 TVNI）的格式，是一种被认为比较有前途的方法。Godunov 方法在下面一节介绍。TVD 格式将在介绍新近发展的章节中讨论。



(a) 计算给出的激波管内流动的密度分布
—— Riemann 解，□数值计算解

(b) 计算给出的激波管内流动的压力分布
—— Riemann 解，□数值计算解

图 C.2.25

2.4 Riemann 问题的解和 Godunov 格式

Godunov 格式是由 Riemann 问题得到启发而生成的，而该格式为以后新的格式的生成打下基础。所以首先需要介绍 Riemann 问题的一些有关概念。

在 B 篇第 2 章 2.2 节中曾简要地提到了 Riemann 问题，这里作一简要的回顾和进一步的讨论。

方程写作：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial F(u)}{\partial x}=0 \tag{C.2.4.1}$$

具有散度形式，这种方程称作守恒律系，u，F 可以是数量或向量，$F(u)$ 为线性或非线性的。

(C.2.4.1) 方程在下列初值条件下的求解问题

$$u(x,0)=\begin{cases}u_- & x<0\\ u_+ & x>0\end{cases} \tag{C.2.4.2}$$

称作为 Riemann 问题，其中 u_-，u_+分别为常数，$u_-\neq u_+$，即初值有一个阶跃。

当 $f(u)=au$，即线性方程时，如 u 为一数值，(C.2.4.1) 为一线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{C.2.4.3}$$

在初始条件 (C.2.4.2) 下的解为：

$$u(x,t)=\begin{cases}u_- & x<at\\ u_+ & x>at\end{cases}$$

当 $f(u)=\frac{1}{2}u^2$，即 Burger 方程时，u 为一数值，(C.2.4.1) 具有如下形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{C.2.4.4}$$

在初始条件 (C.2.4.2) 下的解为

(1) $u_->u_+$

$$u(x,t)=\begin{cases}u_- & x<st\\ u_+ & x>st\end{cases} \tag{C.2.4.5}$$

$$s=\frac{1}{2}(u_{+}+u_{-})\qquad \text{为激波速度}$$

(2) $u_{-}<u_{+}$

$$u(x,t)=\begin{cases}u_{-} & x<u_{-}t\\ x/t & u_{-}t\leqslant x\leqslant u_{+}t\\ u_{+} & x>u_{+}t\end{cases}\tag{C.2.4.6}$$

图 C.2.26 显示了解的图案。当 $u_{-}>u_{+}$时，间断保持不变，以激波速度 s 向前推进；当 $u_{-}<u_{+}$时，间断消失，生成一稀疏区。

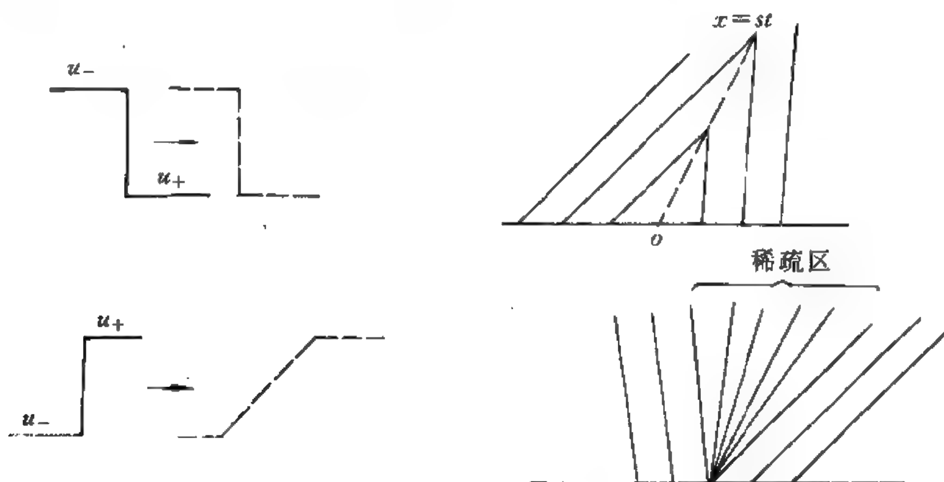


图 C.2.26

对于一般的 $f(u)$ 函数在具有非线性时，有类似的解。激波速度可以由以下方法确定：

取一足够大的长度 L，$L>st$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-L}^{L}u(x,t)\mathrm{d}x=\int_{-L}^{L}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x=-\int_{-L}^{L}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x=f_{-}-f_{+}$$

其中 $f_{-}=f(u_{-})$；$f_{+}=f(u_{+})$，另一方面

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-L}^{L}u(x,t)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(L+st)u_{-}+(L-st)u_{+}]=s(u_{-}-u_{+})$$

比较二式可得

$$s=\frac{f_{-}-f_{+}}{u_{-}-u_{+}}\tag{C.2.4.7}$$

另外从 Burger 方程例子中看到，间断并不总是保持的，保持间断的条件是熵条件应当得到满足：

$$\frac{f-f_{-}}{u-u_{-}}>s>\frac{f-f_{+}}{u-u_{+}}\tag{C.2.4.8}$$

以上的讨论可以推广到方程组中去。

线性方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}=0\tag{C.2.4.9}$$

其中 A 为常数矩阵，方程可写作守恒型

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial(AU)}{\partial x}=0 \tag{C.2.4.10}$$

设 A 具有 n 个实特征，故方程是纯双曲型的。

设

$$A=S\Lambda S^{-1} \tag{C.2.4.11}$$

$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n)$。设

$$V=S^{-1}U \tag{C.2.4.12}$$

则 (C.2.4.10) 式可改写为

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\Lambda\frac{\partial V}{\partial x}=0 \tag{C.2.4.13}$$

它变为 n 个独立的方程

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\lambda_i\frac{\partial v_i}{\partial x}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

初始条件可写作

$$v_i(x,0)=\begin{cases}v_{i-} & x<0\\ v_{i+} & x>0\end{cases}$$

解为 $\quad v_i(x,t)=v_i(x-\lambda_i t,0)$

由于 (C.2.4.12) 式可得

$$U(x,0)=SV(x,0) \tag{C.2.4.14}$$

由于 S 矩阵中每一列元素所构成的向量是 A 矩阵的特征向量，故 S 可以写作

$$S=\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n\}$$

其中 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n$ 为列向量，它们是 A 的特征向量。故 (C.2.4.14) 式可写作：

$$U(x,0)=\sum_{i=1}^{n}v_i(x,0)\boldsymbol{r}_i$$

而 $U(x,t)$ 则为

$$U(x,t)=\sum_{i=1}^{n}v_i(x-\lambda_i t,0)\boldsymbol{r}_i$$

这里 $U(x,t)$ 的解不只与初值有关，还与区域有关，$x-\lambda_i t=$ 常数为特征线，有 n 个不同的特征线。

为了方便起见，设 $n=3$，即有三个不同的特征。在 (x,t) 平面上任一点的 U 值可以这样来计算：由该点出发作与三特征线平行的线，与 $t=0$ 直线交于 $x-\lambda_1 t$、$x-\lambda_2 t$，$x-\lambda_3 t$，，这三点的 v_i 值分别为 v_1，v_2，v_3，它们在 $x<0$ 处分别为 α_1，α_2，α_3，在 $x>0$ 处则应为 β_1，β_2，β_3，在现在的图 C.2.27 中则分别为 α_3，α_2，β_1。于是

$$U(x,t)=\beta_1\boldsymbol{r}_1+\alpha_2\boldsymbol{r}_2+\alpha_3\boldsymbol{r}_3$$

读者可以注意到，从 $x=0$，$t=0$ 点发出三条特征线，在它们之间的值分别如图 C.2.27 所示，图中可以看出，U 穿过 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda_i$ 特征时间断值为

$$[U]_i=(\beta_i-\alpha_i)\boldsymbol{r}_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{C.2.4.15}$$

故

$$\begin{aligned}[F]_i&=A[U]_i=(\beta_i-\alpha_i)A\boldsymbol{r}_i\\&=(\beta_i-\alpha_i)\lambda_i\boldsymbol{r}_i=\lambda_i[U]_i\end{aligned}$$

由 (C.2.4.15) 还可以得到

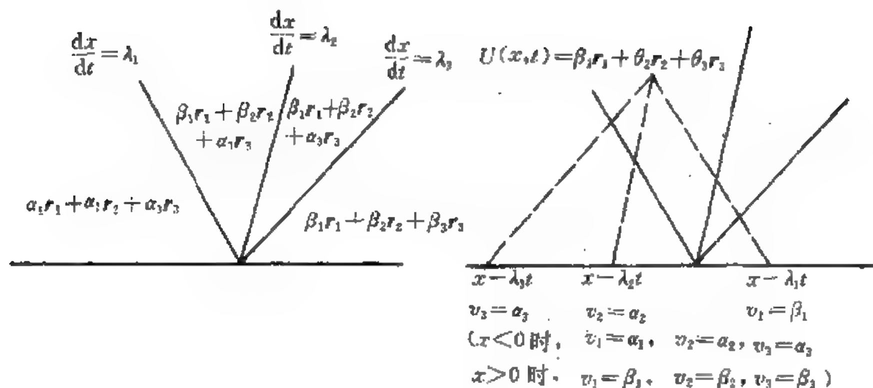


图 C.2.27

$$U(x,t)=U_-+\sum_{\lambda_j<\frac{x}{t}}(\beta_j-\alpha_j)r_j$$

$$=U_+-\sum_{\lambda_j>\frac{x}{t}}(\beta_j-\alpha_j)r_j \qquad (C.2.4.16)$$

其中$\sum\limits_{\lambda_j<\frac{x}{t}}$表示对所有满足$\lambda_j<\frac{x}{t}$的下标$j$求和，$\sum\limits_{\lambda_j>\frac{x}{t}}$则表示对所有满足$\lambda_j>\frac{x}{t}$的下标$j$求和。不难看出

$$U_+-U_-=\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)r_i$$

下面为了将上述方法进一步推广到非线性问题，需要引入一些新的概念。

相空间

由于U是一向量，$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，因此它可以看作是一个$n$维空间中的一个向量，它的分量为$u_1, u_2, \cdots, u_n$，这个空间又叫做相空间。

为了简单而且说明问题，这里只讨论二维问题，有二个分量u_1和u_2，U_+和U_-是(u_1, u_2)相平面上的二个点，如果U_+-U_-与A的特征向量之一r_1或r_2平行，则这一间断就会保持为一个单一的间断（否则就要分解为二个间断，在n维空间时分解为n个间断，图C.2.27中就分解成为三个间断），这就是说，若过U_-作二条线，它们分别与r_1和r_2平行（见图C.2.28），如果U_+落在这二条线的其中一条上，则U的间断就保持单一的间断性，这种状态叫做雨果尼高(Hugoniot)轨迹。

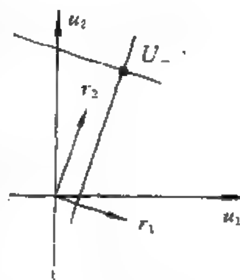


图 C.2.28

类似地，过U_+点也存在一组Hugoniot态，它们是一条曲线，通过U_+点，它构成一个波，即1—族波或2—族波，在n相空间内，则有n个不同族的波。

如果U_+和U_-不在同一条波线上，则是一个一般的问题，解可分解为二个间断，它们分别沿λ_1及λ_2方向传播，在二个方向之外和之间的解分别为：

$$U(x,t)=\begin{cases}\alpha_1 r_1+\alpha_2 r_2 & \frac{dx}{dt}<\lambda_1\\ \beta_1 r_1+\alpha_2 r_2 & \lambda_1<\frac{dx}{dt}<\lambda_2\\ \beta_1 r_1+\beta_2 r_2 & \lambda_2<\frac{dx}{dt}\end{cases} \tag{C.2.4.17}$$

它们的位置如图 C.2.29 所示。

$$\frac{dx}{dt}<\lambda_1 \text{ 时即为 } U_-$$

$$\lambda_1<\frac{dx}{dt}<\lambda_2 \text{ 时为 } U_m$$

$$\frac{dx}{dt}>\lambda_2 \text{ 时为 } U_+$$

当 U_- 和 U_+ 的位置如图 C.2.29 的 (*b*) 时，方向为相反方向。

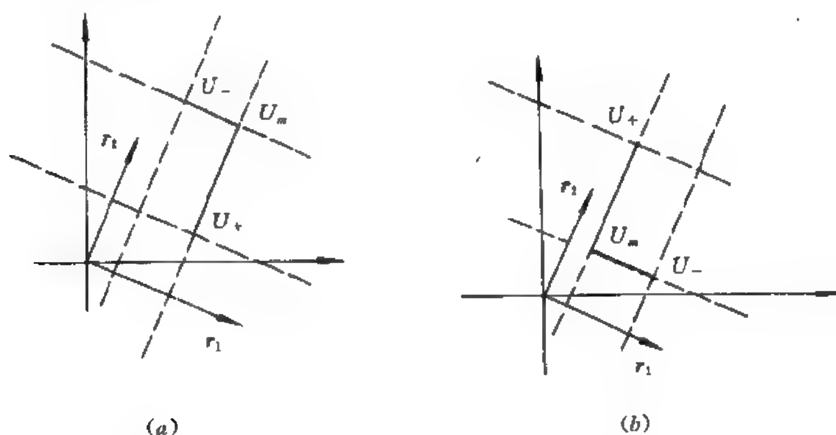


图 C.2.29

对于多个方程组（即在多维相空间中）只需进行类似的作法即可。

现在可以将上述讨论推广到非线性方程中去。方程为：

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial U}{\partial t}+\dfrac{\partial F(U)}{\partial x}=0\\ \Downarrow\\ \dfrac{\partial U}{\partial t}+A(U)\dfrac{\partial U}{\partial x}=0\end{array}\right\} \tag{C.2.4.18}$$

这里设方程是纯双曲型的，故 $A(U)$ 有 n 个实特征，并按递增方向排列，即

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$$

由于特征是不同的，所以对应的特征向量也是线性无关的，这里选一组归一化的特征向量基组 $\{r_i(U)\}_{i=1}^n$，$\|r_i\|=1$，其中 U 表示 r_i 与 U 有关。

在前面讨论的线性问题中，Riemann 问题的解由 n 个波组成，这些波的传播速度为各自的特征速度 (λ_i)，跨过波有一个不变的间断。现在的问题是对于非线性问题是否也可以类似地构成解呢？

在 Burger 方程的讨论过程中人们看到，如间断二侧的 U 值为 U_- 和 U_+，它们以不变的速度 s 传播，则 U_- 和 U_+ 应当满足间断条件

$$F_{-} - F_{+} = s(U_{-} - U_{+}) \tag{C.2.4.19}$$

其中 s 为激波速度。现在设 U_+是固定不变的，满足以上条件的 U_-和 s 可以有许多个。因为 (C.2.4.19) 包含有 n 个方程（因为 F，U 都是 n 维向量），而未知量 U_-，s 共有 $n+1$ 个（U 的 n 个分量及 s 本身），因此，这就是包含无数个解。可以将解视为含有一参数，记作 ζ，于是这一解可记作

$$\begin{aligned} U_{i-}(s,U_+) &= U_+ + \zeta r_i \\ s_i(\zeta,U_+) &= \lambda_i(U_+) \quad (i=1,2,\cdots,n) \end{aligned} \tag{C.2.4.20}$$

对于线性问题，r_i 是常向量，所以 U_-落在过 U_+ 点的相空间内的 n 条直线上，在二维时图 C.2.29 已标出二条直线。对于非线性问题，则 (C.2.4.20) 表示 n 条曲线，在这些曲线上

$$F[U_{i-}(\zeta,U_+)] - F(U_+) = s_i(\zeta,U_+)[U_{i-}(\zeta,U_+) - U_+]$$
$$(i = 1,2\cdots,n) \tag{C.2.4.21}$$

若方程二侧对 ζ 求导，并令 $\zeta=0$，则得

$$F'[U_{i-}(0,U_+)]\cdot U'_{i-}(0,U_+) = s_i(0,U_+)\cdot U'_{i-}(0,U_+)$$

由 (C.2.4.20) 不难看出 $U_{i-}(0,U_+) = U_+, s_i(0,U_+) = \lambda_i(U_+)$，所以上式又为：

$$F'(U_+)\cdot U'_{i-}(0,U_+) = \lambda_i(U_+)\cdot U'_{i-}(0,U_+) \tag{C.2.4.22}$$

由于 $\lambda_i(U_+)$ 就是 $F'(U_+)$ 的特征向量，所以 $U'_{i-}(0,U_+)$ 必平行于 r_i，也就是说过 U_+点的相空间内的曲线在 U_+处的切线与 U_+处的 r_i 方向平行，这些曲线叫做 Hugoniot 曲线。所有这些曲线上的点的集合叫做 U_+点的 Hugoniot 轨迹。如果 U_-落在第 i 条曲线上，就与 U_+构成一个第 i 族波。

下面以一维不定常问题为例来说明。方程为

$$\left.\begin{aligned} &\rho_t + m_x = 0 \\ &m_t + (m^2/\rho + a^2\rho)_x = 0 \end{aligned}\right\} \tag{C.2.4.23}$$

其中

$$m = \rho u,\quad U = \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} m \\ \dfrac{m^2}{\rho} + a^2\rho \end{pmatrix} \tag{C.2.4.24}$$

$$F'(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \dfrac{m^2}{\rho^2} & \dfrac{2m}{\rho} \end{pmatrix} \tag{C.2.4.25}$$

特征值为

$$\lambda_1(U) = \frac{m}{\rho} - a,\qquad \lambda_2(U) = \frac{m}{\rho} + a \tag{C.2.4.26}$$

特征向量

$$r_1(U) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{m}{\rho} - a \end{pmatrix},\qquad r_2(U) = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{m}{\rho} + a \end{pmatrix} \tag{C.2.4.27}$$

为简单起见，这里 r 未归一化。

Rankine—Hugoniot 间断条件写作

$$
\left.\begin{aligned}
& m_- - m_+ = s(\rho_- - \rho_+) \\
& \left(\frac{m_-^2}{\rho_-} + a^2\rho_-\right) - \left(\frac{m_+^2}{\rho_+} + a^2\rho_+\right) = s(m_- - m_+)
\end{aligned}\right\} \qquad (C.2.4.28)
$$

这二个方程中未知量为 ρ_-，m_-，s。对 m_-，s 求解可得

$$
\left.\begin{aligned}
& m_- = \rho_- m_+/\rho_+ \pm a\sqrt{\frac{\rho_-}{\rho_+}}(\rho_- - \rho_+) \\
& s = \frac{m_+}{\rho_+} \pm a\sqrt{\frac{\rho_-}{\rho_+}}
\end{aligned}\right\} \qquad (C.2.4.29)
$$

“±”表示有二族解。由于 m_-、s 可以表示为 ρ_- 的函数，故设

$$
\rho_{-i}(\zeta, U_+) = \rho_+(1+\zeta) \quad i = 1,2 \qquad (C.2.4.30)
$$

则

$$
\left.\begin{aligned}
& U_{-1}(\zeta, U_+) = U^+ + \zeta\begin{bmatrix} \rho_+ \\ m_+ - a\rho_+\sqrt{1+\zeta} \end{bmatrix} \\
& s_1(\zeta, U_+) = \frac{m_+}{\rho_+} - a\sqrt{1+\zeta} \\
& U_{-2}(\zeta, U_+) = U^+ + \zeta\begin{bmatrix} \rho_+ \\ m_+ + a\rho_+\sqrt{1+\zeta} \end{bmatrix} \\
& s_2(\zeta, U_+) = \frac{m_+}{\rho_+} + a\sqrt{1+\zeta}
\end{aligned}\right\} \qquad (C.2.4.31)
$$

不难看出 $\frac{\partial}{\partial\zeta}[U_{-i}(\zeta, U_+)]_{\zeta=0} = \rho_+ r_i(U_+)$ 与 $r_i(U_+)$ 平行。

$$
s_i(0, U_+) = \lambda_i
$$

这正是人们所期待的。

另外由（C.2.4.31）中可以看到，$\zeta > -1$ 时方有实解，而 $\zeta = -1$ 时 $U_{-i} = 0$，所以对所有的 U_+ 值，其 Hugoniot 轨迹都将通过相平面的原点（真空态）。图 C.2.30 表示各种情况下

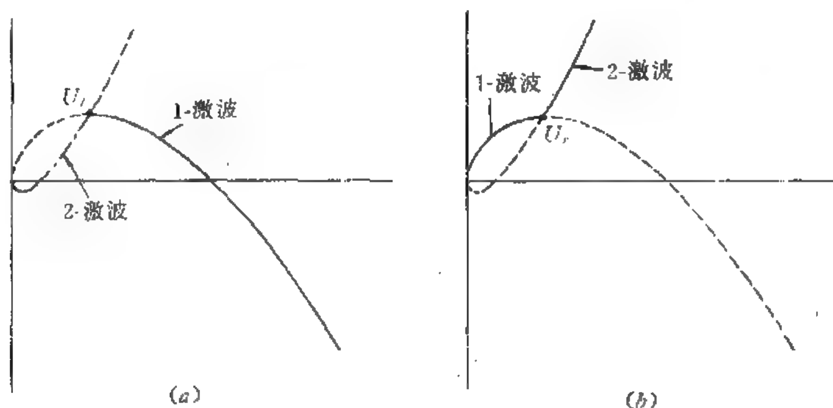


图 C.2.30

的 Hugoniot 轨迹。

为了构成 Riemann 问题的解，可以像线性情况下一样，设间断左边 U 为 U_l，间断右边 U 为 U_r，过 U_l 和 U_r 作二条 Hugoniot 轨迹，如图 C.2.31 所示。

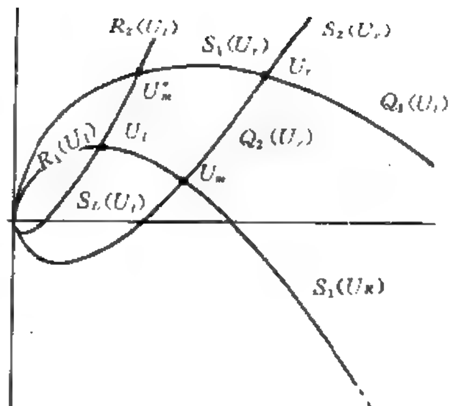


图 C.2.31

这里可以有二个交点 U_m 和 U_m^*。假定 $\lambda_1<\lambda_2$，所以 U_l 与 U_m 以第一族波相连，而 U_r 与 U_m 以第二族波相连，所以 U_m 是所要的，而 U_m^* 是不需要的。在这个问题中 U_m 是可以计算的，因为根据(C.2.4.29)，对于 $U_l\sim U_m$，则 U_l 为 U_-，U_m 为 U_+；对于 $U_m\sim U_r$，则 U_m 为 U_-，U_r 为 U_+。而(C.2.4.29)中"+"号对应第二族，"−"号对应第一族，所以

$$\frac{\rho_m m_r}{\rho_r}+a\sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_r}}(\rho_m-\rho_r)=m_m=\frac{\rho_m m_l}{\rho_l}-a\sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_l}}(\rho_m-\rho_l) \qquad (C.2.4.32)$$

这就建立了关于 ρ_m 的方程，引入记号 $z=\sqrt{\rho_m}$，则有

$$z^2\left(\frac{a}{\sqrt{\rho_l}}+\frac{a}{\sqrt{\rho_r}}\right)+z\left(\frac{m_r}{\rho_r}-\frac{m_l}{\rho_l}\right)-a\left(\sqrt{\rho_r}+\sqrt{\rho_l}\right)=0 \qquad (C.2.4.33)$$

这一方程只有一个正根，解得的 z 可以确定 ρ_m，进而确定 m_m。对于更多方程，即 $n>2$ 时，则要相应地找出 U_1，U_2，…，U_{n-1}，然后 $U_l\sim U_1$，$U_l\sim U_2$，…，$U_l\sim U_{n-1}$，U_r 分别构成第 1，2，…，n 族波。当然确定 U_1，U_2，…，U_{n-1} 是不易的，但如果 U_l 和 U_R 相差不大时，可以近似地求得。

在上面的讨论中并没有涉及间断解是否物理上存在，这需要附加熵条件，Lax 给出了熵条件为：p-族波存在的条件是

$$\lambda_p(U_l)>s>\lambda_p(U_r) \qquad (C.2.4.34)$$

其中 $p=1$，2，…，n，s 为激波速度，它为 $\dfrac{f(U_r)-f(U_l)}{U_r-U_l}$，比如由（C.2.4.28）知道

$$s=\frac{m_l-m_r}{\rho_l-\rho_r}$$

其中 U_l 代替 U_-，U_r 代替 U_+。利用（C.2.4.29）对于第一族激波，用"−"号，有：

$$s=\frac{m_l}{\rho_l}-a\sqrt{\frac{\rho_r}{\rho_l}}=\frac{m_r}{\rho_l}-a\sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_r}}$$

而 $\lambda_1(U)=\dfrac{m}{\rho}-a$，故熵条件为：

$$\frac{m_l}{\rho_l}-a>\frac{m_l}{\rho_l}-a\sqrt{\frac{\rho_r}{\rho_l}}=\frac{m_r}{\rho_r}-a\sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_r}}>\frac{m_r}{\rho_r}-a$$

要满足这一关系的条件是 $\rho_r>\rho_l$

类似地对于第二族波的熵条件为：

$$\frac{m_l}{\rho_l}+a>\frac{m_l}{\rho_l}+a\sqrt{\frac{\rho_r}{\rho_l}}=\frac{m_r}{\rho_r}+a\sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_r}}>\frac{m_r}{\rho_r}+a$$

这一条件正相当于 $\rho_r<\rho_l$。这说明，对于第一族激波，从 l 到 r，速度变慢、密度上升，质点从左向右穿过激波；对于第二族激波，穿过激波时从 l 到 r，速度也是变慢的，但注意到，这

里激波速度比右侧流体的速度要大，所以流体质点是由波前向波后运动的，所以通过激波时密度上升。因此二种波的熵条件在物理上是一致的。

人们注意到，$n=1$时，$\lambda_1(U)=f'(U)$，而$r_1\equiv 1$，当$f''(U)\neq 0$时，$f'(U)$是单调上升或下降的，这就导致了Riemann问题一个比较简单的解，将这一概念推广，若

$$\nabla\lambda_p(U)\cdot r_p(U)\neq 0 \quad \forall u \tag{C.2.4.35}$$

则称p特征是纯非线性的，如果

$$\nabla\lambda_p(U)\cdot r_p(U)=0 \quad \forall u \tag{C.2.4.36}$$

则称p特征是线性退化特征，在该特征上的间断叫做接触间断。

应当指出，Riemann问题的解可以有间断（需要满足熵条件），也可以是无间断的（稀疏波解），在前面着重讨论了间断解，下面来讨论一下稀疏波解。稀疏波解的特点是自相似性，如（C.2.4.1）的解为：

$$u(x,t)=\begin{cases} u_l & x\leqslant \xi_1 t \\ w\left(\frac{x}{t}\right) & \xi_1 t<x<\xi_2 t \\ u_r & x\geqslant \xi_2 t \end{cases} \tag{C.2.4.37}$$

其中$w(x/t)$是一个光滑函数，将它代入方程（C.2.4.2）得到

$$-\frac{x}{t^2}w'\left(\frac{x}{t}\right)+\frac{1}{t}f'\left[w\left(\frac{x}{t}\right)\right]w'\left(\frac{x}{t}\right)=0$$

引入记号$\xi=x/t$，则有

$$f'[w(\xi)]w'(\xi)=\xi w'(\xi) \tag{C.2.4.38}$$

$w'(\xi)=0$是没有意义的解，不予考虑。故设$w'(\xi)\neq 0$，对于多个方程的问题，f'是一矩阵，ξ是一个数量，可见$w'(\xi)$应当是f'的特征向量，由于前面已设定的特征向量为$r_p(U)$，因此现在$U=w(\xi)$，所以$w'(\xi)$应当与$r_p[w(\xi)]$平行，或

$$w'(\xi)=\alpha(\xi)r_p[w(\xi)] \tag{C.2.4.39}$$

所以w在r_p的积分曲线上，并且$w(\xi_1)=U_l, w(\xi_2)=U_r$，$U_l$和$U_r$也都在积分曲线上，这是稀疏解存在的必要条件而不是充分条件，人们希望$\frac{x}{t}$单调上升时w沿积分曲线从U_l变为U_r，另外从(C.2.4.38)可以看出，$w'\neq 0$时，ξ就是$\lambda_p[w(\xi)]$本身，即为$f'[w(\xi)]$的一个特征值，故

$$\xi=\lambda_p[w(\xi)] \tag{C.2.4.40}$$

关于ξ求导，即

$$1=\nabla\lambda_p[w(\xi)]w'(\xi)$$

计及（C.2.4.39）式有

$$1=\nabla\lambda_p[w(\xi)]\alpha(\zeta)\cdot r_p[w(\xi)]$$

故

$$\alpha(\xi)=\frac{1}{\nabla\lambda_p[w(\xi)]\cdot r_p[w(\xi)]} \tag{C.2.4.41}$$

代回（C.2.4.39）又得

$$w'(\xi)=\frac{\boldsymbol{r}_p[w(\xi)]}{\nabla\lambda_p[w(\xi)]\cdot\boldsymbol{r}_p[w(\xi)]}\quad \xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2 \tag{C.2.4.42}$$

且

$$w(\xi_1)=U_l,\quad \xi_1=\lambda_p(U_l),\quad \xi_2=\lambda_p(U_r) \tag{C.2.4.43}$$

在前面讨论的例子中

$$\nabla\lambda_1(u)\boldsymbol{r}_1(u)=\nabla\left(\frac{m}{\rho}-a\right)\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{m}{\rho}-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{m}{\rho^2}\\ \dfrac{1}{\rho}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{m}{\rho}-a\end{pmatrix}=-\frac{a}{\rho} \tag{C.2.4.44}$$

$$\nabla\lambda_2(u)\cdot\boldsymbol{r}_2(u)=\nabla\left(\frac{m}{\rho}+a\right)\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{m}{\rho}+a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{m}{\rho^2}\\ \dfrac{1}{\rho}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{m}{\rho}+a\end{pmatrix}=\frac{a}{\rho} \tag{C.2.4.45}$$

$$w'(\xi)=\begin{pmatrix}\rho'(\xi)\\ m'(\xi)\end{pmatrix}=\frac{\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{m}{\rho}\mp a\end{pmatrix}}{\mp\dfrac{a}{\rho}}=\begin{pmatrix}\mp\dfrac{\rho}{a}\\ \mp\dfrac{m}{a}+\rho\end{pmatrix} \tag{C.2.4.46}$$

对于第一族特征

$$\left.\begin{aligned}\rho'(\xi)&=-\rho(\xi)/a\\ m'(\xi)&=-m(\xi)/a+\rho(\xi)\end{aligned}\right\} \tag{C.2.4.47}$$

$$\xi_1=\lambda_1(u_l)=\frac{m_l}{\rho_l}-a$$

方程可以求解

$$\left.\begin{aligned}\rho(\xi)&=\rho_l e^{-(\xi-\xi_1)/a}\\ m(\xi)&=\rho_l(\xi+a)e^{-(\xi-\xi_1)/a}\end{aligned}\right\} \tag{C.2.4.48}$$

消去 ξ 可得

$$m(\rho)=\rho\frac{m_l}{\rho_l}-a\rho\ln\left(\frac{\rho}{\rho_l}\right)$$

类似地对于第二族特征有

$$\left.\begin{aligned}\rho(\xi)&=\rho_l e^{(\xi-\xi_1)/a}\\ m(\xi)&=\rho_l(\xi-a)e^{(\xi-\xi_1)/a}\\ m(\rho)&=\rho\frac{m_l}{\rho_l}+a\ln\left(\frac{\rho}{\rho_l}\right)\end{aligned}\right\} \tag{C.2.4.49}$$

于是过 U_l 可以作二条轨迹线，在其上的点满足稀疏波的关系式（如图 C. 2. 32 所示）。

从图上可以看到，这些曲线和 Hugoniot 轨迹是十分相似的，实际上在同一点附近，它们是相切的，并且 Lax 指出，曲率也是相等的。

现在将图C. 2. 31 和图C. 2. 32 结合起来，过每一点可以作出四条曲线、二条对应激波线、二条对应稀疏波线。

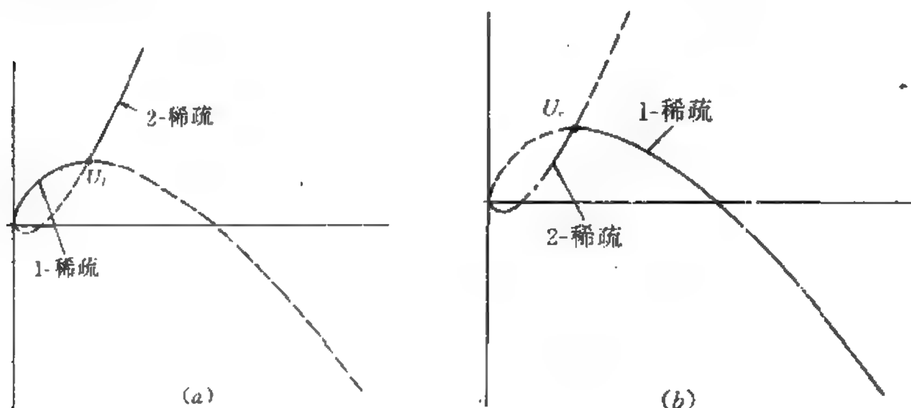


图 C. 2. 32

对于初始间断，U_l 和 U_r 通过它们各自作出四条曲线。它们可以得到二个交点，由 U_l 出发沿第一族线到交点，这一交点叫做 U_m，再由它沿第二族线到 U_r，如图 C. 2. 33 中所示的，则 U_l 到 U_m 是激波，U_m 到 U_r 是稀疏波。

现在要确定 U_m 的值首先要确定是哪二条线相交，是激波线与稀疏线相交还是激波线相交或是稀疏波相交。如果二条稀疏线相交，读者可以证明

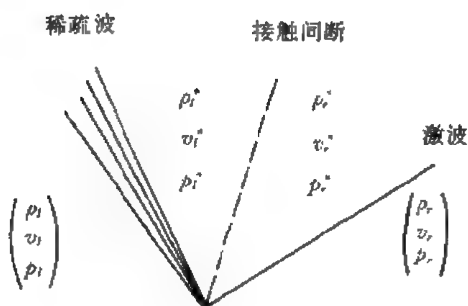


图 C. 2. 33

$$\left.\begin{aligned}\rho_m &= \sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_r}}\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{m_l}{\rho_l}-\frac{m_r}{\rho_r}\right)\right]\\ m_m &= \rho_m\frac{m_l}{\rho_l}-a\rho_m\ln\frac{\rho_m}{\rho_l}\\ &= \rho_m\frac{m_r}{\rho_r}+a\rho_m\ln\frac{\rho_m}{\rho_r}\end{aligned}\right\}\tag{C. 2. 4. 50}$$

在二条激波线相交时，ρ_m 由 (C. 2. 4. 33) 确定，m_m 由 (C. 2. 4. 32) 确定，但一条稀疏波一条激波线相交时则必须由迭代来确定交点位置。

因此原则上说已经给出了 Riemann 问题的一般解：

过 U_l 作激波线和稀疏线（各 n 条），过 U_r 也作激波线和稀疏线（各 n 条），沿第 1 族到第 2 族……到第 n 族，找出 U_1，U_2，…，U_{n-1}点来，同时也就确定了它们是激波或是稀疏波，从而确定了解的具体形式。

下面简要讨论 Euler 方程的情况，它的守恒型式为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}=0\\
&U=\begin{bmatrix}\rho\\ m\\ E\end{bmatrix},\qquad F=\begin{bmatrix}m\\ \dfrac{m^2}{\rho}+p\\ \dfrac{m}{\rho}(E+p)\end{bmatrix}\\
&p=(\gamma-1)E-\frac{\gamma-1}{2}\frac{m^2}{\rho}
\end{aligned}\right\}\tag{C.2.4.51}
$$

$$
A=\frac{\partial F}{\partial U}
=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -\dfrac{\gamma+1}{2}v^2 & (3-\gamma)v & \gamma-1\\ -v\dfrac{(E+p)}{\rho}+\dfrac{\gamma-1}{2}v^3 & \dfrac{E+p}{\rho}-(\gamma-1)v^2 & \gamma v\end{bmatrix}\tag{C.2.4.52}
$$

特征值为

$$
\left.\begin{aligned}
&\lambda_1=v-c,\quad \lambda_2=v\quad \lambda_3=v+c\\
&c=\sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}}
\end{aligned}\right\}\tag{C.2.4.53}
$$

特征向量

$$
r_1=\begin{bmatrix}1\\ v-c\\ \dfrac{3}{2}v^2-cv+\dfrac{c^2}{\gamma-1}\end{bmatrix},\qquad r_2=\begin{bmatrix}1\\ v\\ \dfrac{3}{2}v^2\end{bmatrix},\qquad r_3=\begin{bmatrix}1\\ v+c\\ \dfrac{3}{2}v^2+cv+\dfrac{c^2}{\gamma-1}\end{bmatrix}\tag{C.2.4.54}
$$

其中

$$
\nabla\lambda_2(U)=\begin{bmatrix}-\dfrac{v}{\rho}\\ \dfrac{1}{\rho}\\ 0\end{bmatrix}
$$

故

$$
\nabla\lambda_2(U)\cdot r_2=0\tag{C.2.4.55}
$$

即第二族波是一个线性退化间断，叫做接触间断。一个典型解的情况如图 C. 2. 33 所示。

实际一般解是这样的，过 U_l，U_r 可以作三族线，第一、三族是与前面讨论的方法一致的，而第二族是接触间断。在其上速度 v 和压力 p 是连续的，只是 ρ 是间断的。实际作法是在 v-p 相平面上作第 1，3 族线，它们的交点 v，p 值即 v^*，p^* 值，而 ρ_l^* 及 ρ_r^* 的确定则分别由第一族及第三族波二侧条件确定（用激波条件或稀疏波条件即可)。这样原则上 Euler 方程的 Riemann 问题就解决了。

至此详细地讨论了 Riemann 问题的提法和解法。对于一般 U_r 和 U_l 的情况，求解显然是比较复杂的，但是当 U_l,U_r 比较接近时，这就可以做一些简化，曲线可以用切线代替等等，这样就可以建立一些便于数值计算的差分方法，Godunov 方法就是其中一种方法。

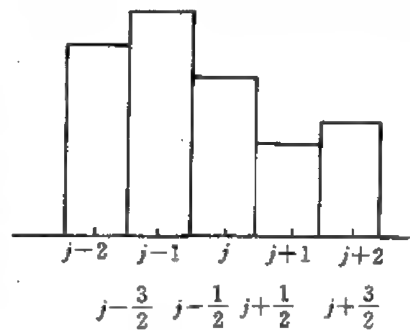


图 C.2.34

Godunov 方法的基本思想是：在各离散点上的值看作该值在离散点邻域内的平均值，也就是将离散值看成一台阶函数，如图 C.2.34 所示，这样在离散点之间构成一系列间断，它们构成了一系列的 Riemann 问题，这个间断可以按前面介绍的方法来讨论它们的传播，在 Δt 以后的时刻，各离散点上的值再次使用它的邻域内的值的平均，然后再接着进行相同的过程，计算就可以不断进行下去。

以 Euler 方程为例子，$j\sim j+1$ 的交接面为 $j+\frac{1}{2}$，其上的速度为 $\frac{1}{2}(v_j+v_{j+1})$，由前面讨论知道，间断面分成三个波族，左传波，右传波及交接面（见图 C.2.35）。

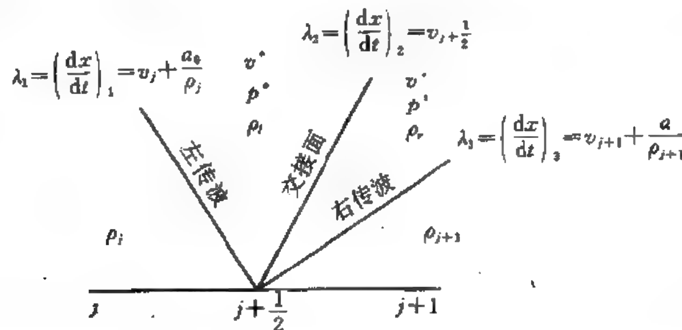


图 C.2.35

右传波上的条件应当是激波条件或稀疏波条件，但由于 $j+\frac{1}{2}$ 点二侧的值相差不大，所以应当是一弱波，在前面讨论中指出，由于激波关系和稀疏波前后关系在变化不大时它们是十分接近的（切线方向相同，同一点处的曲率也相等），所以可以近似用弱波的关系，即

$$v_j-\frac{2}{\gamma-1}(\gamma p_j/\rho_j)^{\frac{1}{2}}=v^*-\frac{2}{\gamma-1}(\gamma p^*/\rho_l)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(C.2.4.56-1)}$$

且有近似等熵条件

$$p_j\rho_j^{-\gamma}=p^*\rho_l^{-\gamma} \qquad \text{(C.2.4.56-2)}$$

类似地左传波上有

$$v_{j+1}+\frac{2}{\gamma-1}(\gamma p_{j+1}/\rho_{j+1})^{\frac{1}{2}}=v^*+\frac{2}{\gamma-1}(\gamma p^*/\rho_r)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(C.2.4.56-3)}$$

$$p_{j+1}\rho_{j+1}^{-\gamma}=p^*\rho_r^{-\gamma} \qquad \text{(C.2.4.56-4)}$$

以上四式构成了关于 p^*，v^*，ρ_l，ρ_r 的四个方程。

这四个方程可以解出

$$\left.\begin{aligned} p^{*} &= \frac{b_j p_j + a_j p_{j+1} + a_j b_j (v_j - v_{j+1})}{a_j + b_j} \\ v^{*} &= \frac{a_j u_j + b_j u_{j+1} + p_j - p_{j+1}}{a_j + b_j} \end{aligned}\right\} \tag{C.2.4.57}$$

其中

$$a_j = \begin{cases} \left\{\dfrac{1}{2}[(\gamma+1)p^{*} + (\gamma-1)p_j]\rho_j\right\}^{\frac{1}{2}} & p^{*} \geqslant p_j \\ \dfrac{r-1}{2\gamma}(\gamma p_j \rho_j)^{\frac{1}{2}} \dfrac{1 - p^{*}/p_j}{1 - (p^{*}/p_j)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} & p^{*} < p_j \end{cases} \tag{C.2.4.58}$$

$$b_j = \begin{cases} \left\{\dfrac{1}{2}[(\gamma+1)p^{*} + (\gamma-1)p_{j+1}]\rho_{j+1}\right\}^{\frac{1}{2}} & p^{*} \geqslant p_{j+1} \\ \dfrac{\gamma-1}{2\gamma}(\gamma p_{j+1} \rho_{j+1})^{\frac{1}{2}} \dfrac{1 - p^{*}/p_{j+1}}{1 - (p^{*}/p_{j+1})^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} & p^{*} < p_{j+1} \end{cases} \tag{C.2.4.59}$$

为确定 p^{*}，v^{*}，实际上要解非线性方程组，当间断不大时近似有

$$\left.\begin{aligned} a_j = b_j &= \left\{\frac{\gamma}{4}(p_j + p_{j+1})(\rho_j + \rho_{j+1})\right\}^{\frac{1}{2}} \\ p^{*} &= \frac{p_j + p_{j+1}}{2} + a_j \frac{v_j - v_{j+1}}{2} \\ v^{*} &= \frac{v_j + v_{j+1}}{2} + \frac{p_j - p_{j+1}}{2a_j} \end{aligned}\right\} \tag{C.2.4.60}$$

$p_{j+\frac{1}{2}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$，$v_{j+\frac{1}{2}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ 用哪一个值由以下情况确定：记

$$p_{j+\frac{1}{2}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \tilde{p},\quad v_{j+\frac{1}{2}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \tilde{v},\quad \rho_{j+\frac{1}{2}}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \tilde{\rho}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\rho_l}{\rho_j} = \frac{(\gamma+1)p^{*} + (\gamma-1)p_j}{(\gamma-1)p^{*} + (\gamma+1)p_j},\quad \frac{\rho_r}{\rho_{j+1}} = \frac{(\gamma+1)p^{*} + (\gamma-1)p_{j+1}}{(\gamma-1)p^{*} + (\gamma+1)p_{j+1}} \\ &\lambda_1 = v_j - \frac{a_{j+\frac{1}{2}}}{\rho_j},\quad \lambda_2 = v_{j+\frac{1}{2}},\quad \lambda_3 = v_j + \frac{a_{j+\frac{1}{2}}}{\rho_{j+1}} \end{aligned}\right\} \tag{C.2.4.61}$$

这些均以间断不大为前提，并且假定 $j+\frac{1}{2}$ 处的波与 $j-\frac{1}{2}$，$j+\frac{3}{2}$ 的波均不相交，故要求

$$(|V| + c)_{\max}\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1 \tag{C.2.4.62}$$

这也是计算的稳定条件。与上述状态所对应的特征走向可以在（C.2.36）图中得知。

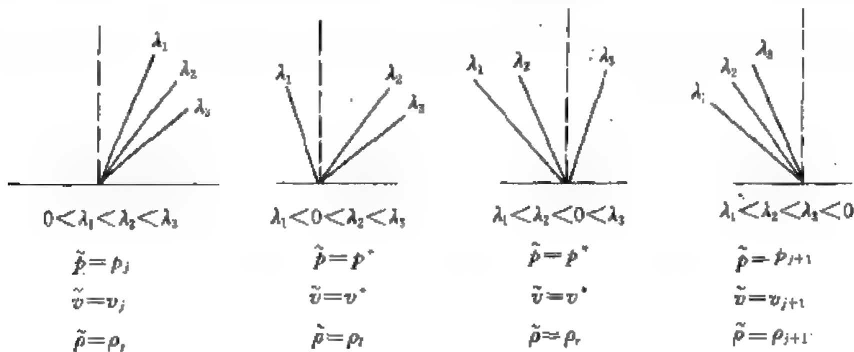


图 C.2.36

显然以上计算是一阶精度的，它将使间断抹平，计算结果如图 C. 2. 37 所示。

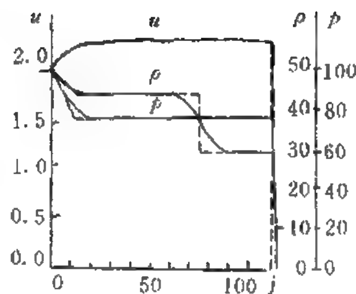


图 C. 2. 37

应该说这个结果并不很好，但是 Godunov 格式是许多格式的基础，一个例子是 NND 格式可以看作是 Godunov 格式的一个推广。

下面来说明这一点。

假定

$$\overline{U}_j = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U\mathrm{d}x \tag{C. 2. 4. 63}$$

则由（C. 2. 4. 1）式对 x 从 $x_{j-\frac{1}{2}}$ 到 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 积分可以得到

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x}(F_{j+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}) = 0 \tag{C. 2. 4. 64}$$

引入

$$H^n_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_n+\Delta t} F_{j+\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \tag{C. 2. 4. 65}$$

则进一步对于（C. 2. 4. 64）关于 t 从 t_n 到 $t_n+\Delta t$ 积分可得

$$\overline{U}^{n+1}_j = \overline{U}^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(H^n_{j+\frac{1}{2}} - H^n_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{C. 2. 4. 66}$$

根据 Godunov 格式假定，U_j 就代表了（$x_{j-\frac{1}{2}}$，$x_{j+\frac{1}{2}}$）区间内的值，故

$$\overline{U}_j = U_j \tag{C. 2. 4. 67}$$

在 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 处左右二侧有间断，形成了一个 Riemann 问题，这里用 $\overline{U}_j$ 代替 U_j，所以是一阶精度。

如果采用二阶精度的格式，由

$$U = U_j + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_j (x - x_j) + \cdots$$

的前二项来代替$\overline{U}$，则精度就可以提高，这里$\overline{U}$仍为 U_j，$x_{j+\frac{1}{2}}$处仍有间断，但由于采用了二阶切线近似，所以间断的强度变小了。这时 Riemann 问题可以在准确到 Δx 小量的意义上解得。由于（C. 2. 1）式改写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{C. 2. 4. 68}$$

A 有 n 个特征。按大小排列为 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$，上式可改写为

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda\frac{\partial W}{\partial x} = 0 \tag{C. 2. 4. 69}$$

其中 $\Lambda=\mathrm{diag}\ \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$，$W=S^{-1}U$，$A=S\Lambda S^{-1}$，由前面讨论知间断（比较弱时）是沿特征线传播的，故解为

$$W^{(l)} = \begin{cases} W^{(l)}_{j+\frac{1}{2},l} & l = 1,2,\cdots,k \\ W^{(l)}_{j+\frac{1}{2},r} & r = k+1,\cdots,n \end{cases} \tag{C. 2. 4. 70}$$

其中过（$x_{j+\frac{1}{2}}$，t_{n+1}）点作 n 条特征线与 $t=t_n$ 交点在 $x_{j+\frac{1}{2}}$左侧有 k 个点，右侧有 $n-k$ 个点，（C. 2. 4. 70）式可改写为

$$\Lambda W = \frac{1}{2}\Lambda(W^n_{j+\frac{1}{2},l} + W^n_{j+\frac{1}{2},r}) + \frac{1}{2}|\Lambda|(W^n_{j+\frac{1}{2},l} - W^n_{j+\frac{1}{2},r}) \tag{C. 2. 4. 71}$$

或计及 $W=S^{-1}U$ 和 $A=S\Lambda S^{-1}$，$F=AU$，上式可写作

$$F_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F^n_{j+\frac{1}{2},l} + F^n_{j+\frac{1}{2},r}) + \frac{1}{2}(A^+ - A^-)(U^n_{j+\frac{1}{2},l} - U^n_{j+\frac{1}{2},r}) \quad \text{(C. 2. 4. 72)}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &A^+ = S\Lambda^+ S^{-1}, \quad A^- = S\Lambda^- S^{-1} \\ &\Lambda^\pm = \frac{1}{2}(\Lambda \pm |\Lambda|), \quad F^+ = A^+ U, \quad F^- = A^- U \end{aligned}\right\} \quad \text{(C. 2. 4. 73)}$$

则有

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}F^n_{j+\frac{1}{2},l} + \frac{1}{2}(A^+ - A^-)U^n_{j+\frac{1}{2},l} = F^{+n}_{j+\frac{1}{2},l} \\ &\frac{1}{2}F^n_{j+\frac{1}{2},R} - \frac{1}{2}(A^+ - A^-)U^n_{j+\frac{1}{2},r} = F^{-n}_{j+\frac{1}{2},r} \end{aligned}\right\} \quad \text{(C. 2. 4. 74)}$$

且有

$$F_{j+\frac{1}{2}} = F^+_{j+\frac{1}{2},l} + F^-_{j+\frac{1}{2},r} \quad \text{(C. 2. 4. 75)}$$

由 $H^n_{j+\frac{1}{2}}$定义可知

$$H^n_{j+\frac{1}{2}} = F^n_{j+\frac{1}{2}} = F^+_{j+\frac{1}{2},l} + F^-_{j+\frac{1}{2},r} \quad \text{(C. 2. 4. 76)}$$

这里包含 $0(\Delta t)$误差，将它代入（C. 2. 4. 66）可得

$$U^{n+1}_j = U^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\left(F^{+n}_{j+\frac{1}{2},l} - F^{+n}_{j-\frac{1}{2},l}\right) + \left(F^{-n}_{j+\frac{1}{2},r} - F^{-n}_{j-\frac{1}{2},r}\right)\right] \quad \text{(C. 2. 4. 77)}$$

又计及

$$\left.\begin{aligned} &F^{+n}_{j+\frac{1}{2},l} = F^{+n}_j + \left(\frac{\partial F^+}{\partial x}\right)^n_j \frac{\Delta x}{2} \\ &F^{-n}_{j+\frac{1}{2},R} = F^{-n}_{j+1} - \left(\frac{\partial F^-}{\partial x}\right)^n_j \frac{\Delta x}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{(C. 2. 4. 78)}$$

而

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j \approx \frac{F_j - F_{j-1}}{\Delta x} \text{ 或} \approx \frac{F_{j+1} - F_j}{\Delta x}$$

如果从物理上考虑，则

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_j = \frac{1}{\Delta x}\min\bmod\left(\Delta F^{+n}_{j-\frac{1}{2}}, \Delta F^{+n}_{j+\frac{1}{2}}\right)$$

则进一步可得

$$F^{+n}_{j+\frac{1}{2},l} = F^{+n}_j + \frac{1}{2}\min\bmod\left(\Delta F^{+n}_{j-\frac{1}{2}}, \Delta F^{+n}_{j+\frac{1}{2}}\right)$$

$$F^{-n}_{j+\frac{1}{2},r} = F^{-n}_{j+1} - \frac{1}{2}\min\bmod\left(\Delta F^{-n}_{j+\frac{1}{2}}, \Delta F^{-n}_{j+\frac{3}{2}}\right)$$

这就得到了与 NND 格式 (C. 2. 4. 71) 式中相同的表达式了，可见 NND 是 Godunov 格式的推广，它应有二阶精度。它的计算结果在上一节中已有介绍，这里不多介绍。

应该指出，本节详细地介绍了 Riemann 问题的求解，由此介绍了 Godunov 格式的形成。在最近几年来发展了许多新的格式，很多格式是以 Riemann 问题求解为出发点，它们从某种意义上讲都是 Godunov 格式的推广，关于这些新的格式将在流场计算的新发展这一章中进一步给予介绍。

2.5 多维气体流动的数值计算

在前面的讨论中只集中于一维问题的计算，这些方法都可以推广到多维问题中去。下面的讨论限于直角坐标，对于曲线坐标完全是类似的，此外也限于二维问题，因为三维问题绝大多数是类似的，只说明一下就可以了。

首先讨论 MacCormack 格式对二维问题的推广。

2.5.1 MacCormack 格式

二维的线性模型方程有如下的形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (C.2.5.1)$$

由于

$$u_{i,j}^{n+1}=u_{i,j}^{n}+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij}^{n}\Delta t+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{ij}^{n}\Delta t^2+\cdots$$

其中 i，j 是节点的标号，n 为时间层号，由（C.2.5.1）式知

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij}^{n}=-\left[a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{ij}^{n}$$

故

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{ij}^{n}=\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij}^{n}$$

将它们代入前面的展式可得

$$u_{ij}^{n+1}=u_{ij}^{n}-a\Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij}^{n}-b\Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij}^{n}$$
$$+\frac{1}{2}a^2\Delta t^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij}^{n}+ab\Delta t^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)_{ij}^{n}+\frac{1}{2}b^2\Delta t^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij}^{n}+\cdots \qquad (C.2.5.2)$$

引入记号

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{2}(\Delta_x^{+}+\Delta_x^{-}),\quad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{2}(\Delta_y^{+}+\Delta_y^{-})\\&\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4}(\Delta_x^{+}\Delta_y^{+}+\Delta_x^{+}\Delta_y^{-}+\Delta_x^{-}\Delta_y^{+}+\Delta_x^{-}\Delta_y^{-})\\&\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\Delta_x^{+}\Delta_x^{-},\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}=\Delta_y^{+}\Delta_y^{-}\end{aligned}\right\} \qquad (C.2.5.3)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_x^{+}u_{ij}^{n}=\frac{u_{i+1,j}^{n}-u_{i,j}^{n}}{\Delta x},\quad \Delta_x^{-}u_{ij}^{n}=\frac{u_{ij}^{n}-u_{i-1,j}^{n}}{\Delta x}\\&\Delta_y^{+}u_{ij}^{n}=\frac{u_{i,j+1}^{n}-u_{ij}^{n}}{\Delta y},\quad \Delta_y^{-}u_{ij}^{n}=\frac{u_{ij}^{n}-u_{i,j-1}^{n}}{\Delta y}\\&\Delta\mathring{x}=\frac{1}{2}(\Delta_x^{+}+\Delta_x^{-}),\Delta\mathring{y}=\frac{1}{2}(\Delta_y^{+}+\Delta_y^{-})\end{aligned}\right\} \qquad (C.2.5.4)$$

将它们代入（C.2.5.2）式可得

$$u_{ij}^{n+1}=\Big\{1-a\Delta t(\Delta_x^{+}+\Delta_x^{-})-\frac{1}{2}b\Delta t(\Delta_y^{+}+\Delta_y^{-})+\frac{1}{2}a^2\Delta t^2\Delta_x^{+}\Delta_x^{-}+\frac{1}{2}b^2\Delta t^2\Delta_y^{+}\Delta_y^{-}$$

$$+\frac{1}{4}ab\Delta t^2(\Delta_x^{+}\Delta_y^{+}+\Delta_x^{+}\Delta_y^{-}+\Delta_x^{-}\Delta_y^{+}+\Delta_x^{-}\Delta_y^{-})\Big\}u_{ij}^{n}+O(\Delta t^3)$$

$$=\Big\{1-\frac{1}{2}a\Delta t\Delta_x^{+}-\frac{1}{2}a\Delta t\Delta_x^{-}+\frac{1}{2}a^2\Delta t^2\Delta_x^{+}\Delta_x^{-}\Big\}\cdot$$

$$\Big\{1-\frac{1}{2}b\Delta t\Delta_y^{+}-\frac{1}{2}b\Delta t\Delta_y^{-}+\frac{1}{2}b^2\Delta t^2\Delta_y^{+}\Delta_y^{-}\Big\}u_{ij}^{n}+O(\Delta t^3) \tag{C.2.5.5}$$

引入记号

$$\left.\begin{aligned}L_x&=\Big\{1-\frac{1}{2}a\Delta t\Delta_x^{+}-\frac{1}{2}a\Delta t\Delta_x^{-}+\frac{1}{2}a^2\Delta t^2\Delta_x^{+}\Delta_x^{-}\Big\}\\L_y&=\Big\{1-\frac{1}{2}b\Delta t\Delta_y^{+}-\frac{1}{2}b\Delta t\Delta_y^{-}+\frac{1}{2}b^2\Delta t^2\Delta_y^{+}\Delta_y^{-}\Big\}\end{aligned}\right\} \tag{C.2.5.6}$$

略去高阶小量得

$$u_{ij}^{n+1}=L_xL_yu_{ij}^{n} \tag{C.2.5.7}$$

或写成二步式为

$$\left.\begin{aligned}\overline{u_{ij}^{n+1}}&=L_yu_{ij}^{n}\\u_{ij}^{n+1}&=L_x\overline{u_{ij}^{n+1}}\end{aligned}\right\} \tag{C.2.5.8}$$

这实际上就是时间分裂法，显然其稳定条件为

$$\Delta t\leqslant\min\Big\{\frac{1}{|a|/\Delta x};\quad\frac{1}{|b|/\Delta y}\Big\} \tag{C.2.5.9}$$

这一方法也可以推广到三维问题，其方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{C.2.5.10}$$

差分格式为

$$u_{ijk}^{(n+1)}=L_xL_yL_zu_{ijk}^{(n)} \tag{C.2.5.11}$$

对于非线性问题，方程写作

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=0 \tag{C.2.5.12}$$

其中 f，g，h 为 u 的函数，则

$$u_{ijk}^{n+1}=\mathscr{L}_x\mathscr{L}_y\mathscr{L}_zu_{ijk}^{n} \tag{C.2.5.13}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{L}_xu_{ijk}^{n}&=\frac{1}{2}(u_{ijk}^{n}+\widetilde{\widetilde{u_{ijk}^{n+1}}})\\\widetilde{\widetilde{u_{ijk}^{n+1}}}&=\widetilde{u_{ijk}^{n+1}}-\Delta t\Delta_x^{-}\widetilde{f_{ijk}^{n+1}}\\\widetilde{u_{ijk}^{n+1}}&=u_{ijk}-\Delta t\Delta_x^{+}f_{ijk}^{n}\end{aligned}\right\} \tag{C.2.5.14}$$

对于 $\mathscr{L}_y$，$\mathscr{L}_z$ 有类似的公式。

应该指出，对于非线性问题，一步写出和二步写出是不同的，所以应当用二步法，计算时也应当分二步进行，这时格式可以自动生成四阶耗散，从而抑制无激波区的波动。实际计算表明，二维问题时分三步计算为好，即

$$u_{ij}^{n+1}=\mathscr{L}_x^{\left(\frac{1}{2}\right)}\mathscr{L}_y\mathscr{L}_x^{\left(\frac{1}{2}\right)}u_{ij}^{n} \tag{C.2.5.15}$$

其中$\mathscr{L}\left(\frac{1}{2}\right)$表示以$\frac{1}{2}\Delta t$为时间步长，这种作法的原因是$\mathscr{L}_x\mathscr{L}_y$直接计算时不足二阶精度。对于三维问题可处理为

$$u_{ijk}^{n+1}=\mathscr{L}_z\left(\tfrac{1}{2}\right)\mathscr{L}_y\left(\tfrac{1}{2}\right)\mathscr{L}_x\mathscr{L}_y\left(\tfrac{1}{2}\right)\mathscr{L}_z\left(\tfrac{1}{2}\right)u_{ijk}^{n} \tag{C.2.5.16}$$

大家知道，如果不加人工粘性项，计算时会出现波动，特别是激波附近，添加的人工粘性项应当具有如下形式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\\&=\theta_x\frac{\nu_2}{2}\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\theta_y\frac{\nu_2}{2}\frac{\Delta y^2}{\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\theta_z\frac{\nu_2}{2}\frac{\Delta z^2}{\Delta t}\frac{\partial^2 u}{\partial z}\end{aligned} \tag{C.2.5.17}$$

实际计算时是这样进行的：

如$\mathscr{L}_x$或$\mathscr{L}_z\left(\frac{1}{2}\right)$进行完后，计算

$$u_{ij}^{n+1\circledast}=u_{ij}^{n+1}-\theta_x\frac{\nu_2}{2}\left(u_{i+1,j}^{n+1}-2u_{ij}^{n+1}+u_{i-1,j}^{n+1}\right) \tag{C.2.5.18}$$

然后以$u_{ij}^{n+1\circledast}$代替u_{ij}^{n+1}，$\mathscr{L}_y$，$\mathscr{L}_z$进行完后也作类似处理，其中

$$\left.\begin{aligned}&\nu_2=\frac{|\lambda|\Delta t}{\Delta x}\left(1-\frac{|\lambda|\Delta t}{\Delta x}\right)\text{或}\frac{1}{4}\\&\theta_x=\left|\frac{p_{i+1,j}-2p_{ij}+p_{i-1,j}}{p_{i+1,j}+2p_{ij}+p_{i-1,j}}\right|^m\quad m>0\\&\theta_y,\theta_z\text{ 有类似公式}\\&|\lambda|=\max_{i,j,k}\left(\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial h}{\partial u}\right)\end{aligned}\right\} \tag{C.2.5.19}$$

MacCormack 格式计算方便，便于进行并行计算，目前有广泛应用，但它计算中出现波动，稳定条件严，要求加人工粘性项。

以上的方法可以推广到方程组，λ则为三个矩阵$\left(\frac{\partial F}{\partial U},\ \frac{\partial G}{\partial U},\ \frac{\partial H}{\partial U}\right)$绝对值最大的特征值。

2.5.2 Beam—Warming 格式

这里直接从非线性方程组出发讨论 B—W 格式的建立。

设方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}+\frac{\partial G(U)}{\partial y}+\frac{\partial H(U)}{\partial z}=0 \tag{C.2.5.20}$$

则可有

$$\begin{aligned}U^{(n+1)}=U^{(n)}-\frac{\Delta t}{2}\Bigg\{&\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{(n)}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{(n+1)}\right]+\left[\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^{(n)}+\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^{(n+1)}\right]\\&+\left[\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^{(n)}+\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^{(n+1)}\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{C.2.5.21}$$

引入记号

$$A=\frac{\partial F}{\partial U},B=\frac{\partial G}{\partial U},C=\frac{\partial H}{\partial U} \tag{C.2.5.22}$$

则（C.2.5.21）式可以改写为

$$\begin{aligned}&U^{(n+1)}-U^{(n)}+\frac{1}{2}\Delta t\left[\frac{\partial\Delta F^n}{\partial x}+\frac{\partial\Delta G^n}{\partial y}+\frac{\partial\Delta H^n}{\partial z}\right]\\&=-\frac{1}{2}\Delta t\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^n+\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^n+\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^n\right]\end{aligned} \tag{C.2.5.23}$$

其中 $\Delta F^n = F^{n+1} - F^n, \quad \Delta G^n = G^{n+1} - G^n, \quad \Delta H = H^{n+1} - H^n$ (C.2.5.24)

且 $$\Delta F^n = \left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)^n (U^{n+1} - U^n) + O(\Delta t^2) = A^n \Delta U^n + O(\Delta t^2)$$

或略去二阶小量可得

$$\Delta F^n = A^n \Delta U^n, \Delta G^n = B^n \Delta U^n, \Delta H^n = C^n \Delta U^n \tag{C.2.5.25}$$

代入（C.2.5.23）得

$$\left[I + \frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial}{\partial x}A^n + \frac{\partial}{\partial y}B^n + \frac{\partial}{\partial z}C^n\right)\right]\Delta U^n$$
$$= -\Delta t\left(\frac{\partial F^n}{\partial x} + \frac{\partial G^n}{\partial y} + \frac{\partial H^n}{\partial z}\right)$$

或因式分解(保持 $O(\Delta t^2)$误差）为

$$\left(I + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial x}A^n\right)\left(I + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial y}B^n\right)\left(I + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial z}C^n\right)\Delta U^n$$
$$= -\Delta t\left(\frac{\partial F^n}{\partial x} + \frac{\partial G^n}{\partial y} + \frac{\partial H^n}{\partial z}\right) \tag{C.2.5.26}$$

其中空间差分均用中心差分格式。

这种格式计算中会产生振荡，为此应当加人工粘性项，二维时的作法为

$$\left(I + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial x}A^n - \varepsilon_i \Delta x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(I + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial y}B^n - \varepsilon_i \Delta y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Delta U^n$$
$$= -\Delta t\left(\frac{\partial F^n}{\partial x} + \frac{\partial G^n}{\partial y}\right) + \varepsilon_{ei}^{(2)} \Delta x^2 \frac{\partial^2 U^n}{\partial x^2} + \varepsilon_{ej}^{(2)} \Delta y^2 \frac{\partial^2 U^n}{\partial y^2}$$
$$- \varepsilon_{ei}^{(4)} \Delta x^4 \frac{\partial^4 U^n}{\partial x^4} - \varepsilon_{ej}^{(4)} \Delta y^4 \frac{\partial^4 U^n}{\partial y^4} \equiv R^n \tag{C.2.5.27}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{ei}^{(2)} = k_2\theta_x, \theta_x = \left|\frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{p_{i+1} + 2p_i + p_{i-1}}\right| \\
&\varepsilon_{ej}^{(2)} = k_2\theta_y, \theta_y = \left|\frac{p_{j+1} - 2p_j + p_{j-1}}{p_{j+1} + 2p_j + p_{j-1}}\right| \\
&k_2 = \frac{1}{4} \\
&\varepsilon_{ej}^{(4)} = \max\{0, (k_4 - e_{ei}^{(2)})\}, k_4 = \frac{1}{128} \\
&\varepsilon_{ej}^{(4)} = \max\{0, (k_4 - \varepsilon_{ei}^{(2)})\} \\
&\varepsilon_i = 0.1 \sim 0.05
\end{aligned}\right\} \tag{C.2.5.28}$$

这一人工粘性项是由 Jamson 设计的，三维时作法类似，但 ε_i 约为 0.6～1 之间。

这里要说明一点的是：如果没有人工粘性项，三维问题的计算是无条件不稳定的，这一点的详细讨论就不再累赘了，读者可自行分析其放大因子即可得知。

2.5.3 系数矩阵分裂方法（B-W 显式格式）

这一作法与 B 篇中的作法是一致的，对于二维的气体动力学方程，包括能量方程，方程为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=0\\
&U=(\rho,\quad m_x,\quad m_y,\quad E)^{\mathrm{T}}\\
&F=\left(m_x,\quad p+\frac{m_x^2}{\rho},\quad \frac{m_x m_y}{\rho},\quad m_x E_s+\frac{m_x}{\rho}p\right)^{\mathrm{T}}\\
&G=\left(m_y,\quad \frac{m_x m_y}{\rho},\quad p+\frac{m_y^2}{\rho},\quad m_y E_s+\frac{m_y}{\rho}p\right)^{\mathrm{T}}\\
&p=(\gamma-1)\rho E-\frac{\gamma-1}{2}\frac{m^2}{\rho},\quad E=e+\frac{V^2}{2}\\
&V^2=u^2+v^2,\\
&m_x=\rho u,\quad m_y=\rho v,\quad m^2=m_x^2+m_y^2
\end{aligned}\right\}\qquad (C.2.5.29)
$$

不难得到

$$\frac{\partial F}{\partial U}=A \text{ 的特征为 } \lambda_A=u,\quad u+c,\quad u,\quad u-c$$

$$\frac{\partial G}{\partial U}=B \text{ 的特征为 } \lambda_B=v,\quad v+c,\quad v,\quad v-c$$

$$c=\sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}}$$

关于本方法的具体作法不再重复。

其次关于时间分裂格式、反扩散隐式格式及 NND 格式在前面都已经讨论过，不再详细讨论。

2.5.4 二维 Godunov 格式

关于一维的 Godunov 格式在上一节中作了详细讨论，这里推广到二维问题，这包括平面问题和轴对称问题，方程可统一写作

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho r^{\nu}}{\partial t}+\frac{\partial \rho u r^{\nu}}{\partial x}+\frac{\partial \rho v r^{\nu}}{\partial r}=0\\
&\frac{\partial \rho u r^{\nu}}{\partial t}+\frac{\partial (p+\rho u^2) r^{\nu}}{\partial x}+\frac{\partial \rho u v r^{\nu}}{\partial r}=0\\
&\frac{\partial \rho v r^{\nu}}{\partial t}+\frac{\partial \rho u v r^{\nu}}{\partial x}+\frac{\partial (p+\rho v^2) r^{\nu}}{\partial r}=0\\
&\frac{\partial \rho\left(e+\frac{v^2}{2}\right)r^{\nu}}{\partial t}+\frac{\partial \rho u\left(e+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)r^{\nu}}{\partial x}+\frac{\partial \rho v\left(e+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}\right)r^{\nu}}{\partial r}=0
\end{aligned}\right\}\qquad (C.2.5.30)
$$

这里的网格点定义在网格中央而不在其交叉点上，如图 C. 2. 38 所示。

将上式对网格 ij 上作积分，则得

$$
\begin{aligned}
\rho_{ij}^{n+1}=\rho_{ij}^{n}&-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[(RU)_{i+\frac{1}{2},j}-(RU)_{i-\frac{1}{2},j}\right]\\
&-\frac{\Delta t}{\Delta r}\left[(RV)_{i,j+\frac{1}{2}}\frac{r_{j+\frac{1}{2}}^{\nu}}{r_j^{\nu}}-(RV)_{i,j-\frac{1}{2}}\frac{r_{j-\frac{1}{2}}^{\nu}}{r_j^{\nu}}\right]
\end{aligned}\qquad (C.2.5.31\text{-}1)
$$

$$(\rho u)_{ij}^{n+1} = (\rho u)_{ij}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big[(p+RU^2)_{i+\frac12,j} - (p+RU^2)_{i-\frac12,j}\Big]$$

$$- \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big[(RUV)_{i,j+\frac12}\frac{r^\nu_{j+\frac12}}{r^\nu_j} - (RUV)_{i,j-\frac12}\frac{r^\nu_{j-\frac12}}{r^\nu_j}\Big] \qquad \text{(C. 2. 5. 31-2)}$$

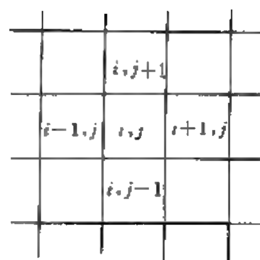


图 C. 2. 38

$$(\rho v)_{ij}^{n+1} = (\rho v)_{ij}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big[(RUV)_{i+\frac12,j} - (RUV)_{i-\frac12,j}\Big]$$

$$- \frac{\Delta t}{\Delta r}\Big[(p+RV^2)_{i,j+\frac12}\frac{r^\nu_{j+\frac12}}{r^\nu_j} - (p+RV^2)_{i,j-\frac12}\frac{r^\nu_{j-\frac12}}{r^\nu_j}\Big] + \frac{\Delta t}{r^\nu_j}p_{ij} \qquad \text{(C. 2. 5. 31-3)}$$

$$\Big[\rho\Big(e+\frac{u^2+v^2}{2}\Big)\Big]_{ij}^{n+1} = \Big[\rho\Big(e+\frac{u^2+v^2}{2}\Big)\Big]_{ij}^{n}$$

$$- \frac{\Delta t}{\Delta x}\Big[RU\Big(E+\frac{p}{R}+\frac{U^2+V^2}{2}\Big)_{i+\frac12,j} - RU\Big(E+\frac{p}{R}+\frac{U^2+V^2}{2}\Big)_{i-\frac12,j}\Big]$$

$$- \frac{\Delta t}{\Delta r}\Big[RV\Big(E+\frac{p}{R}+\frac{U^2+V^2}{2}\Big)_{i,j+\frac12}\frac{r^\nu_{j+\frac12}}{r^\nu_j}$$

$$- RV\Big(E+\frac{p}{R}+\frac{U^2+V^2}{2}\Big)_{i,j-\frac12}\frac{r^\nu_{j-\frac12}}{r^\nu_j}\Big] \qquad \text{(C. 2. 5. 31-4)}$$

其中

$$\left.\begin{array}{l} p_{ij} = (\nu-1)R_{ij}E_{ij} \\ R,U,V,E \text{ 为 } \rho,u,v,e \text{ 在 } n+\frac12 \text{ 时间层上的值} \end{array}\right\} \qquad \text{(C. 2. 5. 32)}$$

在 $x=x_{i+\frac12}$ 处产生的间断生成三个波，其中之一是接触间断，另二个波的传播速度为

$$\left.\begin{array}{l} D^L_{i+\frac12,j} = u^n_{ij} - \dfrac{a_{i+\frac12,j}}{\rho^n_{ij}} \\ D^R_{i+\frac12,j} = u^n_{i+1,j} + \dfrac{a_{i+\frac12,j}}{\rho^n_{i+1,j}} \\ a_{i+\frac12,j} = \sqrt{\gamma\,\dfrac{p^n_{ij}+p^n_{i+1,j}}{2}\,\dfrac{\rho^n_{ij}+\rho^n_{i+1,j}}{2}} \end{array}\right\} \qquad \text{(C. 2. 5. 33)}$$

和前面情况相同，也有

$$
\left.
\begin{aligned}
p^{*} &= \frac{p_{ij}^{n} + p_{i+1,j}^{n}}{2} + a_{i+\frac{1}{2},j}\frac{u_{ij}^{n} - u_{i+1,j}^{n}}{2} \\
u^{*} &= \frac{u_{ij}^{n} + u_{i+1,j}^{n}}{2} + \frac{p_{ij}^{n} - p_{i+1,j}^{n}}{2a_{i+\frac{1}{2},j}} \\
\rho_{L} &= \frac{(\gamma+1)p^{*} + (\gamma-1)p_{ij}^{n}}{(\gamma-1)p^{*} + (\gamma+1)p_{ij}^{n}}\rho_{ij} \\
\rho_{R} &= \frac{(\gamma+1)p^{*} + (\gamma-1)p_{i+1,j}^{n}}{(\gamma-1)p^{*} + (\gamma+1)p_{i+1,j}^{n}}\rho_{i+1,j}
\end{aligned}
\right\}
\qquad (C.2.5.34)
$$

由上述量再得 U, V 如下：

(1) $D_{i+\frac{1}{2},j}^{L}$, $D_{i+\frac{1}{2},j}^{R}$ 均>0，则

$U_{i+\frac{1}{2},j}=u_{ij}$ $\quad P_{i+\frac{1}{2},j}=p_{ij}$ $\quad V_{i+\frac{1}{2},j}=v_{ij}$ $\quad R_{i+\frac{1}{2},j}=\rho_{ij}$

(2) $D_{i+\frac{1}{2},j}^{L}$, $D_{i+\frac{1}{2},j}^{R}$ 均<0，则

$U_{i+\frac{1}{2},j}=u_{i+1,j}$ $\quad P_{i+\frac{1}{2},j}=p_{i+1,j}$ $\quad V_{i+\frac{1}{2},j}=v_{i+1,j}$ $\quad R_{i+\frac{1}{2},j}=\rho_{i+1,j}$

(3) $D_{i+\frac{1}{2},j}^{L}$, $D_{i+\frac{1}{2},j}^{R}$一正一负， $u^{*}>0$，则

$U_{i+\frac{1}{2},j}=u^{*}$ $\quad P_{i+\frac{1}{2},j}=p^{*}$ $\quad V_{i+\frac{1}{2},j}=v_{ij}$ $\quad R_{i+\frac{1}{2},j}=\rho_{L}$

(4) $D_{i+\frac{1}{2},j}^{L}$, $D_{i+\frac{1}{2},j}^{R}$一正一负， $u^{*}<0$，则

$U_{i+\frac{1}{2},j}=u^{*}$ $\quad P_{i+\frac{1}{2},j}=p^{*}$ $\quad V_{i+\frac{1}{2},j}=v_{i+1,j}$ $\quad R_{i+\frac{1}{2},j}=\rho_{R}$

有了以上值，可得

$$
E_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{P_{i+\frac{1}{2},j}}{(\gamma-1)R_{i+\frac{1}{2},j}}
$$

对于 $(U, V, P, R, E)_{i,j+\frac{1}{2}}$的值可作类似处理（间断处为 $\gamma=\gamma_{j+\frac{1}{2}}$）。

对于任意四边形单元，原则上可作类似推广。

Godunov 格式虽然只有一阶精度，但实际可以达到二阶精度，这是因为格式是从 Riemann 解出发的，更加接近于物理上的考虑，而本身又有足够的阻尼来克服强梯度趋势，所以稳定性好。

Godunov 格式还有二阶修正方法，可以参考 Holt 一书，但是作法颇为复杂，这里不作介绍。近年来人们又发展了更新的方法，所以过去的比较复杂的方法将被淘汰，在第六章中将介绍有关新发展的方法供读者参考。

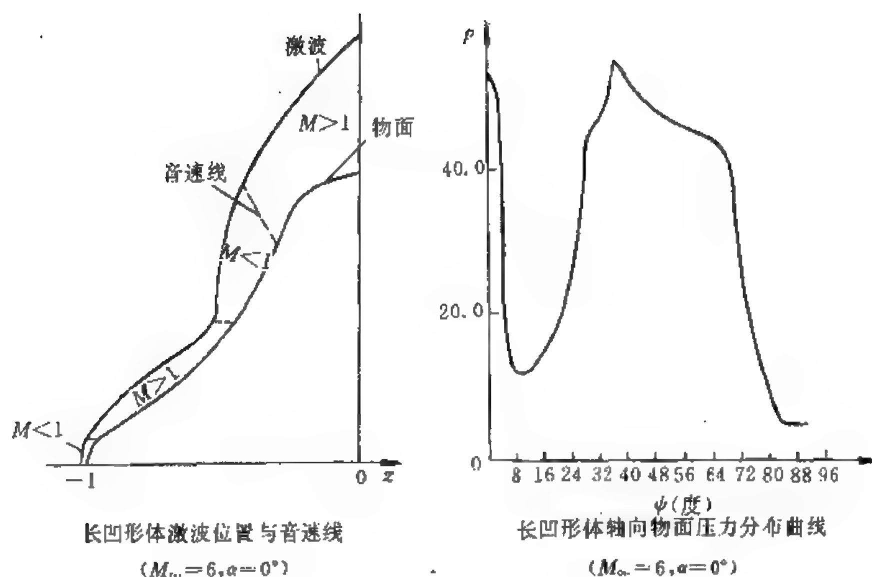
最后简单提一下，边界条件的个数和正确的提法尽管已经有了（见前二篇的讨论），实际计算中边界条件的处理仍然是比较麻烦的，读者可以参考有关文献，比如 Abbett 的论文等。

以下的例子分别展示了以上介绍的一些方法在使用中得到的结果。

侯天相等对各种形状的钝头体在超声速来流时的流动图案进行计算，采用 MacCormack 方法，图 C. 2. 39 显示了长凹形体的激波位置和物面压力分布。

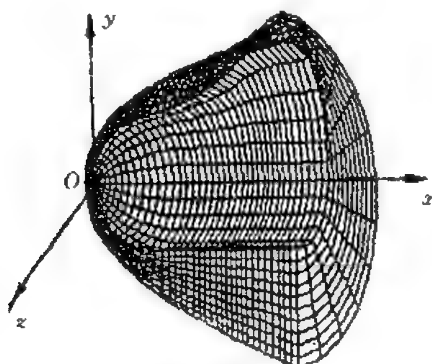
张涵信采用 NND 法得到的结果在图 C. 2. 40 和图 C. 2. 41 中显示。

用 Godunov 格式计算轴对称物体绕流时所得的结果在图 C. 2. 42 中显示。



长凹形体激波位置与音速线 ($M_\infty=6, \alpha=0°$)　　长凹形体轴向物面压力分布曲线 ($M_\infty=6, \alpha=0°$)

图 C.2.39



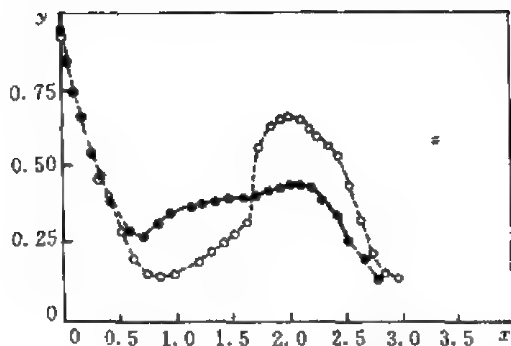
三维计算外形及其网格

图 C.2.40

在有关的杂志和书籍中还有大量的例子说明上述方法的有效性，但每一种方法又都有自己的局限性，主要表现在计算出现振荡，需要加人工粘性项及有一定的经验性，因此寻求更稳定和更有效的格式仍然是需要的。

需要说明的是本章的许多计算格式也可以推广到可压缩粘性流体流动的计算，同时在下一章中将介绍的方法，如通量分裂方法、推进迭代方法也可以应用于可压缩无粘流，所以有关的一些方法留待下一章详细讨论。

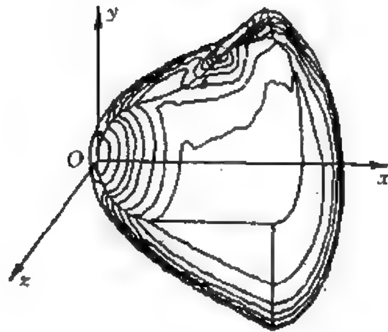
这里介绍的方法都是适用于不定常流动的，所以关于运动激波的计算也是适用的。



Euler 方程、NS 方程解的比较

○无粘 $M=10, \alpha=0°$

●有粘



Euler 方程解出的三维流的等密度线

$M=10, \alpha=-5°$, NND 格式

图 C.2.41

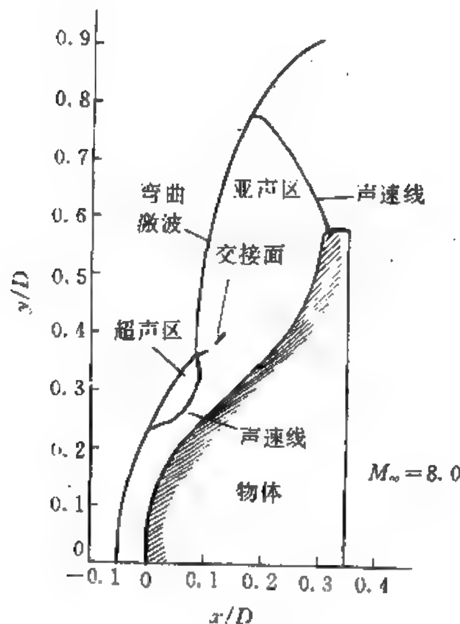


图 C.2.42

小 结

本章首先讨论了弱非线性(包括线性)流场的计算，其中绝大部分方法是比较经典的，跨声速流的计算中所采用的类型相关格式，其指导思想是很有启发性的。

然后本章比较详细地讨论了 Burger 方程的求解，从而引入了间断的概念、熵条件，并以它为模型方程，讨论了激波捕捉的计算方法，比较了各种方法的优缺点以及寻求正确方法的途径。

本章还比较详细地讨论了 Riemann 问题的求解以及 Godunov 格式，它是当前许多新方法的出发点，了解这些内容对于我们以后接受更新的方法有指导意义。

最后将以上各种方法推广到多维问题中去，用来解决实际问题，实例表示以上各种方法

都是有效的。

参考文献

1. Vries G de. The Application of the Finite-Element Technique to Potential Flow Problem. J Appl Mech ASME Dez，1971
2. Vries G de. The Application of the Finite-Element Technique to Potential Flow Problems. Mech Eng Report. 1969.（7 8）
3. 丁道扬．具有未知流量的二元孔口水流数学模型．水利水运科学研究．1982，（2）
4. Luke J C. A Variational Principle for a Fluid with a Free Surface. J Fluid Mech 1967，27：395—397
5. 许协庆．自由流动的一种有限元解法．水利学报．1980，（1）：1—13
6. Habashi W G. Compressible Potential Flows by the FEM. Proc 2nd Int symp FEM in Flow Problems. Italy ；ICCAD，1976
7. Baskharene E. A New Approach in Cascade Flow Analysis Using the FEM. AIAA J 19（1）：65—71
8. 时爱民，苏铭德，刘季稔．气体动力学基础．科学出版社，1988
9. 安继光．亚音速空气动力学中的有限基本解法．气动研究与发展．1978，（1）
10. 王灿晨等．亚音速复杂组合体表面压力分布及气动特性数值计算方法．空气动力学学报．1981，（3）
11. Murman E M. Calculation of Plane Steedy Transonic Flow. AIAA J，1971，19：114—121
12. Jamson A. Transonic Flow Calculations in " Numerical Methods in Fluid Mechanics". Hemisphere publishing Corporation，1978.
13. Benton E R. A Table of Solutions of the One-Dimensional Burgers Equation. Quarterly of Appl Math. 1972，30：195—212
14. Lax P D. Hyperbaric Systems of Conservation Laws Ⅱ. Comm pure Appl Math. 1957，10：537—566
15. 吴江航，韩庆书．计算流体力学的理论、方法及应用．科学出版社，1988
16. Beam R M，Warming R F. An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbalic Systems in Conservation form. J of Comp phys. 1976，22（1）
17. Rusanov V V. On Calculation Accuracy in Gas Flow Problems with Shock Type Discontinuties. Lecture Notes in physics. 1982
18. Anderson D A . A Comparison of Numecical Solutions to Inviscid Equations of Fluid Motion. J of Comp Phys. 1974，15（1）
19. Rusanov V V. On Difference Schemes of Third Order Accuracy for Nonlinear Hyperbalic Systems. J of Comp Phys. 1970，5：507—516
20. 张涵信等．超声速，超高声速粘性气体分离流动的显隐式差分解法．应用数学和力学．1983，4（1）
21. Holt M. Numerical Methods in Fluid Dynamics. Spring-Verlag，1984
22. Mader C L. Numerical Modeling of Detonations. Berkly：University of Colifornia Press，1985
23. 侯天相等．钝体绕流的非定常差分方法．宇航出版社，1986
24. 沈孟育等．叶轮机械中的跨音速流动．科学出版社，1988
25. Colella P. Numerical Calculation of Complex Shock Reflections in Gases. Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag，1986

习 题

1. 试计算下列流场（图C. 2. 43）。

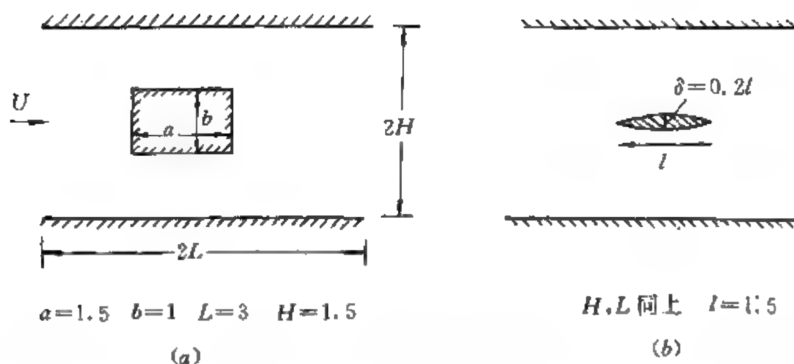


图 C.2.43

2. 试导出轴对称情况下以流函数为求解变量的基本方程，且用有限元方法求解在管内流体对圆球的绕流；如球换成一纺锤形的回转体，试作同一计算（见图 C.2.44）。

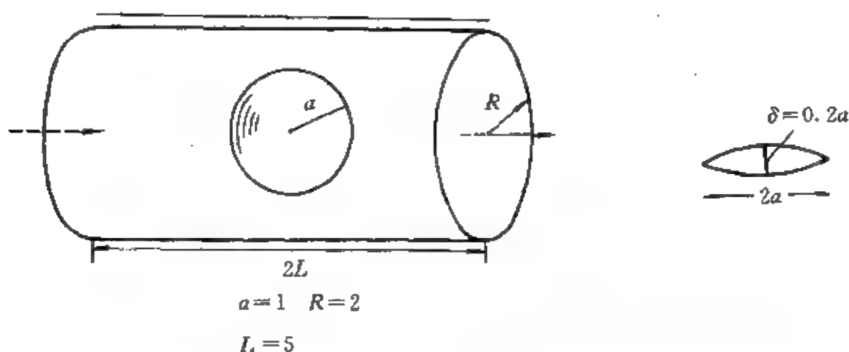


图 C.2.44

3. 用 de Vries 的方法计算由儒可夫斯基变换得到的机翼在零攻角下的流场、翼表面速度分布和压力分布，并与精确解比较（见图 C.2.45）。

4. 试用小扰动理论计算由儒可夫斯基变换后得到的薄翼的绕流问题。

(1) $\delta=0.05$，$h=0$，$a=1$，$M_\infty=0$ ($U=1$)；$M_\infty=0.2$，0.5，0.8，0.9；

(2) $\delta=0.1$，$h=0$，$a=1$，$M_\infty=0$ ($U=1$)；$M_\infty=0.2$，0.5，0.8，0.9；

(3) $\delta=0.05$，$h=0.05$，$a=1$，$M_\infty=0$ ($U=1$)；$M_\infty=0.2$，0.5，0.8，0.9。

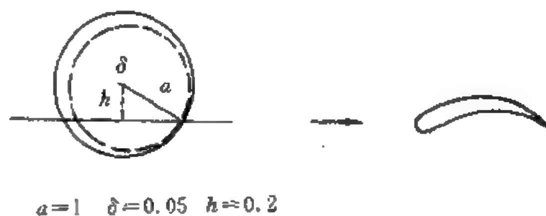
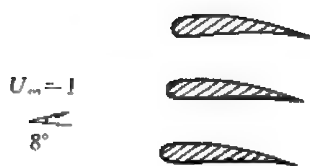


图 C.2.45

5. 设叶栅的单翼由儒可夫斯基变换得到，其中 $a=1$，$\delta=0.05$，$h=0.05$，叶片的栅距为 $T=1$，安装角为零度，来流攻角为 8°，$U=1$，试用有限元法计算流场、翼面速度分布及压力分布。另用小扰动理论计算 $M_\infty=0$，0.2，0.5，0.8 时的流场（参看图 C.2.46）。

6. 试用有限元法求解圆柱振荡时的绕流情况并与精确解比较（见图 C.2.47）。

7. 利用奇点法（有限基本解法）求解题 3 中的机翼绕流问题，求出表面的速度及压力系数，与精确解比较。且将来流改为 $M_\infty=0.2$，0.4，作同样的计算，与钱学森-卡门公式结果作比较。



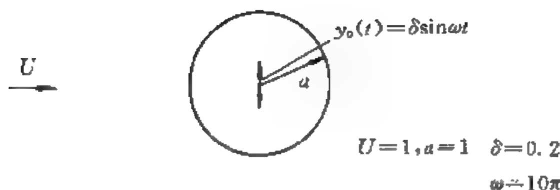


图 C.2.46　　　　　　　　　　图 C.2.47

8. 利用 Murman-Cole 方法，但是采用 x，y 方向均为不均匀网格时的类型相关格式。用上述方法求解对称圆弧翼型 $h(x)=\tau(1-x^2)$ 在 $M_\infty=0$，0.2，0.4，0.6，0.8，0.9 及攻角分别为 0°，5°，8°时的流场以及表面的压力系数，其中 $\tau=0.06$。

9. 试给出初值为

$$u=\begin{cases} u_- & x<0 \\ \dfrac{1}{2}(u_++u\ \ ) & x=0 \\ u_+ & x>0 \end{cases} \qquad (u_->u_+>0)$$

时方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的精确解，以及 $\nu\to 0$ 时的极限情况。

10. 在上题中设 $u\ \ =3$，$u_-=1$，试用：(1) 迎风格式，(2) Lax 格式，(3) MacCormack 格式，(4) Beam-Warming 显式和隐式格式，(5) NND 格式，(6) Rusanov 格式（Ⅰ，Ⅱ）求解上一题的方程。对于有些格式 $u_j>0$ 的条件应改为 $|\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}|<|\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}|$，且二者同号；$u_j<0$ 改为 $|\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}\ \ >|\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}|$。

11. 已知方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=A\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=B\frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned}\right\} \qquad >0,\quad B>0)$$

试证明 Godunov 式为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta tA}{2\Delta x}(v_{j+1}^n \qquad\qquad \frac{\sqrt{AB}}{2\Delta x}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j\ \ 1}^n)$$

$$v_j^{n+1}=v_j^n+\frac{\Delta tB}{2\Delta x}(u_j^n \qquad\qquad \frac{\sqrt{AB}}{2\Delta x}(v_{j+1}^n-2v_j^n+v_{j-1}^n)$$

12. 设方程为

$$\left.\begin{aligned} &=0\\ &0\end{aligned}\right\} \qquad p(v)=\frac{A}{B}(v-v_0)+p_0$$

则差分格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t B}{\Delta x}\left(p_{j+\frac{1}{2}}^n - p_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$$

$$v^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t B}{\Delta x}\left(U_{j+\frac{1}{2}}^n - U_{j-\frac{1}{2}}^n \right)$$

其中

$$p_{j+\frac{1}{2}} = \frac{p_{j+1} - p_j}{2} - \sqrt{\frac{A}{B}}\,\frac{u_{j-1} - u_j}{2}$$

$$U_{j+\frac{1}{2}} = \frac{u_{j+1} + u_j}{2} - \frac{p_{j+1} - p_j}{2\sqrt{A/B}}$$

13. 试用 Godunov 格式和 NND 格式计算以(C.2.3.65)式为初始条件的一维不定常起始条件，求解域为$-\infty < x < +\infty$，$\Delta t/\Delta x < 0.66$，取 0.5，计算 60 个时间步长后的速度分布，并且与气体力学的精确解作比较。

14. 试用线性化的方法证明二维情况下，(C.2.5.25) 式是无条件稳定的，且$|G| = 1$。试建立三维时矩阵

$$\frac{\partial F}{\partial U} = A, \quad \frac{\partial G}{\partial U} = B, \quad \frac{\partial H}{\partial U} = C$$

的表达式及T^{-1}，T，S^{-1}，S，R^{-1}，R，其中这些量满足

$$A = S^{-1}\Lambda_A S, \quad B = T^{-1}\Lambda_B T, \quad C = R^{-1}\Lambda_C R$$

的表达式（这里指的是三维无粘性气体动力学方程）。

15. 浅水波方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + g\frac{\partial h}{\partial y} = 0
\end{aligned}\right\}$$

试导出一，二维时的 Godunov 格式（利用 Riemann 方法）解的方法。

第 3 章 粘性流体流动的数值计算

上一章着重讨论了无粘性流体流动的数值计算，其中不少方法可以推广到可压缩粘性流体流动的数值计算中去。不可压缩流体流动的数值计算有其特殊性，本章内容的一个重要方面就是讨论这种数值计算方法。

为了求解具体问题，被求解的 N-S 方程首先应当在曲线坐标中写出来。本篇第 1 章已经介绍了一般方程在曲线坐标下的表达方式，N-S 方程的具体形式将附在本章末供读者参考，具体的推导过程请读者作为练习自行完成。

3.1 可压缩粘性流体流动数值计算的 MacCormack 显式格式

MacCormack 格式已经为人们所熟悉，这里将该方法进一步推广到有粘性项的方程中。首先讨论下述方程的求解：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \tag{C.3.1.1}$$

类似于以前的作法有

$$u^{n+1}=u^n+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n\Delta t+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\Delta t^2+\cdots \tag{C.3.1.2}$$

这里为书写方便略去了下标。由于

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-a\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(-a\frac{\partial}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\left(-a\frac{\partial}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)^2 u$$

…………………

代入 (C.3.1.2) 式可得

$$\begin{aligned}u^{n+1}=&u^n+\Delta t\left(-a\frac{\partial}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)u+\frac{\Delta t^2}{2}\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2a\nu\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\nu^2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\right)u^n\\&+O(\Delta t^2)\\=&\frac{1}{2}u^n+\frac{1}{2}\left[1+2\Delta t\left(-a\frac{\partial}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)\right.\\&\left.+\Delta t^2\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2a\nu\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\nu^2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\right)\right]u^n+O(\Delta t^2)\end{aligned}$$

引用本书前面用过的 Δ_x^+，Δ_x^- 等的记号，上式可改写为

$$\begin{aligned}u^{n+1}=&\frac{1}{2}u^n+\frac{1}{2}\left\{1+2\Delta t\left[-\frac{a}{2}(\Delta_x^++\Delta_x^-)+\frac{\nu}{2}(\Delta_x^++\Delta_x^-)\Delta_y^0\right]\right.\\&\left.+\Delta t^2\left[a^2\Delta_x^+\Delta_x^-+\nu^2\Delta_x^+\Delta_x^-\Delta_y^0\Delta_y^0-2a\nu\Delta_x^+\Delta_x^-\Delta_y^0\right]\right\}u^n\\&+O(\Delta t^2,\Delta t\Delta x^2,\Delta t\Delta x^2\Delta y^2)\end{aligned}$$

略去小量（截断误差项），再作因子分解，可得

$$u^{n+1} = \frac{1}{2}u^n + \frac{1}{2}[1 - \Delta t\Delta_x (a - \quad \text{(C. 3. 1. 3)}$$

改写为多步形式则为

$$\overline{u^{n+1}} = [1 - \Delta t\Delta_x^- (\cdots$$
$$\overline{\overline{u^{n+1}}} = [1 - \Delta t\Delta_x^+ (\cdots \quad \text{(C. 3. 1. 4)}$$
$$u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^n + \overline{\overline{u^{n+}}}$$

或进一步改写为

$$\overline{u^{n+1}} = u^n - \Delta$$
$$\overline{\overline{u^{n+1}}} = \overline{u^{n+1}} - \quad \text{(C. 3. 1. 5)}$$
$$u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^n$$

其中 $F = au - \nu\frac{\partial u}{\partial y}$，在 F 中$\frac{\partial u}{\partial y}$用中心差分为

为了得到稳定条件，只需分析每一步的稳定 此得到的稳定条件为

$$\Delta t \leqslant \frac{}{\frac{|a|}{\Delta x}} \quad \text{(C. 3. 1. 6)}$$

对于方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \quad \text{(C. 3. 1. 7)}$$

可直接用上面的方法，即

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} - c\frac{\partial^2}{\partial}$$

代入关于时间的台劳展式，用与前类似的方法可

$$\overline{u^{n+1}} = u^n - \Delta t(\Delta_x^- F^n$$

F 中$\frac{\partial}{\partial y}$项用中心差分

G 中$\frac{\partial}{\partial x}$项用中心差分

$$\overline{\overline{u^{n+1}}} = \overline{u^{n+1}} - \Delta t(\Delta_x^+ \quad \text{(C. 3. 1. 8)}$$

F 中$\frac{\partial}{\partial y}$项用中心差分

G 中$\frac{\partial}{\partial y}$项用中心差分

$$u^{n+1} = \frac{1}{2}(u^n + \overline{\overline{u^{n+1}}})$$

其中

$$F = au + c\frac{\partial}{\partial}$$
$$G = bu + e\frac{\partial}{\partial} \quad \text{(C. 3. 1. 9)}$$

这一过程可直接推广到三维问题中。

另一个简单的方法是采用时间分裂，如（C.3.1.7）式可简写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=0 \tag{C.3.1.10}$$

它可以分裂成二个一维方程，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=0\\ \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \tag{C.3.1.11}$$

每一步都可用 MacCormack 格式。对于三维问题则分解为 3 个方程，分别用 MacCormack 格式计算。

时间分裂后若采用 MacCormack 格式，则稳定条件为

$$t\leqslant\min\left\{\frac{1}{\frac{|a|}{\Delta x}+\frac{c}{\Delta x^2}+\frac{d}{\Delta x\Delta y}},\quad\frac{1}{\frac{|b|}{\Delta y}+\frac{e}{\Delta y^2}+\frac{d}{\Delta x\Delta y}}\right\} \tag{C.3.1.12}$$

以上计算也可以推广到三维。一般地方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial(F_U+F_V)}{\partial x}+\frac{\partial(G_U+F_V)}{\partial y}+\frac{\partial(H_U+H_V)}{\partial z}=R \tag{C.3.1.13}$$

时间分裂格式为

$$\left.\begin{aligned}&\overline{U^{n+1}}=U^n-\Delta t\left[\Delta_x^-(F_U+F_V)+\Delta_y^-(G_U+G_V)+\Delta_z^-(H_U+H_V)\right]^n+\frac{R^n}{2}\\ &\overline{\overline{U^{n+1}}}=\overline{U^{n+1}}-\Delta t\left[\Delta_x^+(F_U+F_V)+\Delta_y^+(G_U+G_V)+\Delta_z^-(H_U+H_V)\right]^{\overline{n+1}}+\frac{\overline{R^{n+1}}}{2}\\ &U^{n+1}=\frac{1}{2}(U^n+\overline{\overline{U^{n+1}}})\end{aligned}\right\} \tag{C.3.1.14}$$

其中在 Δ_x^- 作用下的 $\frac{\partial}{\partial x}$ 用 Δ_x^+，而 $\frac{\partial}{\partial y}$，$\frac{\partial}{\partial z}$ 则用 Δ_y^0，Δ_z^0；在 Δ_x^+ 作用下的 $\frac{\partial}{\partial x}$ 用 Δ_x，而 $\frac{\partial}{\partial y}$，$\frac{\partial}{\partial z}$ 则仍用 Δ_y^0，Δ_z^0，其它方向依此类推。

稳定条件为

$$\Delta t\leqslant\frac{1}{\frac{|\lambda_A|_{\max}}{\Delta x}+\frac{|\lambda_B|_{\max}}{\Delta y}+\frac{|\lambda_C|_{\max}}{\Delta z}+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{|\lambda_{M_{F_ix_j}}|_{\max}}{\Delta x_i\Delta y_i}} \tag{C.3.1.15}$$

其中 A，B，C，$M_{F_ix_j}$ 的意义见本章末的附录。

在可压缩流体流动问题中

$$\left.\begin{aligned}|\lambda_A|_{\max}=\max\{|u|,|u+c|,|u-c|\}\leqslant|u|+|c|\\ |\lambda_B|_{\max}=\max\{|v|,|v+c|,|v-c|\}\leqslant|v|+|c|\\ |\lambda_C|_{\max}=\max\{|w|,|w+c|,|w-c|\}\leqslant|w|+|c|\end{aligned}\right\} \tag{C.3.1.16}$$

如采用时间分裂的差分格式，则要求解下面 3 个方程：

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial(F_U+F_V)}{\partial x}=\frac{1}{3}R\\
\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial(G_U+G_V)}{\partial y}=\frac{1}{3}R\\
\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial(H_U+H_V)}{\partial z}=\frac{1}{3}R
\end{aligned}\right\}\tag{C.3.1.17}
$$

具体的差分方程如下

$$
\left.\begin{aligned}
&U^{*}=U^{n}-\Delta t\Delta_x^{-}(F_U+F_V)^{n}+\frac{1}{6}R^{n}\\
&U^{**}=U^{*}-\Delta t\Delta_x^{+}(F_U+F_V)^{*}+\frac{1}{6}R^{*}\\
&\overline{U^{n+1}}=\frac{1}{2}(U^{n}+U^{**})\\
&\mathring{u}=\overline{u^{n+1}}-\Delta t\Delta_y^{-}(G_U+G_V)^{\overline{n+1}}+\frac{1}{6}\overline{R^{n+1}}\\
&{}^{\circ}u^{\circ}=\mathring{u}-\Delta t\Delta_y^{+}(G_U+G_V)^{c}+\frac{1}{6}\mathring{R}\\
&\overline{\overline{u^{n+1}}}=\frac{1}{2}(\overline{u^{n+1}}+{}^{\circ}u^{\circ})\\
&\overset{\Delta}{u}=\overline{\overline{u^{n+1}}}-\Delta t\Delta_z^{-}(H_U+H_V)^{\overline{\overline{n+1}}}+\frac{1}{6}\overline{\overline{R^{n+1}}}\\
&\overset{\Delta\Delta}{u}=\overset{\Delta}{u}-\Delta t\Delta_z^{+}(H_U+H_V)^{\Delta}+\frac{1}{6}\overset{\Delta}{R}\\
&u^{n+1}=\frac{1}{2}(\overline{\overline{u^{n+1}}}+\overset{\Delta\Delta}{u})
\end{aligned}\right\}\tag{C.3.1.18}
$$

稳定条件为

$$
\Delta t\leqslant\min\left\{\frac{|\lambda_{Ai}|}{\Delta x_i}+\sum_{j=1}^{3}\frac{|\lambda_{M_{F_i}x_j}|_{\max}}{\Delta x_i\Delta x_j}\right\}_i\tag{C.3.1.19}
$$

关于 F_V,G_V,H_V 内$\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}$ 的处理方法同前面讨论的一样。上述方程可写作

$$
L_x(\Delta t)L_y(\Delta t)L_z(\Delta t)
$$

在实际计算中更多采用

$$
L_x\left(\frac{\Delta t}{2}\right)L_y\left(\frac{\Delta t}{2}\right)L_z(\Delta t)L_y\left(\frac{\Delta t}{2}\right)L_x\left(\frac{\Delta t}{2}\right)
$$

时间分裂法比较简单，且便于并行计算，因而得到广泛应用。1969 年 MacCormack 最早将上述方法应用于激波与边界层干扰的计算，取得了极大的成功，这一方法在后来得到了多方面的应用。

激波边界层干扰的物理图象如图 C. 3. 1 所示。

求解时区域内网格划分如图 C. 3. 2 所示，这里采用直角坐标。

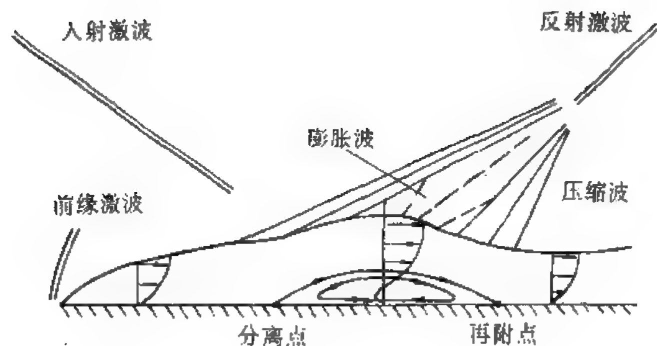


图 C.3.1

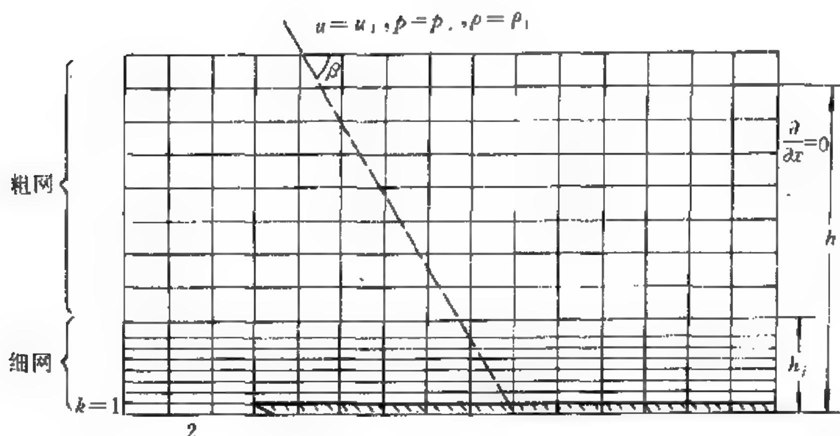


图 C.3.2

由边界层理论可知，物面处边界层的厚度$\delta \sim \frac{7x}{\sqrt{Re_x}}$，而在边界层内至少应当有 10 个以上的网格，故取$\Delta y \sim \frac{\delta}{10}$。设 $L=30$ cm，$R_L=10^6$，$M_\infty=2$，则

$$\Delta y \sim \frac{7}{10} \frac{L}{\sqrt{Re_L}} \sim 7 \times 10^{-4} L = 0.002 \text{ cm}$$

在边界层外网格可以变粗，并在足够远处网格变得均匀。这里 y 与 η 之间有一个变换关系。也可以把区域分成边界层内和外两个区，二者用不同的等距网格。粗网格内用

$$L_x\left(\frac{\Delta t}{2}\right) L_y(\Delta t) L_x\left(\frac{\Delta t}{2}\right)$$

而细网格内则用

$$\left[L_x\left(\frac{\Delta t}{2m}\right) L_y\left(\frac{\Delta t}{m}\right) L_x\left(\frac{\Delta t}{2m}\right)\right]^m$$

这里 m 的选用由稳定条件确定。

在求解细和粗网格区时各在区间外侧取一虚设的网格。在细网格区做完一步后，再在粗网格区做一时间步。在粗细网格内每计算一次时间层都要把虚网格元上的参数计算出来，它由外推计算得到或由特征相容条件得到。由于这些地方粘性不大，可以近似看作无粘性区来

计算。细网格区计算一步后，交接面上的值作为粗网格的边界值。由于细网格计算一时间步要计算 m 次，故将这 m 次的平均值作为粗网格的边界值。

在有激波时计算可能出现振荡，所以还要加人工粘性项，而且两个方向上都要加。

边界条件给法如下：

上游条件

$$i_0 = \left(e + \frac{v^2}{2}\right), \quad p_0, \quad M_\infty, \quad v_\infty = 0$$

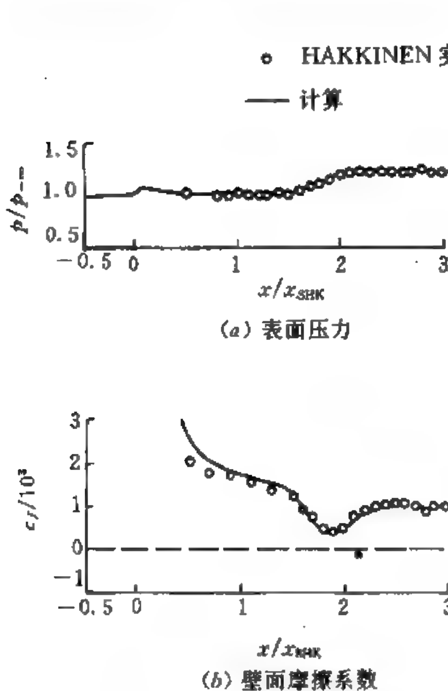
激波后边的上边界条件由激波角 β 可以确定全部流动参数。

下游条件

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad T_w \text{ 或} \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_w \text{ 已知。}$$

利用以上边界条件，粗网格为 32×16，细网格为 32×16，计算进行 128 步。在 CDC7600 计算机上计算时间为 9.8 分。

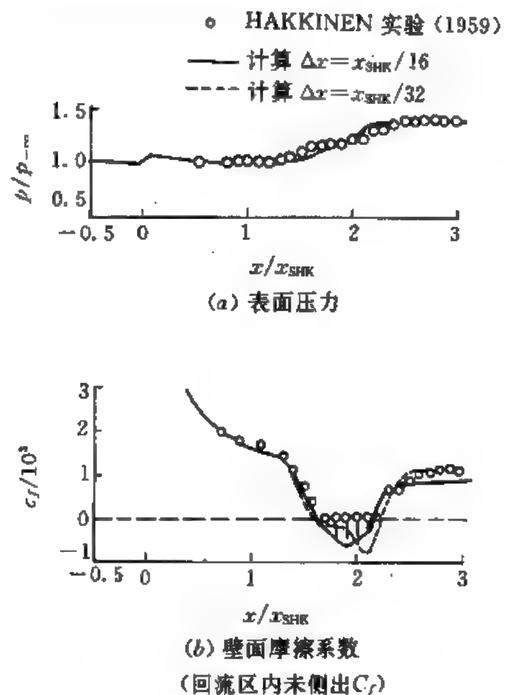
在 $M_\infty=2, T_\infty=293$ K, $Re_L=0.284\times10^6, \beta=31.3471°$时，计算结果表明流动没有分离；在 $M_\infty=2, T_\infty=293$ K, $Re_L=0.296\times10^6, \beta=32.5850°$时流动开始分离，计算结果见图 C.3.3（未分离流动计算与实验结果的比较）及图 C.3.4（分离流动计算和实验结果的比较）。



(a) 表面压力

(b) 壁面摩擦系数

图 C.3.3



(a) 表面压力

(b) 壁面摩擦系数

（回流区内未侧出 C_f）

图 C.3.4

当计算比较复杂流场时用直角坐标不方便，此时可以采用曲线坐标，于是方程可改写为

$$\frac{\partial U'}{\partial t} + \frac{\partial F'}{\partial \xi} + \frac{\partial G'}{\partial \eta} + \frac{\partial H'}{\partial \zeta} = R' \tag{C.3.1.20}$$

然后再采用上面的方法。当然也可以采用单元积分的方法，即所谓有限体积的格式，又简称为有限体积法。

若曲线坐标网格已经形成，如图 C. 3. 5 所示(其中的一个网格及其标号)。这里标号记在网格中心。中心为 j, k 的单元面积为

$$
\nabla_{jk}=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_{j,k} & x_{j+1,k} & x_{j+1,k+1} \\ y_{j,k} & y_{j+1,k} & y_{j+1,k+1} \end{vmatrix}\right\| + \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_{j,k} & x_{j+1,k+1} & x_{j,k+1} \\ y_{j,k} & y_{j+1,k+1} & y_{j,k+1} \end{vmatrix}\right\| \tag{C. 3. 1. 21}
$$

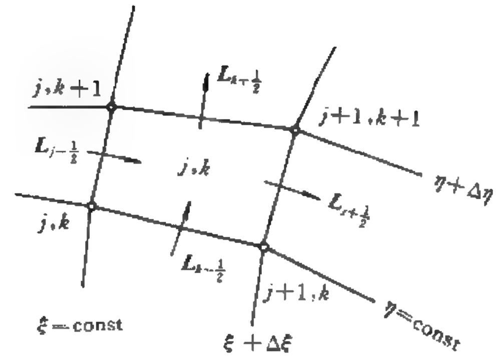


图 C. 3. 5

图 C. 3. 5 中 $\boldsymbol{L}$ 分别是所在边的法向。若设

$$
\boldsymbol{L}=L_x \boldsymbol{i}_x+L_y \boldsymbol{i}_y \tag{C. 3. 1. 22}
$$

$\boldsymbol{L}$ 的大小如表 C. 3. 1 所示。

表 C. 3. 1

	L_x	L_y
$L_{j+\frac{1}{2}}$	$y_{j+1,k+1}-y_{j+1,k}$	$-(x_{j+1,k+1}-x_{j+1,k})$
$L_{j-\frac{1}{2}}$	$y_{j,k+1}-y_{j,k}$	$-(x_{j,k+1}-x_{j,k})$
$L_{k+\frac{1}{2}}$	$-(y_{j+1,k+1}-y_{j,k+1})$	$x_{j+1,k+1}-x_{j,k+1}$
$L_{k-\frac{1}{2}}$	$-(y_{j+1,k}-y_{j,k})$	$x_{j+1,k}-x_{j,k}$

另外记

$$
U_{j,k}=\frac{1}{\nabla_{j,k}}\int_{\nabla_{j,k}} U \mathrm{d}v \tag{C. 3. 1. 23}
$$

$\nabla_{j,k}$为包围 j, k 点的网格单元的面积。于是有

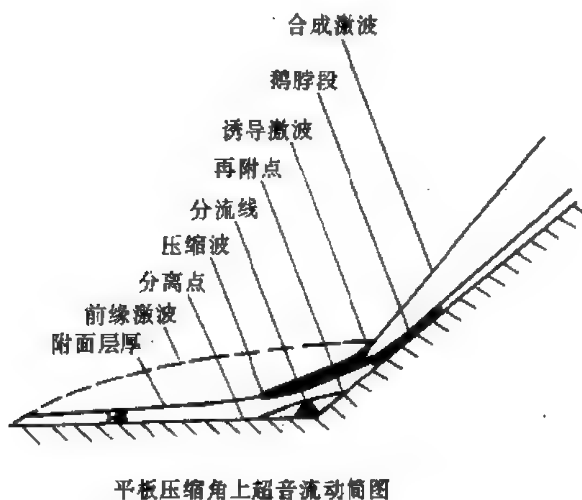
$$
\frac{\partial U_{j,k}}{\partial t}=-\frac{1}{\nabla_{j,k}}\int_{L_{j,k}} \boldsymbol{p}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}, \qquad \boldsymbol{p}=F\boldsymbol{i}_x+G\boldsymbol{i}_y \tag{C. 3. 1. 24}
$$

写出其二步格式为

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{U_{j,k}^{n+1}} &= U_{j,k}^{n}-\frac{\Delta t}{\nabla_{j,k}}\Big[(\boldsymbol{p}_{j+1,k}\cdot \boldsymbol{L}_{j+\frac{1}{2}})-(\boldsymbol{p}_{j,k}\cdot \boldsymbol{L}_{j-\frac{1}{2}}) \\
&\quad +(\boldsymbol{p}_{j,k+1}\cdot \boldsymbol{L}_{k+\frac{1}{2}})-(\boldsymbol{p}_{j,k}\cdot \boldsymbol{L}_{k-\frac{1}{2}})\Big] \\
\overline{\overline{U_{j,k}^{n+1}}} &= \overline{U_{j,k}^{n+1}}-\frac{\Delta t}{\nabla_{j,k}}\Big[(\overline{\boldsymbol{p}_{j,k}^{n+1}}\cdot \boldsymbol{L}_{j+\frac{1}{2}})-(\boldsymbol{p}_{j-1,k}\cdot \boldsymbol{L}_{j-\frac{1}{2}}) \\
&\quad +(\overline{\boldsymbol{p}_{j,k}^{n+1}}\cdot \boldsymbol{L}_{k+\frac{1}{2}})-(\boldsymbol{p}_{j,k-1}\cdot \boldsymbol{L}_{k-\frac{1}{2}})\Big] \\
U_{j,k}^{n+1} &= \frac{1}{2}\left(U_{j,k}^{n}+\overline{\overline{U_{j,k}^{n+1}}}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{C. 3. 1. 25}
$$

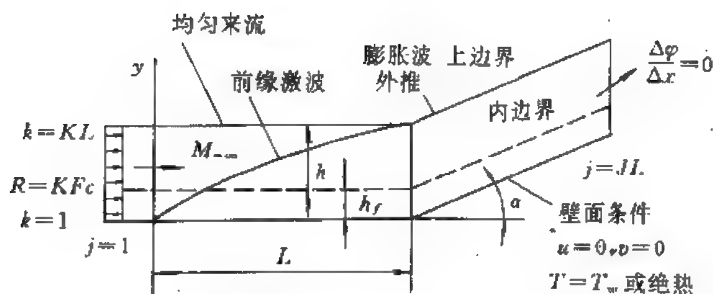
下面以超声速对凹角流动的计算为例来说明具体的实施方法。

凹角流动的流动简图如图 C. 3. 6 所示。由于气流在流向凹角时压力不断上升，壁面的边界层不断变厚，而且由于逆压梯度的作用而产生分离流动。在楔面上又再附壁，在外流的作用下再附壁点以后的一段边界层变薄，形成所谓鹅脖段；以后又不断变厚向下游流去。由于回流区的存在，直接解 N-S 方程是比较合适的。图 C. 3. 7 表示了求解域的简图。



平板压缩角上超音流动简图

图 C. 3. 6



求解域及其边界

图 C. 3. 7

来流 $M_{-\infty}$，T_∞，$u=u_{-\infty}$，$v=0$

计算的边界条件和前面相同，壁面上的压力条件仍可近似认为

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_w = 0$$

另外壁面的温度已知或$\frac{\partial T}{\partial n}$已知。有时计算中希望用密度 ρ，则由

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

来得到。

用上述条件和有限体积的 MacCormack 格式可以对下面两个例子进行计算：

（1）$M_\infty=3$，$T_\infty=216.5$ K，$Re_L=1.68\times10^4$，$\alpha=10°$，$L=61$ mm。

x 方向等距网格 86 个，y 方向 28 个网格，其中细网格 15 个，粗网格 13 个，粗网区看作无粘区。

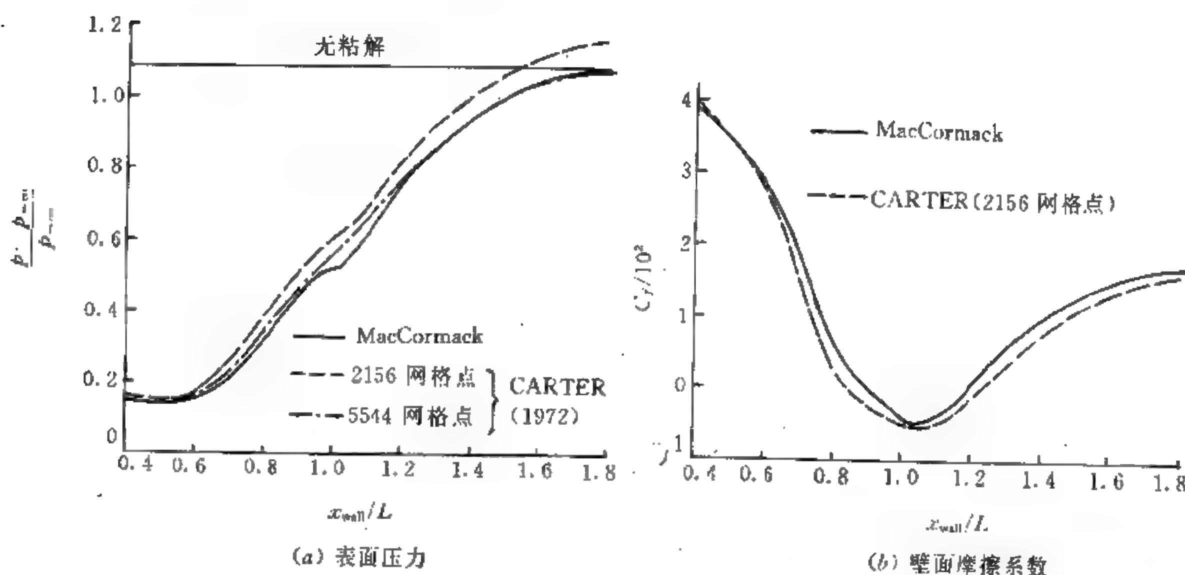
（2）$M_\infty=14.1$，$T_\infty=130$ K，$L=440$ mm，$Re_L=1.04\times10^5$，壁面绝热温度$=T_\infty+\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Pr^{\frac{1}{2}}M_\infty^2\right)=4530$ K，壁面冷却温度为 0.118K 壁面绝热温度，$Pr=0.72$，$\alpha=18°$。

求解区：$x/L=-0.769\sim1.8587$，细网格的总高度$=29.4$ mm，求解域的总高度$=84.4$ mm。

x 方向取 90 点，y 方向细网格 50 个点，粗网格 10 个点。$\Delta t\sim1.17\times10^{-5}$s。细网格计算 m 次为 10 次，计算 200 个时间步长可达定常。

在 CDC7600 机上计算，第 1 例需时 12 分钟；第 2 例为 32 分钟。需要说明的是，MacCromack 显式格式是成功的，并获得广泛应用；其后提出的隐式格式，计算表明效果并不佳，限于篇幅，这里不作更细致的介绍。

计算结果如图 C.3.8 至 C.3.15 所示。其中图 C.3.8—10 表示壁面压力和摩擦系数，其压缩角 α 分别为 10°，15°和 18°。



(a) 表面压力　　(b) 壁面摩擦系数

图 C.3.8

$M_{-\infty}=3.0$　$Re_L=1.68\times10^4$　$\alpha=10°$

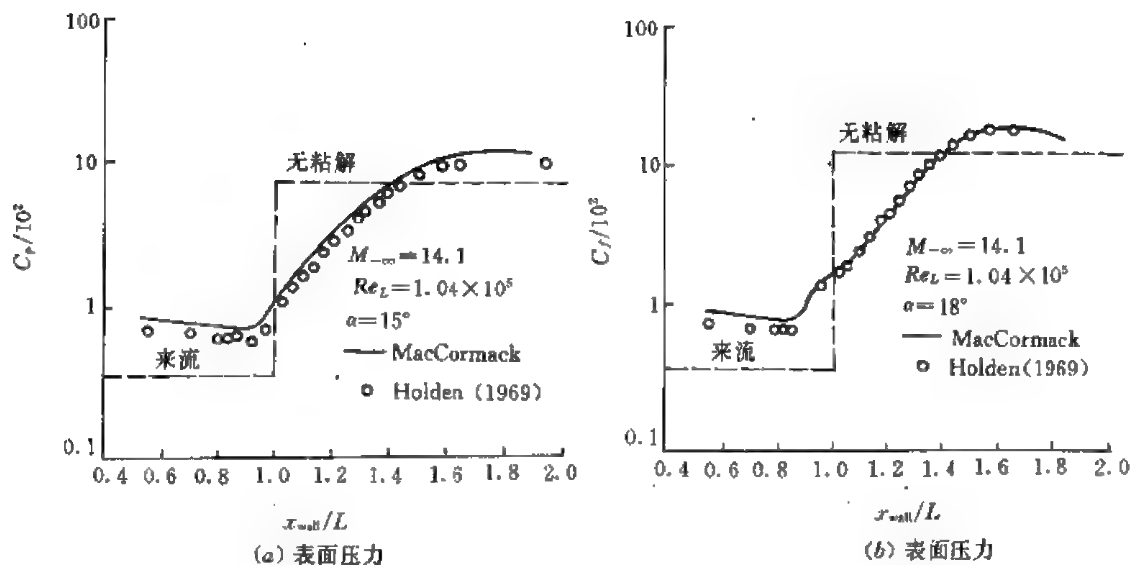
图 C.3.11 表示了前缘激波和诱导激波交点下游 3 个位置上的压力分布。

图 C.3.12 表示了跨越附面层和滑流层的速度、温度和密度分布。

图 C.3.13 表示沿压缩角（$\alpha=24°$）壁面的压力和摩擦系数。

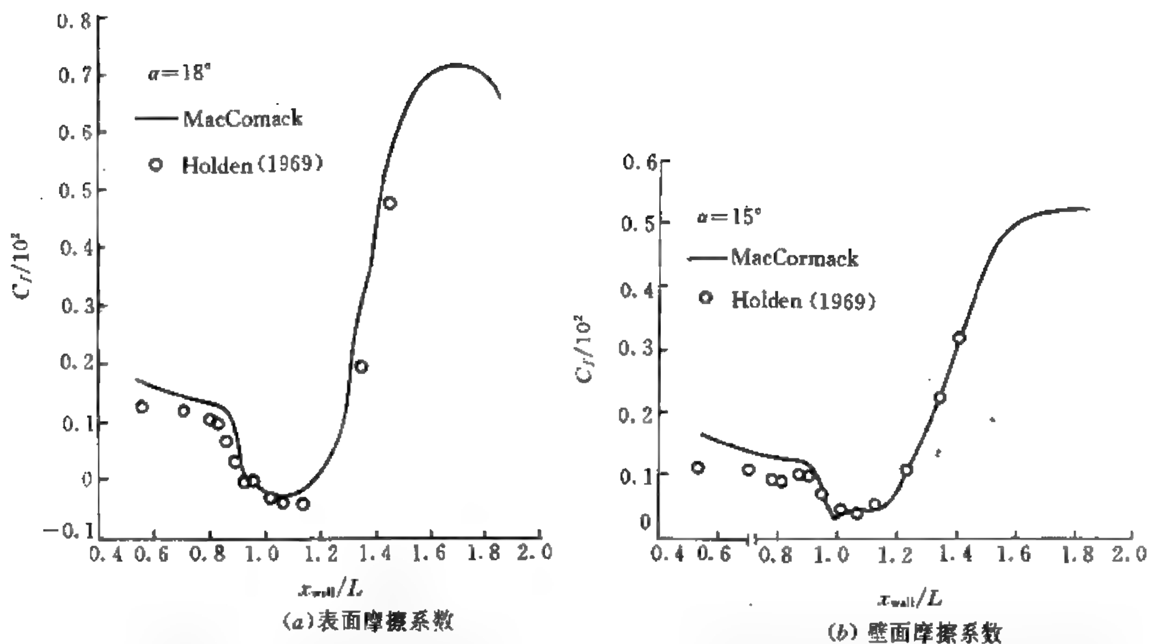
图 C.3.14 表示了压缩角为 15°，18°，24°情况下等压线的分布。

图 C.3.15 则表示了在压缩角 $\alpha=18°$情况下跨越附面层的压力和速度 u 的变化。



(a) 表面压力　　(b) 表面压力

图 C.3.9



(a)表面摩擦系数　　(b) 壁面摩擦系数

沿着压缩角($\alpha=15°$)壁面的压力和摩擦系数　　沿着压缩角($\alpha=15°$)壁面的压力和摩擦系数

图 C.3.10

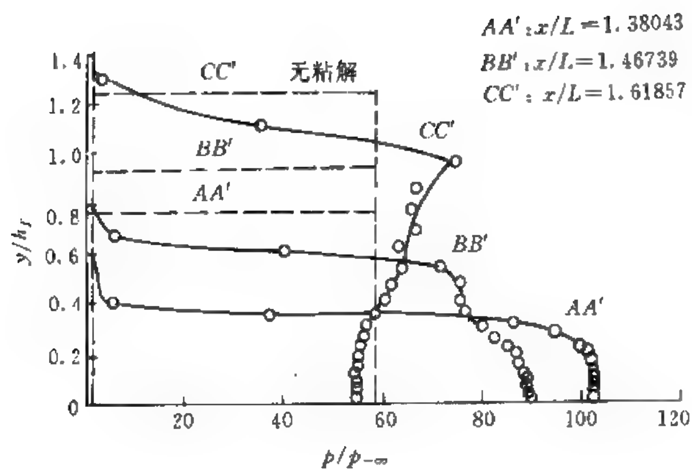


图 C.3.11

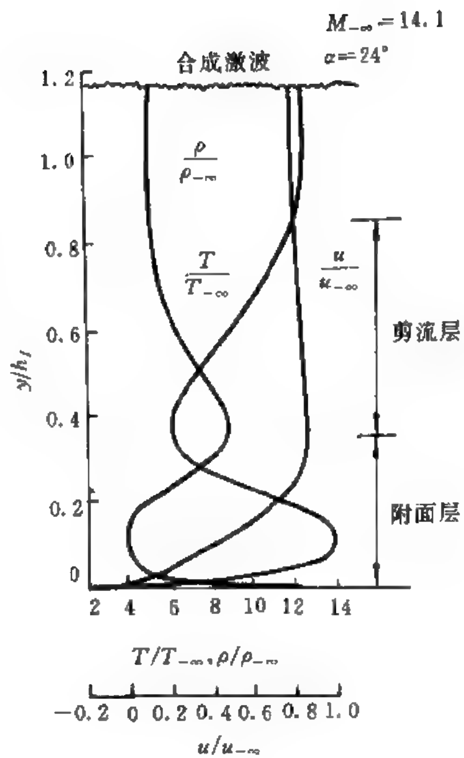


图 C.3.12

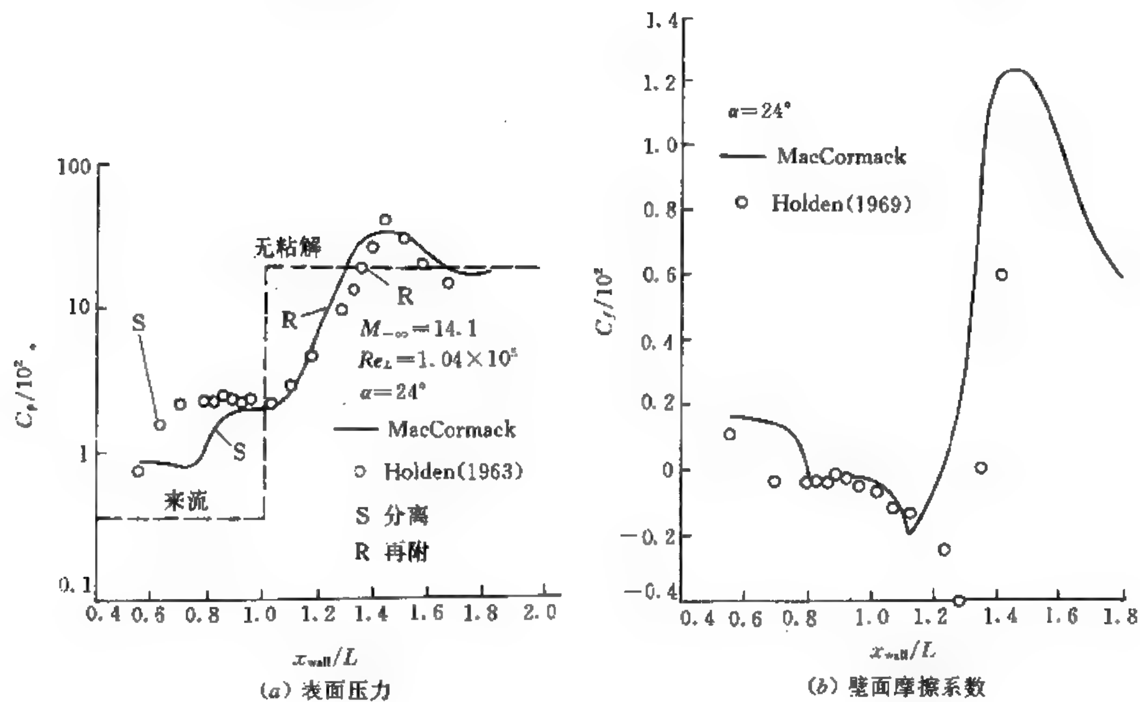


图 C.3.13

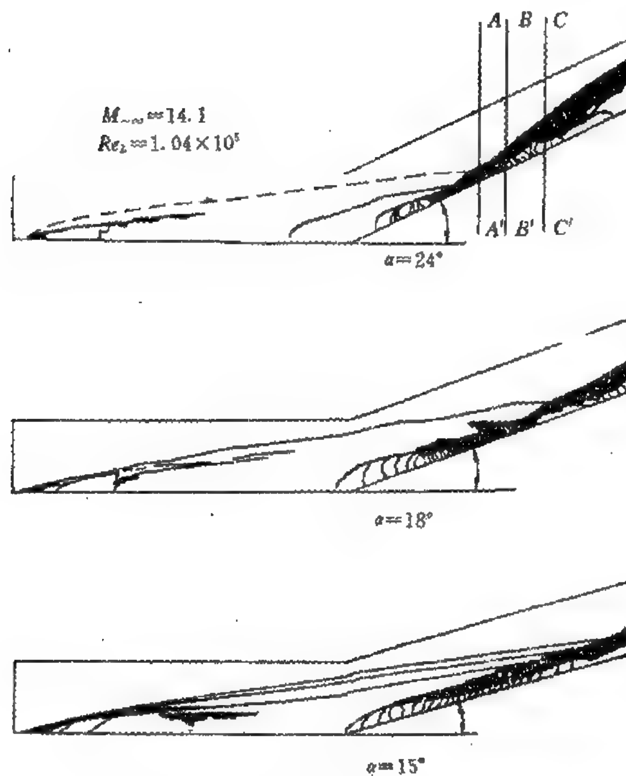
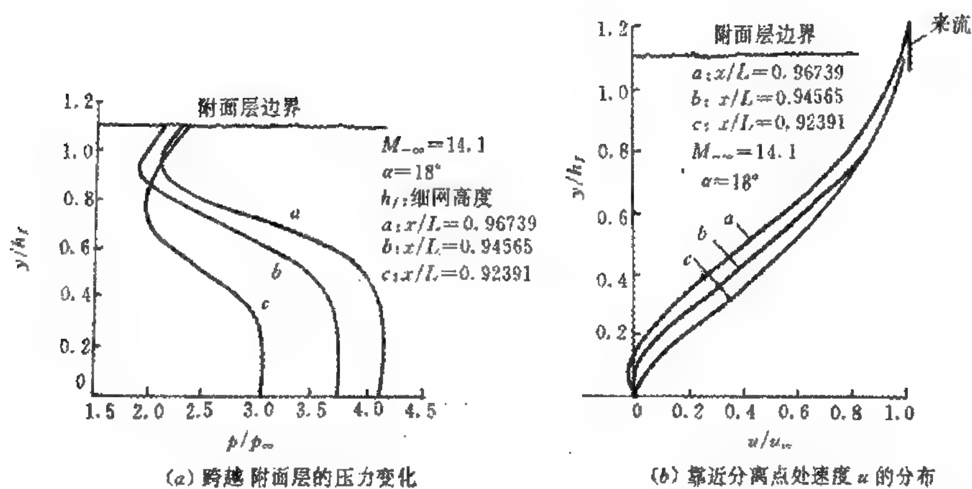


图 C.3.14



(a) 跨越附面层的压力变化

(b) 靠近分离点处速度 u 的分布

图 C.3.15

3.2 可压缩粘性流体流动数值计算的 Beam-Warming 隐式格式

Beam-Warming 的格式已经为大家所熟悉，在上一章关于 Euler 方程的求解中已经讨论过了。对于有粘性的情况可以将它推广，下面就详细讨论这个问题。

由于可压缩粘性流体运动方程的散度形式与无粘性可压缩流动的方程相同，都可以写为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}=0 \tag{C.3.2.1}$$

所以基本的作法是相同的。在曲线坐标下方程可改写为

$$\frac{\partial U'}{\partial t}+\frac{\partial F'}{\partial \xi}+\frac{\partial G'}{\partial \eta}+\frac{\partial H'}{\partial \zeta}=0 \tag{C.3.2.2}$$

为简单起见，这里只讨论二维问题，另外将符号一撇省略，于是方程可简写为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{\partial G}{\partial \eta}=0 \tag{C.3.2.3}$$

其中有

$$\left.\begin{aligned} F&=F_U+F_V=AU+M_{F\xi}U_\xi+M_{F\eta}U_\eta\\ G&=G_U-G_V=BU+M_{G\xi}U_\xi+M_{G\eta}U_\eta\end{aligned}\right\} \tag{C.3.2.4}$$

这里 $M_{F\xi}$等量见本章附录。

由于

$$\begin{aligned}\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t}&=\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^{n+\frac{1}{2}}+O(\Delta t^2)\\ &=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^n+\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^{n+1}\right]+O(\Delta t^2)\end{aligned} \tag{C.3.2.5}$$

将 (C.3.2.3) 代入 (C.3.2.5) 式可得

$$U^{n+1}=U^n-\frac{\Delta t}{2}\left[\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^n+\left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)^n\right\}+\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^{n+1}+\left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)^{n+1}\right\}\right]+O(\Delta t^2) \tag{C.3.2.6}$$

记 $F^{n+1}-F^n=\Delta F^n,\qquad G^{n+1}-G^n=\Delta G^n$

计及台劳公式有

$$\left.\begin{aligned}\Delta F^n&=\frac{\partial F}{\partial U}\Delta U^n+\frac{\partial F}{\partial U_\xi}\Delta U_\xi^n+\frac{\partial F}{\partial U_\eta}\Delta U_\eta^n\\ &=A\Delta U^n+M_{F\xi}\Delta U_\xi^n+M_{F\eta}\Delta U_\eta^n\\ \Delta G^n&=\frac{\partial G}{\partial U}\Delta U^n+\frac{\partial G}{\partial U_\xi}\Delta U_\xi^n+\frac{\partial G}{\partial U_\eta}\Delta U_\eta^n\\ &=B\Delta U^n+M_{G\xi}\Delta U_\xi^n+M_{G\eta}\Delta U_\eta^n\end{aligned}\right\} \tag{C.3.2.7}$$

将它们代入 (C.3.2.6) 式得

$$U^{n+1}=U^n-\Delta t\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^n+\left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)^n\right]-\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(A+M_{F\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}+M_{F\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(B+M_{G\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}+M_{G\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\Big\}\Delta U^n+O(\Delta t^2) \quad \text{(C. 3. 2. 8)}$$

上式可进一步改写为

$$\left\{I+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(A+M_{F\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}+M_{F\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(B+M_{G\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}+M_{G\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right\}\Delta U^n$$
$$=-\Delta t\left[\left(\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)^n+\left(\frac{\partial G}{\partial\eta}\right)^n\right]+O(\Delta t^2) \quad \text{(C. 3. 2. 9)}$$

或因式分解为（略去高阶小量）

$$\left\{I+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(A+M_{F\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}+M_{F\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right\}\cdot\left\{I+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(B+M_{G\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}+M_{G\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right\}\Delta U^n$$
$$=-\Delta t\left[\left(\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)^n+\left(\frac{\partial G}{\partial\eta}\right)^n\right] \quad \text{(C. 3. 2. 10)}$$

以上方法的缺点是其中包含交错导数运算，很不方便，所以另一个方法是将（C. 3. 2. 9）式改写为

$$\left\{I+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(A+M_{F\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(B+M_{G\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right\}\Delta U^n$$
$$=-\Delta t\left[\left(\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)^n+\left(\frac{\partial G}{\partial\eta}\right)^n\right]-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(M_{F\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\Delta U^n-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(M_{G\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\Delta U^n+O(\Delta t^2)$$
$$\text{(C. 3. 2. 11)}$$

由于 $\Delta U^n=\Delta U^{n-1}+\frac{\partial\Delta U^n}{\partial t}\Delta t+\cdots=\Delta U^{n-1}+O(\Delta t^2)$

代入（C. 3. 2. 11）式可得

$$\left\{I+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(A+M_{F\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(B+M_{G\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right\}\Delta U^n$$
$$=-\Delta t\left[\left(\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)^n+\left(\frac{\partial G}{\partial\eta}\right)^n\right]-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(M_{F\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\Delta U^{n-1}-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(M_{G\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\Delta U^{n-1}+O(\Delta t^2)$$
$$\text{(C. 3. 2. 12)}$$

进一步因式分解再略去高阶小量可得

$$\left\{I+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(A+M_{F\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right\}\left\{I+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(B+M_{G\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right\}\Delta U^n$$
$$=-\Delta t\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial\xi}\right)^n+\left(\frac{\partial G}{\partial\eta}\right)^n\right\}-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(M_{F\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\Delta U^{n-1}-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(M_{G\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\Delta U^{n-1}$$
$$\overset{\text{记作}}{=\!=\!=}H^n\Delta t \quad \text{(C. 3. 2. 13)}$$

于是得 Beam-Warming 格式

$$
\left.\begin{aligned}
&\left[I+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(A+M_{F\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right]\Delta U^{*}=H^{n}\Delta t\\
&\left[I+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(B+M_{G\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right]\Delta U^{n}=\Delta U^{*}\\
&U^{n+1}=U^{n}+\Delta U^{n}
\end{aligned}\right\}\qquad(C.3.2.14)
$$

应当指出，A，B，$M_{F\xi}$，$M_{F\eta}$，$M_{G\xi}$，$M_{G\eta}$都已分别在（附—29）（附—52—54）中加以说明。对于曲线坐标，则都需作坐标变换。A，B 应变为$\overline{A}$，$\overline{B}$，由（附—46）式给出计算方法；$M_{F\xi}$等应分别改为 $M_{F\xi}$等，其计算方法见（附—56）式。

（C.3.2.14）式用中心差分方法离散化，第 1 步写为

$$
\begin{aligned}
&\Delta U_{j,k}^{*}+\frac{\Delta t}{2}\frac{1}{2\Delta\xi}\left(A_{j+1,k}^{n}\Delta U_{j+1,k}^{*}-A_{j-1,k}^{n}\Delta U_{j-1,k}^{*}\right)\\
&+\frac{\Delta t}{2}\frac{1}{\Delta\xi}\left[M_{F\xi_{j+\frac{1}{2},k}}^{n}\frac{\Delta U_{j+1,k}^{*}-\Delta U_{j,k}^{*}}{\Delta\xi}-M_{F\xi_{j-\frac{1}{2},k}}^{n}\frac{\Delta U_{j,k}^{*}-\Delta U_{j-1,k}^{*}}{\Delta\xi}\right]\\
&=H_{j,k}^{n}\Delta t
\end{aligned}\qquad(C.3.2.15)
$$

或整理后可得

$$
E_{j,k}^{W}\Delta U_{j-1,k}^{*}+E_{j,k}^{P}\Delta U_{j,k}^{*}+E_{j,k}^{E}\Delta U_{j+1,k}^{*}=H_{j,k}^{n}\Delta t\qquad(C.3.2.16)
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&E_{j,k}^{W}=-\frac{\Delta t}{4\Delta\xi}A_{j-1,k}^{n}+\frac{\Delta t}{2\Delta\xi^{2}}M_{F\xi_{j-\frac{1}{2},k}}^{n}\\
&E_{j,k}^{P}=1-\frac{\Delta t}{2\Delta\xi^{2}}\left[M_{F\xi_{j+\frac{1}{2},k}}^{n}+M_{F\xi_{j-\frac{1}{2},k}}^{n}\right]=1-\frac{\Delta t}{\Delta\xi^{2}}M_{F_{\xi_{j,k}}}^{n}\\
&E_{j,k}^{E}=\frac{\Delta t}{4\Delta\xi}A_{j+1,k}^{n}+\frac{\Delta t}{2\Delta\xi^{2}}M_{F\xi_{j+\frac{1}{2},k}}^{n}
\end{aligned}\right\}\qquad(C.3.2.17)
$$

这是一个沿 η=常数（即 k=常数）的坐标线上的 3 个对角块块阵，求解比较方便。对于二维问题，E 是 4×4 的方程，$\Delta U_{j,k}^{*}$是 4 元素列向量。对于（C.3.2.14）式的第 2 式也可以得到类似的方程：

$$
\widetilde{E_{j,k}^{S}}\,\Delta U_{j,k-1}^{n}+\widetilde{E_{j,k}^{P}}\,\Delta U_{j,k}^{n}+\widetilde{E_{j,k}^{N}}\,\Delta U_{j,k+1}^{n}=\Delta U_{j,k}^{*}\qquad(C.3.2.18)
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&\widetilde{E_{j,k}^{S}}=-\frac{\Delta t}{4\Delta\eta}B_{j,k-1}^{n}+\frac{\Delta t}{2\Delta\eta^{2}}M_{G\eta_{j,k-\frac{1}{2}}}^{n}\\
&\widetilde{E_{j,k}^{P}}=1-\frac{\Delta t}{\eta^{2}}M_{G\eta_{j,k}}^{n}\\
&\widetilde{E_{j,k}^{N}}=\frac{\Delta t}{4\Delta\eta}B_{j,k+1}^{n}+\frac{\Delta t}{2\Delta\eta^{2}}M_{G\eta_{j,k+\frac{1}{2}}}^{n}
\end{aligned}\right\}\qquad(C.3.2.19)
$$

同样这是一个沿 ξ=常数（即 j=常数）的坐标线上的 3 个对角块块阵。

下面的问题是边界条件。设下面讨论的仍是上一节中如图 C.3.2 或图 C.3.7 所示的求解域。

对于进口或上边界，给定 U 值，则其上 ΔU^{n} 是已知的。如果给出的条件是定常的，则 $\Delta U^{n}=0$，设进口为 $j=1$，则

$$\Delta U^n_{1,k} = 0 \tag{C. 3. 2. 20}$$

上边界　$k=K$，则 $\Delta U^n_{j,K}=0$　(C. 3. 2. 21)

出口处，一般认为守恒变量沿 ξ 方向不变，即

$$U^n_{J-1,k} = U^n_{J,k}, \quad U^{n+1}_{J-1,k} = U^{n+1}_{J,k} \tag{C. 3. 2. 22}$$

两式相减得

$$\Delta U^n_{J-1,k} = \Delta U^n_{J,k} \tag{C. 3. 2. 23}$$

壁面上　　$u=v=0$

在其上设 $k=1$，则有

$$U_{j,1} = \{\rho_{j,1}, \quad 0, \quad 0, \quad (\rho E_s)_{j,1}\} \tag{C. 3. 2. 24}$$

或由此得到

$$\Delta U^n_{j,1} = \{\Delta\rho^n_{j,1}, \quad 0, \quad 0, \quad \Delta(\rho E_s)_{j,1}\} \tag{C. 3. 2. 25}$$

因为由（附—6）式得

$$\begin{aligned}\Delta\rho E_s &= E_s\Delta\rho + \rho\Delta E_s = E_s\Delta\rho + \rho(\Delta e + u\Delta u + v\Delta v)\\ &= (e\Delta\rho + \rho\Delta e) + \frac{u^2+v^2}{2}\Delta\rho + \rho u\Delta u + \rho v\Delta v\\ &= \Delta(\rho e) + \frac{u^2+v^2}{2}\Delta\rho + \rho u\Delta u + \rho v\Delta v\\ &= \frac{1}{\gamma-1}\Delta p + \frac{u^2+v^2}{2}\Delta\rho + \rho u\Delta u + \rho v\Delta v\end{aligned} \tag{C. 3. 2. 26}$$

上式亦可写成

$$\Delta\rho E_s = \frac{R}{\gamma-1}(T\Delta\rho + \rho\Delta T) + \frac{u^2+v^2}{2}\Delta\rho + \rho u\Delta u + \rho v\Delta v$$

所以如果在壁面上给定温度，则 $\Delta T^n_w=0$，如果给出$\frac{\partial T}{\partial n}$为定常值，则

$$\Delta T^n_{j,1} = \Delta T^n_{j,2} \tag{C. 3. 2. 27}$$

下面的问题是给出 $\Delta\rho$，对于 ρ，物理上虽不必给出条件，但具体计算时必须给出相应的条件。这种条件叫做计算边界条件，它要由方程或热力学关系及其物理边界条件给出。

一般说壁面上由于 $u=v=0$，故可得到

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \eta}\right|_w = \nu f, \quad f\text{ 与}\frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta}\text{ 等有关。}$$

在 $\nu\to0$（即雷诺数很高时），可近似取

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \eta}\right|_w = 0 \tag{C. 3. 2. 28}$$

取一阶格式

$p_{j,1}=p_{j,2}$，由此得

$$\Delta p^n_{j,1} = \Delta p^n_{j,2} \tag{C. 3. 2. 29}$$

这样做无疑会使精度下降，但基于两个原因仍用这一公式。其一，用这个一阶精度公式计算，计算收敛，用二阶格式反而不易收敛；其二，在壁面上网格往往是很小的，所以上述误差影响不会很大。

由于

$$p=(\gamma-1)\rho e \tag{C. 3. 2. 30}$$

故

$$p_{j,1} = (\gamma-1)\rho_{j,1}e_{j,1} = (\gamma-1)\rho_{j,1}E_{s_{j,1}}$$

$$(\text{因 } u_{j,1} = v_{j,1} = 0)$$

$$\left.\begin{aligned} p_{j,2} &= (\gamma-1)\rho_{j,2}e_{j,2} = (\gamma-1)\rho_{j,2}\left[E_{s_{j,2}} - \frac{u_{j,2}^2 + v_{j,2}^2}{2}\right] \\ &= (\gamma-1)\left[U_{4j,2} - \frac{U_{2j,2}^2 + U_{3j,2}^2}{2U_{1j,2}}\right] \end{aligned}\right\} \tag{C.3.2.31}$$

因此在物面上给定温度时，由（C.3.2.26）最后一式并考虑到 $u=v=0$ 及 $\Delta T=0$ 可得

$$\Delta(\rho E_s)_{j,1}^n = \Delta U_{4j,1}^n = \frac{RT_w}{\gamma-1}\Delta\rho_{j,1}^n$$

或

$$\Delta\rho_{j,1}^n = \frac{\gamma-1}{RT_w}\Delta(\rho E_s)_{j,1}^n = \frac{\gamma-1}{RT_w}\Delta U_{4j,1}^n \tag{C.3.2.32}$$

另一方面，由（C.3.2.29）和（C.3.2.3）式可得

$$\begin{aligned} (\gamma-1)\Delta(\rho E_s)_{j,1} &= (\gamma-1)(\rho e)_{j,2} \\ &= (\gamma-1)\Delta\left[U_{4j,2} - \frac{U_{2j,2}^2 + U_{3j,2}^2}{2U_{1j,2}}\right] \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \Delta(\rho E_s)_{j,1}^n &= \Delta U_{4j,2}^n + \frac{\Delta U_{1j,2}^n}{2U_{1j,2}^{n^2}}(U_{2j,2}^{n^2} + U_{3j,2}^{n^2}) \\ &\quad - \frac{1}{U_{1j,2}^n}(U_{2j,2}^n\Delta U_{2j,2}^n + U_{3j,2}^n\Delta U_{3j,2}^n) \end{aligned} \tag{C.3.2.33}$$

或改写为

$$\Delta U_{4j,1}^n = L_1^n\Delta U_{1j,2} + L_2^n\Delta U_{2j,2} + L_3^n\Delta U_{3j,2} + L_4^n\Delta U_{4j,2} \tag{C.3.2.34}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &L_1^n = \frac{1}{2U_{1j,2}^{n^2}}(U_{2j,2}^{n^2} + U_{3j,2}^{n^2}), \\ &L_2^n = -\frac{U_{2j,2}^n}{U_{1j,2}^n}, \qquad L_3^n = -\frac{U_{3j,2}^n}{U_{1j,2}^n}, \\ &L_4^n = 1 \end{aligned}\right\} \tag{C.3.2.35}$$

综合（C.3.2.25），（C.3.2.32）及（C.3.2.34）式可得

$$\Delta U_{j1}^n = \begin{bmatrix} \frac{\gamma-1}{RT_w}L_1^n & \frac{\gamma-1}{RT_w}L_2^n & \frac{\gamma-1}{RT_w}L_3^n & \frac{\gamma-1}{RT_w}L_4^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_1^n & L_2^n & L_3^n & L_4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_{1j,2}^n \\ \Delta U_{2j,2}^n \\ \Delta U_{3j,2}^n \\ \Delta U_{4j,2}^n \end{bmatrix} = K^n\Delta U_{j,2}^n$$

(C.3.2.36)

这样，再把(C. 3. 2. 16)，(C. 3. 2. 18)，(C. 3. 2. 20)，(C. 3. 2. 21)，(C. 3. 2. 23)及(C. 3. 2. 36)诸式综合即得到以下两组代数方程组

$$\begin{bmatrix} I &&&&&& \\ E^W_{2,k} & E^P_{2,k} & E^E_{2,k} &&&& \\ & E^W_{3,k} & E^P_{3,k} & E^E_{3,k} &&& \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& E^W_{I-1,k} & E^P_{I-1,k} & E^E_{I-1,k} \\ &&&&& I & -I \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \Delta U^*_{1,k} \\ \Delta U^*_{2,k} \\ \vdots \\ \Delta U^*_{I-1,k} \\ \Delta U^*_{I,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ H^n_2 \Delta t \\ \vdots \\ H^n_{I-1} \Delta t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(k = 2,3,\cdots,K-1) \tag{C. 3. 2. 37}$$

$$\begin{bmatrix} I & -K^n_b &&&&& \\ E^S_{j,2} & E^P_{j,2} & E^N_{j,2} &&&& \\ & E^S_{j,3} & E^P_{j,3} & E^N_{j,3} &&& \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& E^S_{j,K-1} & E^P_{j,K-1} & E^N_{j,K-1} \\ &&&&&& I \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \Delta U^n_{j,1} \\ \Delta U^n_{j,2} \\ \vdots \\ \Delta U^n_{j,K-1} \\ \Delta U^n_{j,K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta U^*_{j,2} \\ \vdots \\ \Delta U^*_{j,K-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(j = 2,3,\cdots,J-1) \tag{C. 3. 2. 38}$$

可以看出上述隐式格式可以直接计算，不必迭代。这一格式是无条件稳定的并具有二阶精度，而且 Δt 的值比较大，因此这一格式也得到了广泛的应用。不过在计算激波时仍有振荡，所以需要加人工粘性项。具体作法与 (C. 3. 2. 33) 式相似，只是需要在 ξ，η 两个方向都加人工粘性。

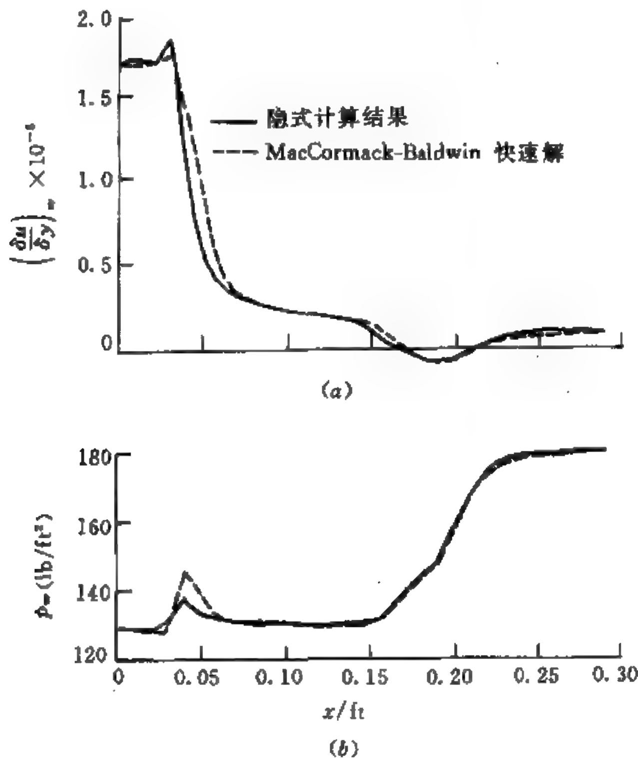


图 C. 3. 16

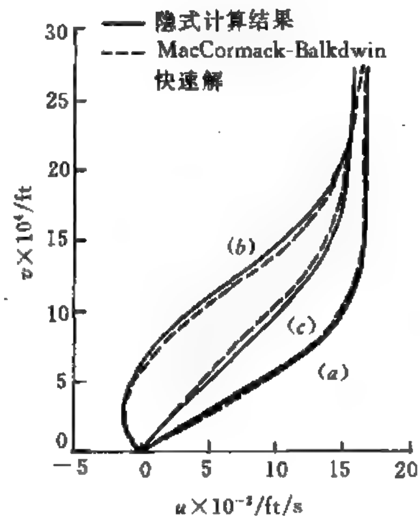


图 C. 3. 17

Beam-Warming 用上述格式求解了激波边界层干扰的流动（见上一节第一例），并与 MacCormack 的一种快速方法作了比较，这里 $M_\infty=2.0$，$Re_L=0.296\times10^6$，$L=49.152$ mm，网格为 32×45，x 方向均匀网格，y 方向细网格，$\Delta y=0.03072$ mm；粗网格用 $\Delta y=1.963008$ mm，细网格 33 个，粗网格 12 个，$\dfrac{(|u|+c)_{max}\Delta t}{\Delta x}\sim17\Delta$。计算 100 次后结果稳定下来，每点每一时间步用 CDC7600 机的计算时间为：无粘时 3.2×10^{-4}s，这种方法计算时间比用 MacCormack 格式进一步缩短，其原因是时间步长增长而步数减少。

正如以前曾指出的，B-W 格式在三维时是不稳定的，必须加很强的人工粘性项，所以在三维情况下它实际上是不能用的。为了使用这种时间分裂的隐式格式，需要作进一步改进，比如将对流项改为迎风差分，时间方向差分改成三点式后向二阶精度的差分格式等，总之还有待于进一步解决。

3.3 可压缩粘性流体流动数值计算的反扩散和 NND 格式

反扩散格式和 NND 格式都是由张涵信提出来的行之有效的差分格式。关于这两个格式的有关问题已经在第 2 章中讨论过了。这里只是具体讨论反扩散格式对具体问题的实施，以及这两个格式对一些具体实例所获得的计算结果。

在第 2 章第 2.3 节中已经给出了 Euler 方程的反扩散格式的具体形式。我们知道，反扩散的显式格式实际上就是 MacCormack 的显式格式。这种显示格式一般在远离壁面的区域采用，在近壁区可以采用隐式格式。

在曲线坐标下，方程可以写作

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{\partial G}{\partial \eta}+\frac{\partial H}{\partial \zeta}=0 \tag{C.3.3.1}$$

这里为简单起见，U'，F'，G'，H'的一撇都省略了。如果采用时间分裂的方法，则有

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial \xi}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial \eta}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial \zeta}=0 \tag{C.3.3.2}$$

这里假定壁面与 ζ 为常数的面相重合，因此比较好的作法是在 ξ，η 两个方向上用显式，而在 ζ 方向上则用隐式，这是因为隐式格式是无条件稳定的，这样即使 $\Delta\zeta$ 比较小（即网格比较细）计算仍可稳定进行。另外 H 可以分解为 H_U+H_V，其中 H_U 只与 U 有关，而 H_V 不只是与 U 有关，还与 U_ξ，U_η 有关，所以可进一步分解为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial H_U}{\partial \zeta}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial H_V}{\partial \zeta}=0 \tag{C.3.3.3}$$

如果记 L 为差分算子，L_ξ 为 ξ 方向的差分算子，L_η 为 η 方向的差分算子，$L^{(E)}$表示显式，$L^{(I)}$表示隐式，时间分裂算子可写为

（1）反扩散格式

$$U^{n+1}=L_\xi^{(E)}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)L_\eta^{(E)}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)L_{\zeta H_U}^{(I)}(\Delta t)L_{\zeta H_V}^{(I)}(\Delta t)L_\eta^{E}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)L_\xi^{(E)}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)U^n \tag{C.3.3.4}$$

其中 $L_\xi^{(E)}L_\eta^{(E)}$ 是二阶显式差分格式，$L_{\zeta H_U}^{(I)}$，$L_{\zeta H_V}^{(I)}$ 是 ζ 方向的方程

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial H_U}{\partial \zeta}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial H_V}{\partial \zeta}=0 \tag{C.3.3.5}$$

的相应隐式差分格式。

（2）NND 格式

$$U^{n+1}=L_{\xi}^{(E)}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)L_{\eta}^{(E)}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)L_{\zeta}^{(E)}(\Delta t)L_{\eta}^{(E)}(\frac{1}{2}\Delta t)L_{\xi}^{E}\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)U^{n} \qquad (C.3.3.6)$$

其中 $L(\Delta t)$ 即为前面讲过的 NND 格式。

下面介绍利用上述方法对一些算例进行的计算。

首先对图 C.3.18 和图 C.3.19 所示的三维和二维的压缩拐角绕流进行了计算。三维拐角关于 $y'=-y_0$ 是对称的，图中只画出了一半，其网格划分亦如该图所示。二维网格的划分则如图 C.3.19 所示。

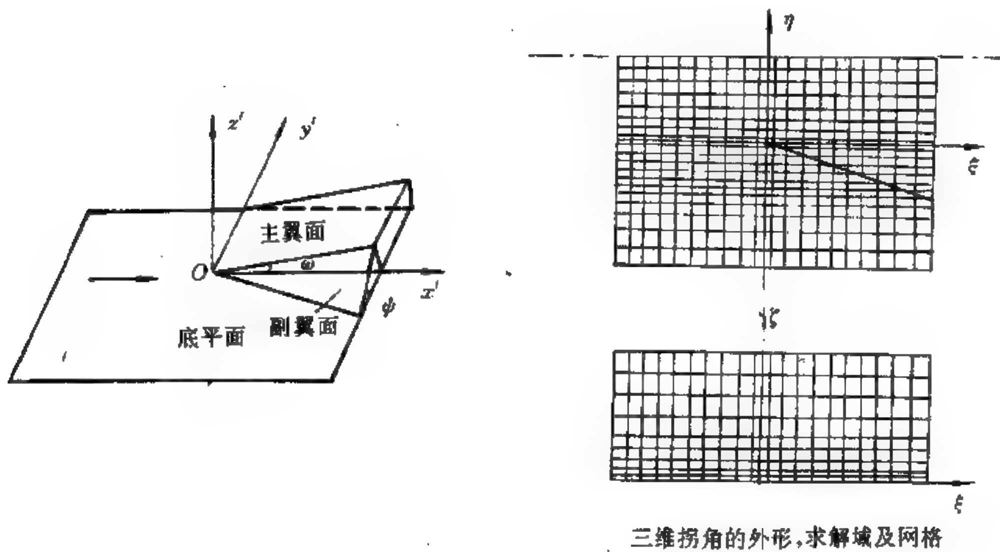


图 C.3.18

三维拐角的外形，求解域及网格

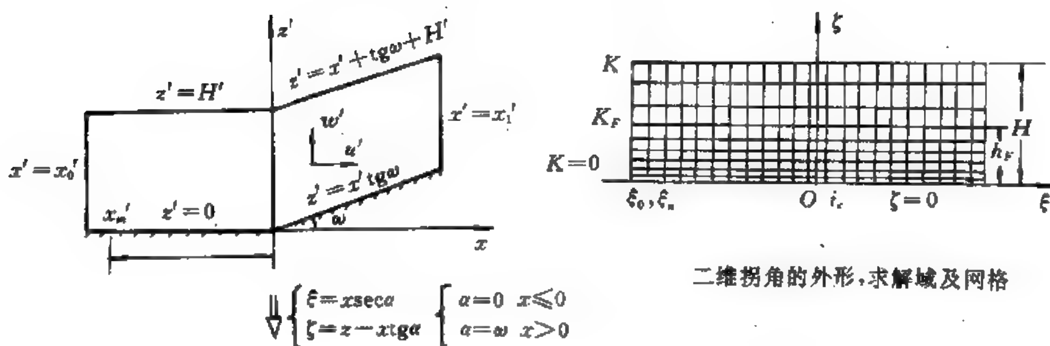


图 C.3.19

二维拐角的外形，求解域及网格

对于二维情况，作如下的坐标变换：

$$\xi = \begin{cases} x \\ x/\cos\omega \end{cases}, \qquad \zeta = \begin{cases} z, & x < 0 \\ z - x\mathrm{tg}\omega, & x > 0 \end{cases} \tag{C. 3. 3. 7}$$

其中 ω 为楔角。

三维情况下的坐标变换为

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = z - f_0(x, y)$$

其中

$$f_0(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \text{ 或 } x \geqslant 0 \text{ 及 } y < -x\mathrm{tg}\varphi \\ x\mathrm{tg}\omega & x > c \text{ 且 } y > c \\ x\mathrm{tg}\omega + y\mathrm{tg}\psi & x > 0 \text{ 且 } -x\mathrm{tg}\varphi \leqslant y \leqslant 0 \end{cases} \tag{C. 3. 3. 8}$$

其中 $\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\omega/\mathrm{tg}\psi$，$\omega$，$\psi$ 的意义如图 C. 3. 18 所示。

求解域边界条件的提法与第 1、第 2 节中的作法是一致的，只是对称面上增加一个对称条件，即

$$\left.\frac{\partial}{\partial \eta}\right|_{\text{对称面}} = 0 \tag{C. 3. 3. 9}$$

进口的速度分布近似地取二维流的入流剖面，因此入流的条件均已知。在出口边界面上，主翼面上认为沿 ξ 方向流动变化不大，故 $\left.\frac{\partial}{\partial \xi}\right|_{\text{出口}} = 0$；在副翼面和底板上，认为流动具有锥型特性，即气流沿 0 点（见图 C. 3. 18）发出的射线上物理量分别相等，左侧边界上设 $\frac{\partial}{\partial \eta} = 0$，在上边界上设 $\frac{\partial}{\partial \zeta} = 0$，对于二维情况前面已作了介绍。

利用以上的坐标变换，再考虑到方程（C. 3. 1. 18）可以证明 L_ξ，L_η，L_ζ 的稳定条件分别为

$$\left.\begin{aligned} \Delta t_\xi &= \min \frac{\Delta \xi}{|u_1| + c + \frac{\mu}{\rho Re_L}\left(\frac{A_\xi}{\Delta_\xi} + \frac{B_\xi}{\Delta_\zeta} + \frac{C_\xi}{\Delta_\eta}\right)} \\ \Delta t_\eta &= \min \frac{\Delta \eta}{|v_1| + c + \frac{\mu}{\rho Re_L}\left(\frac{A_\eta}{\Delta_\eta} + \frac{B_\eta}{\Delta_\xi} + \frac{C_\eta}{\Delta_\zeta}\right)} \\ \Delta t_\zeta &= \min \frac{\Delta \zeta}{|w_1| + c + \frac{\mu}{\rho Re_L}\left(\frac{A_\zeta}{\Delta_\zeta} + \frac{B_\zeta}{\Delta_\xi} + \frac{C_\zeta}{\Delta_\eta}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{C. 3. 3. 10}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} & A_\xi = A_\eta = \frac{2\gamma}{Pr}, \quad B_\xi = B_\eta = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ & C_\xi = \frac{2}{3}\mathrm{tg}\omega + \sqrt{\frac{2}{3}\sec^2\psi - \frac{1}{36}\mathrm{tg}^2\omega} \\ & C_\eta = \max\left[\frac{\gamma}{Pr}\mathrm{tg}\psi\sqrt{\frac{2}{3}}\sec\omega, \quad \left|\frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}\mathrm{tg}\psi + \sqrt{\frac{2}{3}\sec^2\omega - \frac{1}{36}\mathrm{tg}^2\psi}\right|\right] \\ & A_\zeta = \frac{2\gamma}{Pr}, \quad B_\zeta = \left[\frac{25}{18}f_x^2 + \frac{2}{3}(1 + f_y^2)\right]^{\frac{1}{2}} \\ & C_\zeta = \left[\frac{25}{18}f_y^2 + \frac{2}{3}(1 + f_x^2)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda = -\frac{2}{3}\mu \end{aligned}\right\} \tag{C. 3. 3. 11}$$

一般ζ方向网格比较密，如果全用显式格式，Δt_ζ就很小，所以ζ方向用隐式格式，故无条件稳定，因此

$$\frac{1}{2}\Delta t = \min(\Delta t_\xi, \Delta t_\eta)$$

图 C.3.20—23 给出了计算结果和实验的比较。

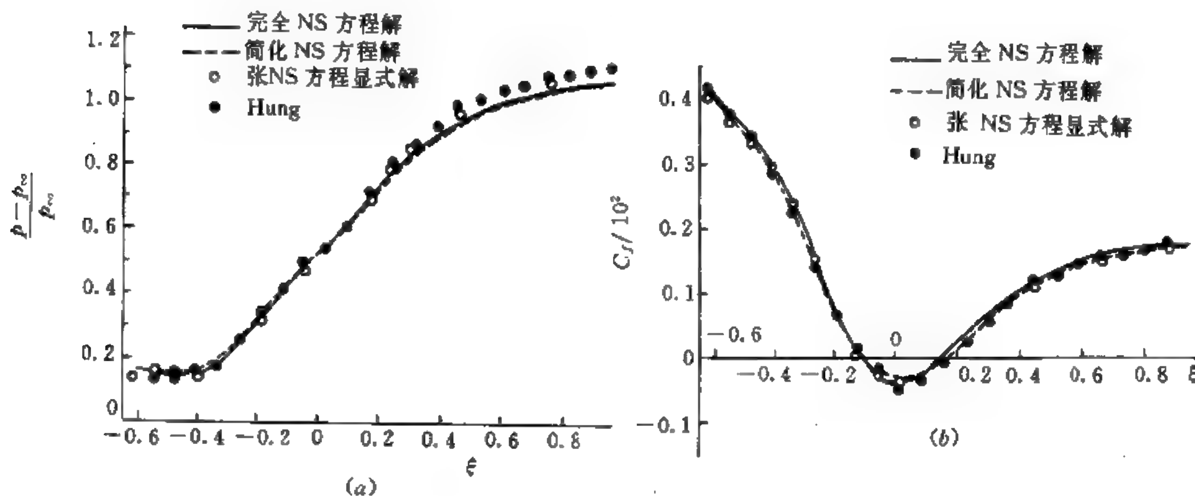


图 C.3.20

(a) $M_\infty=3$，二维压缩拐角层流情况下的表面压力分布，
$Re_L=1.68\times10^4$，$\omega=10°$，$T'_\infty=216.65$ K，$T'_w=606.62$ K。

(b) $M_\infty=3$，二维压缩拐角层流情况下的表面摩阻分布，
$Re_L=1.68\times10^4$，$\omega=10°$，$T'_\infty=216.65$ K，$T'_w=606.62$ K。

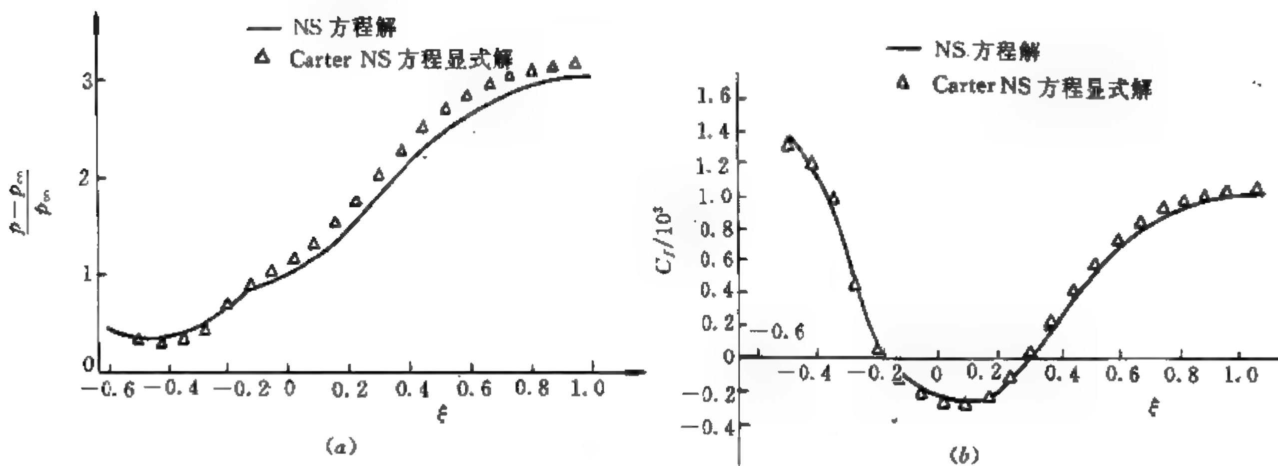
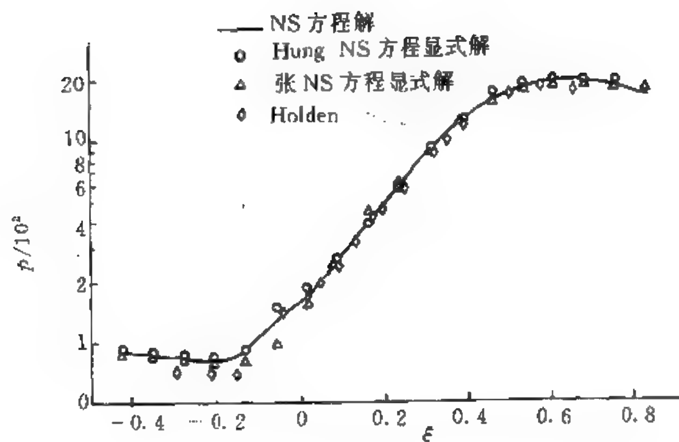


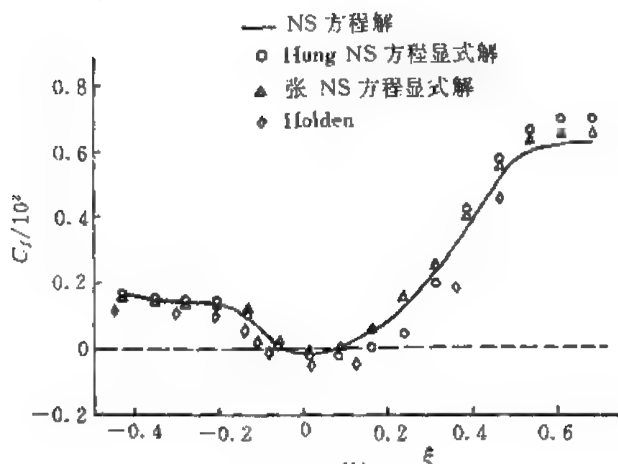
图 C.3.21

(a) $M_\infty=6.06$，二维拐角层流情况下，表面压力分布，
$Re_L=1.5\times10^5$，$\omega=10.25°$，$T'_\infty=48.889$ K，绝热壁。

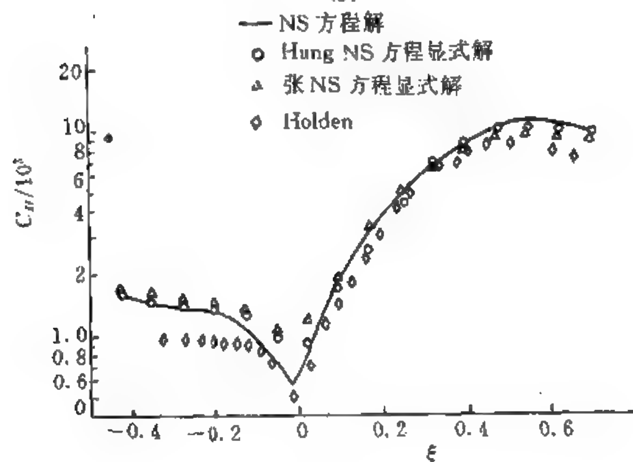
(b) $M_\infty=6.06$，二维拐角层流情况下表面摩阻分布，
$Re_L=1.5\times10^5$，$\omega=10.25°$，$T'_\infty=48.889$ K，绝热壁。



(a)



(b)



(c)

图 C.3.22

(a) $M_\infty=14.1$，二维拐角层流情况下表面压力分布，
$Re_{\bar{L}}=1.04\times10^5$，$\omega=18°$，$T'_\infty=72.222$ K，$T'_w=297.22$ K。

(b) $M_\infty=14.1$，二维拐角层流情况下表面摩阻分布，
$Re_{\bar{L}}=1.04\times10^5$，$\omega=18°$，$T'_\infty=72.222$ K，$T'_w=297.22$ K。

(c) $M_\infty=14.1$，二维拐角层流情况下表面热流分布，
$Re_{\bar{L}}=1.04\times10^5$，$\omega=18°$，$T'_\infty=72.222$ K，$T'_w=297.22$ K。

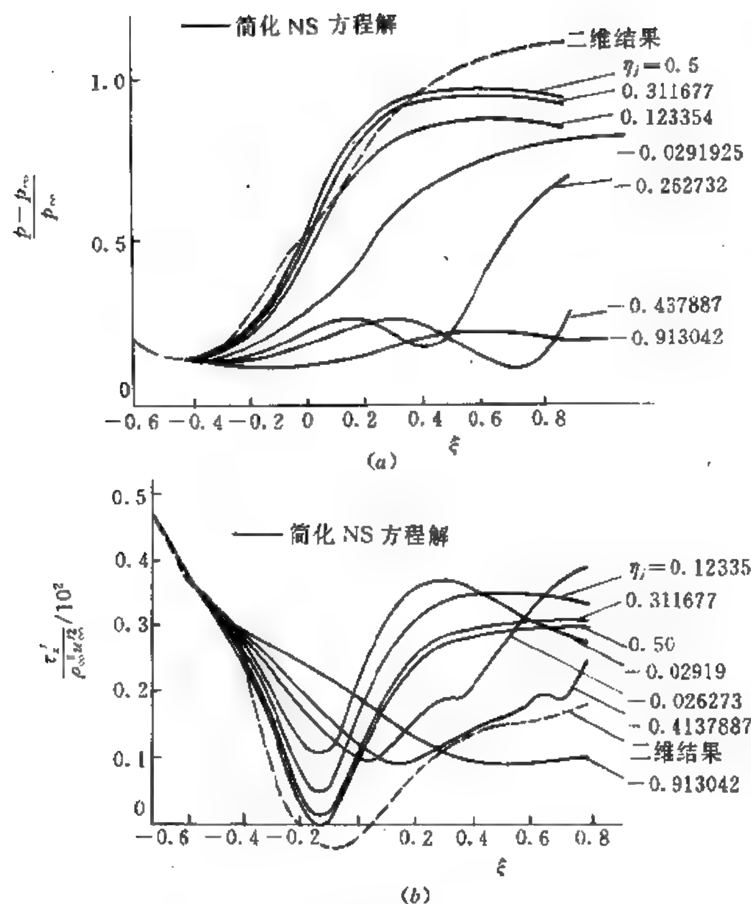
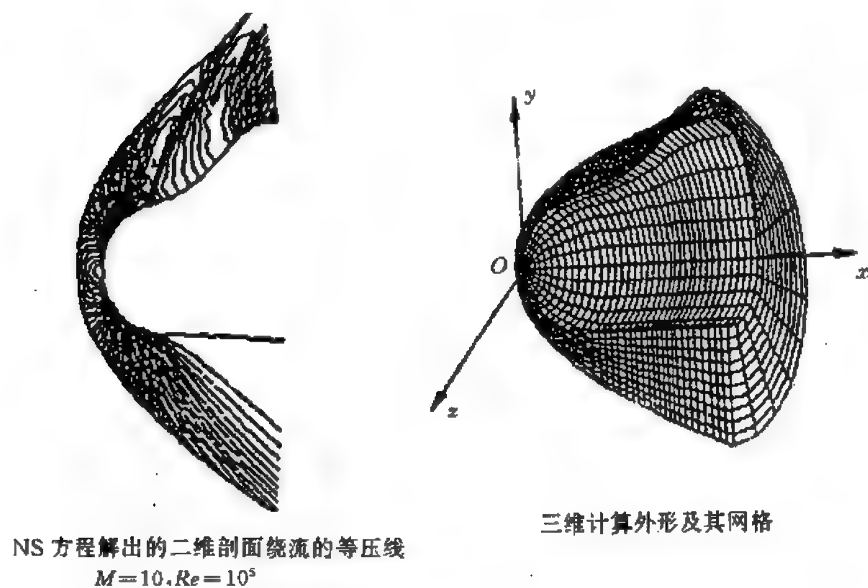


图 C.3.23

(a) $M_\infty=3$，三维拐角层流情况下表面压力分布，
$Re_{\bar{L}}=1.68\times10^4$，$\omega=10°$，$\psi=20°$，$T_\infty=216.65$ K，绝热壁。

(b) $M_\infty=3$，三维拐角层流情况下表面摩阻分布，
$Re_{\bar{L}}=1.68\times10^4$，$\omega=10°$，$\psi=20°$，$T_\infty=216.65$ K，绝热壁。

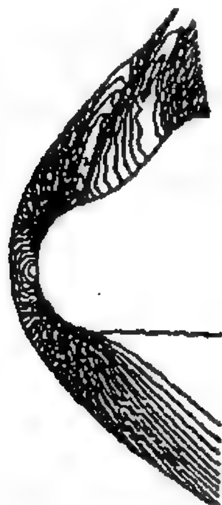


NS 方程解出的二维剖面绕流的等压线
$M=10, Re=10^5$

三维计算外形及其网格

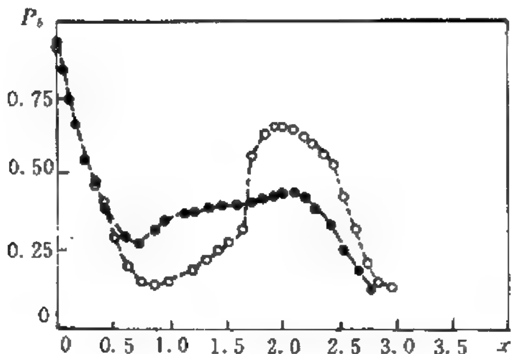
图 C.3.24

图C.3.24—28给出了更加复杂的流场的计算结果。计算表明，用本方法与一般的显式格式（如MacCormack格式）相比，计算速度提高了4—20倍，因此本方法有省机时的优点。



NS方程解出的二维剖面绕流的等压线
$M=10, Re=10^5$

图 C.3.25
N-S方程解出的二维剖面绕流的等压线，$M=10$，$Re=10^5$



○ 无粘
● 有粘 $M=10, \alpha=0°$

图 C.3.26
Euler方程与N-S方程解的比较

但反扩散格式和前面讨论的几种方法都有激波附近分辨率较低的问题。为了进一步提高分辨率，张涵信提出了NND格式。关于这一格式的讨论在上一章中已经定性地进行。图C.3.26—28就是应用NND法求解的实例，它们说明NND法还是相当成功的。

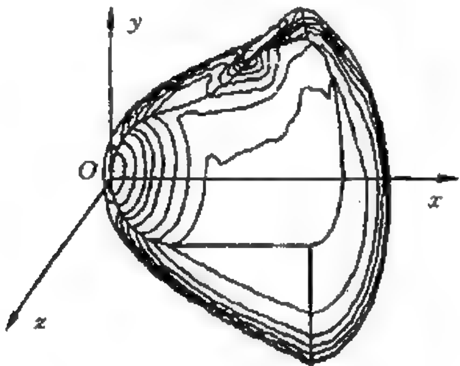
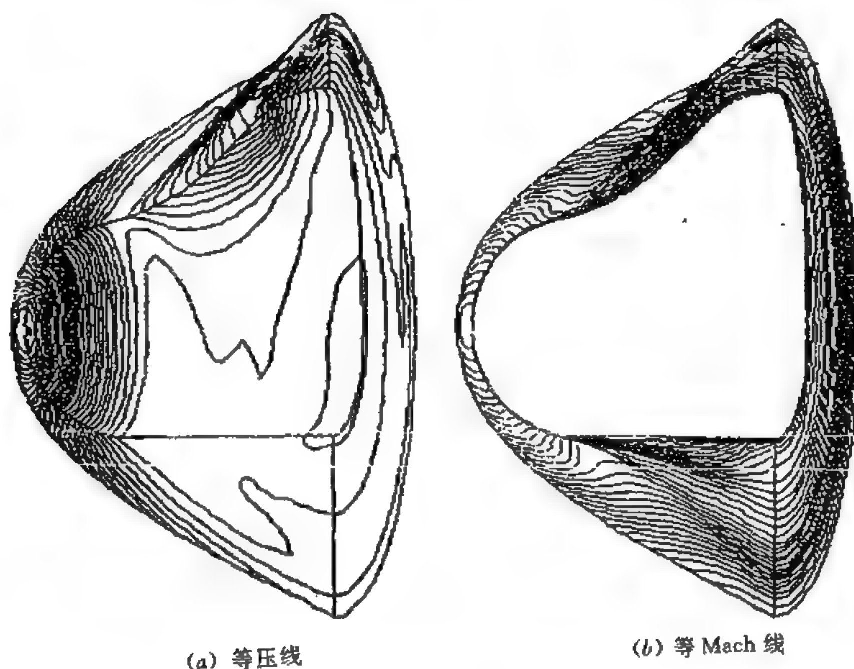


图 C.3.27
Euler方程解给出的三维流的等密度线，
$M=10$，$\alpha=-5°$，NND格式

由于NND格式在一维问题中是严格二阶精度的，对多维问题则分裂为多个一维问题，所以本质上说也是二阶精度的。但对这一点，尚有不同看法，有待于进一步研究。



(a) 等压线　　(b) 等 Mach 线

图　C.3.28

N-S 方程解出的三维流的等压线，等 Mach 线

3.4　可压缩粘性流体流动数值计算的通量分裂法和推进迭代法

目前我们讨论的问题大多是定常问题。研究定常问题时一般是把它看作一个不定常问题的渐近，所以可以求解不定常方程。由于这个不定常过程不是我们所关心的，所以这一计算过程越短越好，也就是说时间步长要尽可能大。为此 MacCormack 从信息传递的角度建立了通量分裂的格式，得到迭代次数只有十几次的成功格式。张涵信则从牛顿迭代和信号传递的角度提出了推进迭代法。他们的出发点尽管不同，但得到的格式原则上是相通的，都具有迭代次数少、计算时间短的优点。在这里我们主要介绍 MacCormack 的格式，并且希望读者实际计算本节中给出的算例。最后简单地介绍一下张涵信的推进迭代格式。

在这里我们采用简化的 N-S 方程，也就是说假定流动的主流是沿某一方向进行的，因此在主流方向上的物理量的变化比与之垂直或接近垂直方向上的变化小得多，所以在主流方向上的二阶导数以及与主流方向有关的交错导数都略去，得到简化的 N-S 方程，这样就使得问题简化了。以后将看到，实际上对于非简化的完全的 N-S 方程也可以用本节讨论的两个方法。这种对方程的简化虽使问题得以大大化简，但所解的问题也就有了限制，主要是在对分离流动的计算时会出现问题，对这些问题目前尚有争议，有兴趣的读者可参考有关文献。

现在首先列出简化的 N-S 方程，即

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F_U}{\partial x}+\frac{\partial (G_U+G_{V1})}{\partial y}=0 \qquad \text{(C.3.4.1)}$$

这里我们略去了 F_V，因为它与 U_x，U_y 有关，根据前面讨论的简化方法，假定 x 是主流方向，故可略去 F_V。另外 G_V 中 $\frac{\partial}{\partial x}$ 项也略去了，只保留与 $\frac{\partial}{\partial y}$ 有关的项，故为 G_{V1}。经过坐标变换后

可以得到

$$\frac{\partial U'}{\partial t}+\frac{\partial F_U'}{\partial \xi}+\frac{\partial (G_U'+G_{V_1})}{\partial \eta}=0 \qquad (C.3.4.2)$$

这里把 ξ 看作主流方向，所以 F'_V 略去不计，G'_V 中与$\frac{\partial}{\partial \xi}$有关的项也略去了，故得 G'_{V_1}。若写为非守恒型，则有

$$J\frac{\partial V}{\partial t}+L_\eta R_\eta^{-1}S_1^{-1}\Lambda_{\bar{A}}S_1R_\eta\frac{\partial V}{\partial \xi}+L_\xi R_\xi^{-1}T_1^{-1}\Lambda_{\bar{B}}T_1R_\xi\frac{\partial V}{\partial \eta}$$
$$+D\frac{\partial}{\partial \eta}(M'_{G_{V_\eta}}\frac{\partial V}{\partial \eta})=0 \qquad (C.3.4.3)$$

由前述可知

$$\left.\begin{aligned} &L_\eta=\frac{\partial y}{\partial \eta}i-\frac{\partial x}{\partial \eta}j, L_\xi=-\frac{\partial y}{\partial \xi}i+\frac{\partial x}{\partial \xi}j \\ &L_\eta=\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2}, L_\xi=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (C.3.4.4)$$

为讨论方便起见，先假定是无粘性的，则方程

$$\frac{\partial U'}{\partial t}+\frac{\partial F'_U}{\partial \xi}+\frac{\partial G'_U}{\partial \eta}=0 \qquad (C.3.4.5)$$

由于

$$F'_U=F_UL_{\eta x}+G_UL_{\eta y}=AUL_{\eta x}+BUL_{\eta y}$$

根据（附-46）式及（附-43）式，上式又可写成

$$\begin{aligned} F_U' &=\bar{\bar{A}}U=(L_\eta D^{-1}R_\eta^{-1}S_1^{-1}\Lambda_{\bar{A}}S_1R_\eta D)U \\ &=\left(L_\eta D^{-1}R_\eta^{-1}S_1^{-1}\frac{\Lambda_{\bar{A}}+|\Lambda_{\bar{A}}|}{2}S_1R_\eta D\right)U \\ &\quad+\left(L_\eta D^{-1}R_\eta^{-1}S_1^{-1}\frac{\Lambda_{\bar{A}}-|\Lambda_{\bar{A}}|}{2}S_1R_\eta D\right)U \\ &=(\bar{A}_++\bar{A}_-)U=F'_{U+}+F'_{U-} \end{aligned} \qquad (C.3.4.6)$$

类似地 $\quad G_U'=F_UL_{\xi x}+G_UL_{\xi y}=AUL_{\xi x}+BUL_{\xi y}$

由（附-46）式及（附-44）式，上式又可写成

$$\begin{aligned} G_U' &=\bar{\bar{B}}U=(L_\xi D^{-1}R_\xi^{-1}T_1^{-1}\Lambda_{\bar{B}}T_1R_\xi D)U \\ &=(\bar{B}_++\bar{B}_-)U=G_{U+}'+G_{U-}' \end{aligned} \qquad (C.3.4.7)$$

将它们代入（C.3.4.5）式并计及 $U'=JU$（见附-8）

$$J\frac{\partial U'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi}(F'_{U_+}+F'_{U_-})+\frac{\partial}{\partial \eta}(G'_{U_+}+G'_{U_-})=0 \qquad (C.3.4.8)$$

由于 F'_{U+} 对应正特征部分，所以应当用上风差分。$F'_{U_}$ 对应负特征，所以应当用下风差分。由此有如下差分

$$J\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t}+\Delta_\xi^-F'_{U_+}+\Delta_\xi^+F'_{U_-}+\Delta_\eta^-G_{U_+}+\Delta\eta^+G_{U_-}=0 \qquad (C.3.4.9)$$

其中 Δ_ξ^+，Δ_ξ^-，Δ_η^+，Δ_η^- 的意义与以前的 Δ_x^+，Δ_x^-，Δ_y^+，Δ_y^- 是相仿的，只要 x 改为 ξ，y 改为 η 就可以了。

另外引入记号

$$\bar{A}=L_\eta\bar{A},\quad \bar{B}=L_\xi\bar{A} \qquad (C.3.4.10)$$

则 (C.3.4.9) 式可改写为

$$J\frac{U^{n+1}-U^{n}}{\Delta t}+\Delta_{\xi}^{-}(\overline{A}_{+}L_{\eta}U)+\Delta_{\xi}^{-}(\overline{A}_{-}L_{\eta}U)+\Delta_{\eta}^{-}(\overline{B}_{+}L_{\xi}U)$$
$$+\Delta_{\eta}^{-}(\overline{B}_{-}L_{\xi}U)=0 \qquad (C.3.4.11)$$

为了提高计算精度，应当用二步法，即预测和校正两步。首先考虑显式的二步格式，这一方法基本上与 MacCormack 的显式格式相似。此处在单元体积中写出，以不失其一般性。设 $\Delta\xi=\Delta\eta=1$，这时 $J=\nabla_{jk}$，其中 jk 是单元的编号，∇_{jk}为该单元的面积。把物理量定义在网格中心，L_{η}，L_{ξ} 的方向分别与单元的 4 个边垂直，如图 C.3.29 所示。其中∇_{jk}值由 (C.3.1.27) 式确定。$L_{j\pm\frac{1}{2}}$，$L_{k\pm\frac{1}{2}}$由表 C.3.1 确定。由于 $\Delta\xi=\Delta\eta=1$，所以 L_{η} 的大小与 $L_{j\pm\frac{1}{2}}$相同，L_{ξ} 的大小与 $L_{k\pm\frac{1}{2}}$相同。

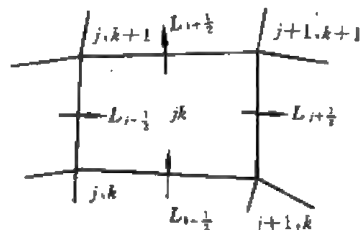


图 C.3.29

列出二步显式的通量分裂格式为

$$\left.\begin{aligned}
\overline{U_{jk}^{n+1}}=U_{jk}^{n}-\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}\{&\overline{A}^{n}_{+_{j+1,k}}U_{jk}^{n}L_{j+\frac{1}{2}}-\overline{A}^{n}_{+_{jk}}U_{j-1,k}^{n}L_{j-\frac{1}{2}}\\
&+\overline{A}^{n}_{-_{j+1,k}}U_{j+1,k}^{n}L_{j+\frac{1}{2}}-\overline{A}^{n}_{-_{jk}}U_{jk}^{n}L_{j-\frac{1}{2}}\\
&+\overline{B}^{n}_{+_{j,k+1}}U_{jk}^{n}L_{k+\frac{1}{2}}-\overline{B}^{n}_{+_{jk}}U_{j,k-1}^{n}L_{k-\frac{1}{2}}\\
&+\overline{B}^{n}_{-_{j,k+1}}U_{j,k+1}^{n}L_{k+\frac{1}{2}}-\overline{B}^{n}_{-_{j,k}}U_{jk}^{n}L_{k-\frac{1}{2}}\}\\
\overline{\overline{U_{jk}^{n+1}}}=\overline{U_{jk}^{n+1}}-\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}\{&\overline{A^{n+1}_{-_{jk}}}\overline{U_{jk}^{n+1}}L_{j+\frac{1}{2}}-\overline{A^{n+1}_{+_{j-1,k}}}\overline{U_{j-1,k}^{n+1}}L_{j-\frac{1}{2}}\\
&+\overline{A^{n+1}_{-_{jk}}}\overline{U_{j-1,k}^{n+1}}L_{j+\frac{1}{2}}-\overline{A^{n+1}_{-_{j-1,k}}}\overline{U_{jk}^{n+1}}L_{j-\frac{1}{2}}\\
&+\overline{B^{n+1}_{+_{j,k}}}\overline{U_{jk}^{n+1}}L_{k+\frac{1}{2}}-\overline{B^{n+1}_{+_{j-1,k}}}\overline{U_{j-1,k}^{n+1}}L_{k-\frac{1}{2}}\\
&+\overline{B^{n+1}_{-_{jk}}}\overline{U_{j,k+1}^{n+1}}L_{k+\frac{1}{2}}-\overline{B^{n+1}_{-_{j,k-1}}}\overline{U_{j,k-1}^{n+1}}L_{k-\frac{1}{2}}\}\\
U_{jk}^{n+1}=\frac{1}{2}\{U_{jk}^{n}+&\overline{\overline{U_{jk}^{n+1}}}\}
\end{aligned}\right\} \qquad (C.3.4.12)$$

为列出隐式格式，再次考察模型方程

$$\frac{\partial U}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (C.3.4.13)$$

若采用隐式迎风格式，则

$$\begin{aligned}
u_{j}^{n+1}&=u_{j}^{n}-a\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{j}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1})\\
&=u_{j}^{n}-a\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{j}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1})-\frac{a\Delta t}{\Delta x}[(u_{j}^{n}-u_{j}^{n})-(u_{j-1}^{n}-u_{j-1}^{n})]\\
&=u_{j}^{n}-a\frac{\Delta t}{\Delta x}(\delta u_{j}^{n}-\delta u_{j-1}^{n})-\frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{j}^{n}-u_{j-1}^{n})\\
&=u_{j}^{n}-a\frac{\Delta t}{\Delta x}(\delta u_{j}^{n}-\delta u_{j-1}^{n})-a\Delta t\Delta_{x}^{-}u_{j}^{n}
\end{aligned}$$

或整理得

$$\delta u_{j}^{n}+a\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta u_{j}^{n}-a\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta u_{j-1}^{n}=-a\Delta t\Delta_{x}^{-}u_{j}^{n}$$

计算化作二步：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{第一步} & \Delta u_j = -a\Delta t \dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \\ \text{第二步} & (1 + a\Delta t\Delta_x^-)\delta u_j^n = \Delta u_j \\ \text{最后} & u_j^{n+1} = u_j^n + \delta u_j^n \end{array}\right\} \tag{C.3.4.14}$$

这里，计算 δu_j^n 时用到 δu_{j-1}^n，由于计算是推进的，所以 δu_{j-1}^n是已知的。

类似地（C.3.4.11）式可以改写为

$$\begin{aligned} U_{jk}^{n+1} = & \frac{1}{2}U_{jk}^n + \frac{1}{2}U_{jk}^n - \frac{\Delta t}{2\nabla_{jk}}\{\Delta_\xi^-(\overline{A}_{+,j+1,k}L_{j+\frac{1}{2}}) \\ & + \Delta_\xi^-(\overline{A}_{-,jk}L_{j-\frac{1}{2}}) + \Delta_\eta^-(\overline{B}_{+,j,k+1}L_{k-\frac{1}{2}}) + \Delta_\eta^+(\overline{B}_{-,jk}L_{k-\frac{1}{2}}) \\ & + \Delta_\xi^-(\overline{A}_{+,jk}L_{j+\frac{1}{2}}) + \Delta_\xi^+(\overline{A}_{-,j-1,k}L_{j-\frac{1}{2}}) + \Delta_\eta^-(\overline{B}_{-,jk}L_{k-\frac{1}{2}}) \\ & + \Delta_\eta^-(\overline{B}_{-,j,k-1}L_{k-\frac{1}{2}})\}U_{jk}^n \\ \xlongequal{\text{记作}} & \frac{1}{2}U_{jk}^n + \frac{1}{2}\{I - \frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}(K_1 + K_2)\}U_{jk}^n \\ \approx & \frac{1}{2}U_{jk}^n + \frac{1}{2}[I - \frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}K_1][I - \frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}K_2]U_{jk}^n \end{aligned} \tag{C.3.4.15}$$

它的显式二步格式为

$$\left.\begin{array}{l} \overline{U_{jk}^{n+1}} = U_{jk}^n - \dfrac{\Delta t}{\nabla_{jk}}K_1 U_{jk}^n \\ \overline{\overline{U_{jk}^{n+1}}} = \overline{U_{jk}^{n+1}} - \dfrac{\Delta t}{\nabla_{jk}}K_2 \overline{U_{jk}^{n+1}} \\ U_{jk}^{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_{jk}^n + \overline{\overline{u_{jk}^{n+1}}}) \end{array}\right\} \tag{C.3.4.16}$$

将它的 K_1，K_2 具体代入后则得（C.3.4.12）式。

它的隐式二步式可以由（C.3.4.14）式推广而得。

预测步

$$\left.\begin{array}{l} \Delta U_{jk}^n = -\dfrac{\Delta t}{\nabla_{jk}}K_1 U_{jk}^n \\ (I + \dfrac{\Delta t}{\nabla_{jk}}K_1)\delta\overline{U_{jk}^{n+1}} = \Delta U_{jk}^n \\ \overline{U_{jk}^{n+1}} = U_{jk}^n + \delta\overline{U_{jk}^{n+1}} \end{array}\right\} \tag{C.3.4.17-1}$$

校正步

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\overline{U_{jk}^{n+1}} = -\dfrac{\Delta t}{\nabla_{jk}}K_2 \overline{U_{jk}^{n+1}} \\ (I + \dfrac{\Delta t}{\nabla_{jk}}K_2)\delta\overline{\overline{U_{jk}^{n+1}}} = \Delta\overline{U_{jk}^{n+1}} \\ \overline{\overline{U_{jk}^{n+1}}} = \overline{U_{jk}^{n+1}} + \delta\overline{\overline{U_{jk}^{n+1}}} \end{array}\right\} \tag{C.3.4.17-2}$$

最后得

$$U_{jk}^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{jk}^n + \overline{\overline{U_{jk}^{n+1}}}) \tag{C.3.4.17-3}$$

若将 K_1，K_2 写出具体形式代入后可得

$$\Delta U_{jk}^n = -\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}[\Delta_\xi^-(\overline{A}_{+,j+1,k}^n L_{j+\frac{1}{2}}) + \Delta_\xi^+(\overline{A}_{-,jk}^n L_{j-\frac{1}{2}})$$

$$
+\Delta_\eta^-(\overline{B}_{+_{j,k+1}}L_{k+\frac{1}{2}})+\Delta_\eta^+(\overline{B}^n_{-_{jk}}L_{k-\frac{1}{2}})]U^n_{jk}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\{I+\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}[\Delta_\xi^-(\overline{A}^n_{+_{j+1,k}}L_{j+\frac{1}{2}})+\Delta_\xi^-(\overline{A}^n_{-_{jk}}L_{j-\frac{1}{2}})\\
&+\Delta_\eta^-(\overline{B}^n_{+_{j,k-1}}L_{k-\frac{1}{2}})+\Delta_\eta^+(\overline{B}^n_{-_{jk}}L_{k-\frac{1}{2}})]\}\delta\overline{U^{n-1}_{jk}}\\
&=\Delta U^n_{jk}\\
&\overline{U^{n-1}_{jk}}=U^n_{jk}+\delta\overline{U^{n-1}_{jk}}
\end{aligned}\right\}\qquad(C.3.4.18\text{-}1)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\Delta\overline{U^{n+1}_{jk}}=&-\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}[\Delta_\xi^-(\overline{A^{n+1}_{+}}L_{j+\frac{1}{2}})+\Delta_\xi^+(\overline{A^{n-1}_{-_{j-1,k}}}L_{j-\frac{1}{2}})\\
&+\Delta_\eta^-(\overline{B^{n+1}_{-_{jk}}}L_{k+\frac{1}{2}})+\Delta_\eta^-(\overline{B^{n+1}_{-_{j,k-1}}}L_{k-\frac{1}{2}})]\overline{U^{n+1}_{jk}}\\
&\{I+\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}[\Delta_\xi^-(\overline{A^{n+1}_{+_{jk}}}L_{j-\frac{1}{2}})+\Delta_\xi^+(\overline{A^{n-1}_{-_{j-1,k}}}L_{j-\frac{1}{2}})\\
&+\Delta_\eta^-(\overline{B^{n-1}_{-_{jk}}}L_{k+\frac{1}{2}})+\Delta_\eta^+(\overline{B^{(n+1)}_{-_{j,k-1}}}L_{k-\frac{1}{2}})]\}\delta\overline{U^{n+1}_{jk}}\\
&=\overline{\Delta U^{n+1}_{jk}}\\
\overline{U^{n+1}_{jk}}=&\overline{U^{n+1}_{jk}}+\delta\overline{U^{n+1}_{jk}}
\end{aligned}\right\}\qquad(C.3.4.18\text{-}2)
$$

$$
U^{n-1}_{jk}=\frac{1}{2}(U^n_{jk}+\overline{U^{n-1}_{jk}})\qquad(C.3.4.18\text{-}3)
$$

(C.3.4.18-1) 式可改写为

$$
\hat{W}\delta\overline{U^{n+1}_{j-1,k}}+\hat{E}\delta\overline{U^{n+1}_{j+1,k}}+\hat{P}\delta\overline{U^{n+1}_{jk}}+\hat{S}\delta\overline{U^{n+1}_{j,k-1}}+\hat{N}\delta\overline{U^{n+1}_{j,k+1}}=\Delta U^n_{jk}\qquad(C.3.4.19\text{-}1)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\hat{W}=-\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}\overline{A}^n_{+_{jk}}L_{j-\frac{1}{2}},\hat{E}=\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}\overline{A}^n_{-_{j+1,k}}L_{j+\frac{1}{2}}\\
&\hat{P}=I+\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}(\overline{A}^n_{+_{j+1,k}}L_{j+\frac{1}{2}}-\overline{A}^n_{-_{jk}}L_{j-\frac{1}{2}}+\overline{B}^n_{+_{j,k+1}}L_{k+\frac{1}{2}}-\overline{B}^n_{-_{jk}}L_{k-\frac{1}{2}})\\
&\hat{S}=-\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}\overline{B}^n_{+_{jk}}L_{k-\frac{1}{2}}\quad\hat{N}=\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}\overline{B}^n_{-_{j,k+1}}L_{k+\frac{1}{2}}
\end{aligned}\right\}
$$

(C.3.4.19-2)

(C.3.4.18-2) 式改写为

$$
\widehat{\widehat{W}}\delta\overline{U^{n+1}_{j-1,k}}+\widehat{\widehat{E}}\delta\overline{U^{n+1}_{j+1,k}}+\widehat{\widehat{P}}\delta\overline{U^{n+1}_{jk}}+\widehat{\widehat{S}}\delta\overline{U^{n+1}_{j,k-1}}+\widehat{\widehat{N}}\delta\overline{U^{n+1}_{j,k+1}}=\Delta\overline{U^{n+1}_{jk}}\qquad(C.3.4.20\text{-}1)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\widehat{\widehat{W}}=-\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}\overline{A^{n+1}_{+_{j-1,k}}}L_{j-\frac{1}{2}},\widehat{\widehat{E}}=\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}\overline{A^{n+1}_{-_{jk}}}L_{j+\frac{1}{2}}\\
&\widehat{\widehat{P}}=I+\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}(\overline{A^{n+1}_{+_{jk}}}L_{j+\frac{1}{2}},-\overline{A^{n+1}_{-_{j-1,k}}}L_{j-\frac{1}{2}}+\overline{B^{n+1}_{+_{jk}}}L_{k+\frac{1}{2}}-\overline{B^{n+1}_{-_{j,k-1}}}L_{k-\frac{1}{2}})\\
&\widehat{\widehat{S}}=-\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}\overline{B^{n+1}_{+_{j,k-1}}}L_{k-\frac{1}{2}},\widehat{\widehat{N}}=\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}\overline{B^{n+1}_{-_{jk}}}L_{k+\frac{1}{2}}
\end{aligned}\right\}
$$

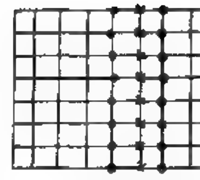
(C.3.4.20-2)

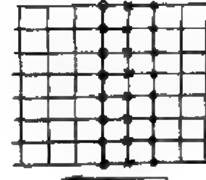
(C.3.4.19) 及 (C.3.4.20) 式分别是两个 5 点格式，如果对同一 j 的所有 k 就构成一列方程，方程改写为

$$
N\delta U_{j,k+1}+P\delta U_{jk}+S\delta U_{j,k-1}=\Delta U_{jk}-W\delta U_{j-1,k}-E\delta U_{j+1,k}\qquad(C.3.4.21)
$$

其中推进方向为正向和反向。

在正向推进时 $W\delta U_{j-1,k}$ 已经算出，$E\delta U_{j-1,k}$ 未算出，可以用上一次的计算值。反向推进正相反。由于 $P=N+S+W+E$，所以是对角占优，这种迭代是收敛的，一般只需 4～5 次。实际上因为中间过程没有意义，所以只要往返一次就开始计算下一个时刻的值（图 C.3.30）。





• 已算出点　× 待求点　∘ 上次计算所得点

图 C.3.30

以上讨论了无粘性的情况。有粘性的情况需在上面的方程中加入 G'_{V_1} 项（见（C.3.4.2）式）。下面讨论 G'_{V_1} 的具体形式，首先讨论 F'_V，G'_V 的一般形式。

$$F'_V=F_V L_{\eta x}+G_V L_{\eta y}$$

$$=L_{\eta x}\begin{Bmatrix}0\\ -\left[\lambda\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]\\ -\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\\ \left[\lambda\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]u-\mu v\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)-\dfrac{k}{c_V}\dfrac{\partial e}{\partial x}\end{Bmatrix}$$

$$+L_{\eta y}\begin{Bmatrix}0\\ -\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\\ -\left[\lambda\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y}\right]\\ -\mu u\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)+\left[\lambda\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y}\right]v-\dfrac{k}{c_V}\dfrac{\partial e}{\partial y}\end{Bmatrix}$$

其中 $\lambda=-\dfrac{2}{3}\mu$

上式又可写成

$$F'_V=L_{\eta x}\left\{\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-(\lambda+2\mu)&0&0\\0&0&-\mu&0\\0&-(\lambda+2\mu)u&-\mu v&\dfrac{k}{c_V}\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\rho\\u\\v\\e\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-\lambda&0\\0&-\mu&0&0\\0&-\mu v&-\lambda u&0\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix}\rho\\u\\v\\e\end{bmatrix}\right\}$$

$$+L_{\eta y}\left\{\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-\mu&0\\0&-\lambda&0&0\\0&-\lambda v&-\mu u&0\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\rho\\u\\v\\e\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-\mu&0&0\\0&0&-(\lambda+2\mu)&0\\0&-\mu u&-(\lambda+2\mu)v&\dfrac{k}{c_V}\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix}\rho\\u\\v\\e\end{bmatrix}\right\}$$

$$=L_{\eta x}\left\{M_{F_{V_x}}\frac{\partial V}{\partial x}+M_{F_{V_y}}\frac{\partial V}{\partial y}\right\}+L_{\eta y}\left\{M_{G_{V_x}}\frac{\partial V}{\partial x}+M_{G_{V_y}}\frac{\partial V}{\partial y}\right\}$$

$$=L_{\eta x}\left\{M_{F_{V_x}}\frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}+M_{F_{V_y}}\frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y}\right\}+L_{\eta y}\left\{M_{G_{V_x}}\frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}+M_{G_{V_y}}\frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y}\right\}$$

$$=L_{\eta x}\left\{M_{F_{V_x}}\overline{D}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+M_{F_{V_y}}\overline{D}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right\}$$

$$+L_{\eta y}\left\{M_{G_{V_x}}\overline{D}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+M_{G_{V_y}}\overline{D}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right\}$$

$$=\left[L_{\eta x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}M_{F_{V_x}}+\frac{\partial \xi}{\partial y}M_{F_{V_y}}\right)+L_{\eta y}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}M_{G_{V_x}}+\frac{\partial \xi}{\partial y}M_{G_{V_y}}\right)\right]\overline{D}\frac{\partial U}{\partial \xi}$$

$$+\left[L_{\eta x}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}M_{F_{V_x}}+\frac{\partial \eta}{\partial y}M_{F_{V_y}}\right)+L_{\eta y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}M_{G_{V_x}}+\frac{\partial \eta}{\partial y}M_{G_{V_y}}\right)\right]\overline{D}\frac{\partial U}{\partial \eta}$$

$$\xlongequal{\text{记作}} M_{F_{V_\xi}}\frac{\partial U}{\partial \xi}+M_{F_{V_\eta}}\frac{\partial U}{\partial \eta} \tag{C.3.4.22}$$

其中 $V=\{\rho,u,v,e\}^{\mathrm{T}}$ $\quad U=\{\rho,\rho u,\rho v,\rho E_S\}^{\mathrm{T}}$

$$D=\frac{\partial V}{\partial U}=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0, & 0,\\ -\frac{u}{\rho}, & \frac{1}{\rho}, & 0, & 0,\\ -\frac{v}{\rho}, & 0, & \frac{1}{\rho}, & 0,\\ \frac{V^2-e}{\rho}, & -\frac{u}{\rho}, & -\frac{v}{\rho}, & \frac{1}{\rho}\end{pmatrix}(V^2=u^2+v^2) \tag{C.3.4.23}$$

类似地有

$$G'_V=\left[L_{\xi x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}M_{F_{V_x}}+\frac{\partial \xi}{\partial y}M_{F_{V_y}}\right)+L_{\xi y}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}M_{G_{V_x}}+\frac{\partial \xi}{\partial y}M_{G_{V_y}}\right)\right]\overline{D}\frac{\partial U}{\partial \xi}$$

$$+\left[L_{\xi x}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}M_{F_{V_x}}+\frac{\partial \eta}{\partial y}M_{F_{V_y}}\right)+L_{\xi y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}M_{G_{V_x}}+\frac{\partial \eta}{\partial y}M_{G_{V_y}}\right)\right]\overline{D}\frac{\partial U}{\partial \eta} \tag{C.3.4.24}$$

$$\xlongequal{\text{记作}} M_{G_{V_\xi}}\frac{\partial U}{\partial \xi}+M_{G_{V_\eta}}\frac{\partial U}{\partial \eta}$$

将它们代入（附-7）式得

$$\frac{\partial U'}{\partial t}+\frac{\partial F'_U}{\partial \xi}+\frac{\partial G'_U}{\partial \eta}+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(M_{F_{V_\xi}}\frac{\partial U}{\partial \xi}+M_{F_{V_\eta}}\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(M_{G_{V_\xi}}\frac{\partial U}{\partial \xi}+M_{G_{V_\eta}}\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)=0 \tag{C.3.4.25}$$

（这里设 $R=0$）

作为简化，略去与$\frac{\partial}{\partial \xi}$有关的二阶导数，则得

$$\frac{\partial U'}{\partial t}+\frac{\partial F'_U}{\partial \xi}+\frac{\partial G'_U}{\partial \eta}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(M_{G_{V_\eta}}\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)=0 \tag{C.3.4.26}$$

即

$$G'_{V_1}=M_{G_{V_\eta}}\frac{\partial U}{\partial \eta} \tag{C.3.4.27}$$

由于

$$U'=JU \tag{C.3.4.28}$$

故（C.3.4.26）式可改写为

$$J\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F'_U}{\partial \xi}+\frac{\partial G'_U}{\partial \eta}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(M_{G_{V_\eta}}\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)=0 \tag{C.3.4.29}$$

二步的隐式格式为：

预测

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta U'^{n}_{jk} = -\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}\left[K_1 + \Delta_\xi^{+}\left(M_{F'_{V_\xi}}\Delta_\xi^{-}\right) + \Delta_\xi^{+}\left(M_{F'_{V_\eta}}\Delta_\eta^{0}\right)\right.\\
&\quad \left. + \Delta_\eta^{-}\left(M_{G'_{V_\xi}}\Delta_\xi^{0}\right) - \Delta_\eta^{+}\left(M_{G'_{V_\eta}}\Delta_\eta^{+}\right)\right]U'^{n}_{jk}\\
&\left\{I + \frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}\left[K_1 - \Delta_\eta^{-}\left(M_{G'_{V_\eta}}\Delta_\eta^{-}\right)\right]\right\}\delta U'^{\overline{n-1}}_{jk} = \Delta U'^{n}_{jk}\\
&U'^{\overline{n-1}}_{jk} = U'^{n}_{jk} + \delta U'^{\overline{n-1}}_{jk}
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.4.30-1}
$$

校正

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta U'^{\overline{n-1}}_{jk} = -\frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}\left[K_2 + \Delta_\xi^{+}\left(M_{F'_{V_\xi}}\Delta_\xi^{-}\right) + \Delta_\xi^{-}\left(M_{F'_{V_\eta}}\Delta_\eta^{0}\right)\right.\\
&\quad \left. + \Delta_\eta\left(M_{G'_{V_\xi}}\Delta_\xi^{0}\right) + \Delta_\eta^{+}\left(M_{G'_{V_\eta}}\Delta_\eta^{-}\right)\right]U'^{\overline{n-1}}_{jk}\\
&\left\{I + \frac{\Delta t}{\nabla_{jk}}\left[K_2 + \Delta_\eta^{-}\left(M_{G'_{V_\eta}}\Delta_\eta^{-}\right)\right]\right\}\delta U'^{\overline{\overline{n-1}}}_{jk} = \Delta U'^{\overline{n-1}}_{jk}\\
&U'^{\overline{\overline{n-1}}}_{jk} = U'^{\overline{n-1}}_{jk} + \delta U'^{\overline{\overline{n-1}}}_{jk}
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.4.30-2}
$$

最后得 $U'^{n-1}_{jk} = \frac{1}{2}\left(U'^{n}_{jk} + U'^{\overline{\overline{n-1}}}_{jk}\right)$ (C.3.4.30-3)

这里 K_1，K_2 与（C.3.4.17）式中的 K_1，K_2 是相同的，另外这里求 ΔU 时用了全 N-S 方程，而求 δU 时则用简化的 N-S 方程，这样计算比较方便，实际运算证明这一方法是合适的。

下面讨论一个实例，即如图 C.3.31 所示的流场。

进口条件：总温 $T_t=531.2$ K，总压 $p_t=1.0336\times10^5$Pa；

壁面条件：$u=v=0$。

出口条件：出口压力 $p_e=p_t/3=0.34454\times10^5$Pa

网格选用 $\Delta x=\frac{1}{36}L$，$\Delta y=T/16$

运行时先 10 步显式，再 10 步隐式。

在具体计算前还必须说明边界条件的具体表达方法。

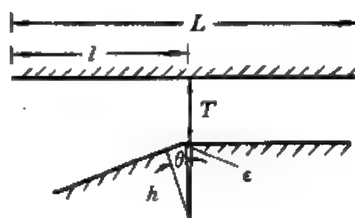


图 C.3.31

根据 A 篇末的分析已知，如果进口是超声速流，则要给出 4 个边界条件；进口为亚声速时只给 3 个条件。一般进口给总压、总温与速度方向角，在超声速时还要给出速度大小，这里进口是亚声速，只给 3 个条件。

为了确定进口参数，还需要一个特征上的关系。为了简化，由于这里讨论的是简化 N-S 方程，进口近似为一维流动，故采用一维特征上的关系式，这些特征上的关系式为：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c\frac{\partial u}{\partial t} = -(u+c)\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
&\frac{\partial p}{\partial t} - \rho c\frac{\partial u}{\partial t} = -(u-c)\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho c\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
&\frac{\partial p}{\partial t} + c^2\frac{\partial \rho}{\partial t} = -u\left(\frac{\partial p}{\partial x} + c^2\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\\
&\frac{\partial v}{\partial t} = -u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.4.31}
$$

它们可由特征分析得到。

进口处的网格如图C.3.32所示。1点为进口外的网格点，p_t，T_t，θ都已知（这里一般可设$\theta=0$）。

2点为最靠近进口的网格点，在亚声速时只要一个特征关系。由于亚声速，$u-c<0$，除了采用这一关系外，还需采用第2个关系式，即

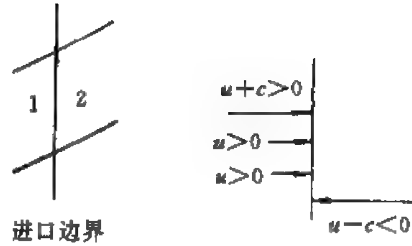


图 C.3.32

$$\frac{p_1^{n+1}-p_1^n}{\Delta t}-\rho c\frac{u_1^{n+1}-u_1^n}{\Delta t}$$
$$=-(u-c)\left(\frac{p_2-p_1}{\Delta x}-\frac{\rho c(u_2-u_1)}{\Delta x}\right)^{n+1}$$

(C.3.4.32)

记

$$p_1^{n+1}-p_1^n=\delta p,\quad u_1^{n+1}-u_1^n=\delta u \qquad (C.3.4.33)$$

于是（C.3.4.32）式可简写为

$$\frac{1}{\Delta t}(\delta p-c\rho\delta u)=-\frac{u-c}{\Delta x}[p_2-p_1-\rho c(u_2-u_1)]^{n+1} \qquad (C.3.4.34)$$

由等熵流动知

$$p=p(u)=p_t\left[1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(1+\mathrm{tg}^2\theta)\frac{u^2}{a^{*2}}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad (C.3.4.35)$$

或 $$\delta p=\frac{\partial p}{\partial u}\delta u=-p_t\frac{\gamma}{\gamma-1}\left[1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(1+\mathrm{tg}^2\theta)\frac{u^2}{a^{*2}}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(1+\mathrm{tg}^2\theta)\frac{\delta u}{a^*}$$

(C.3.4.36)

将它代入（C.3.4.34）式可得

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u}-\rho c\right)\delta u=-\lambda[p_2-p_1-\rho c(u_2-u_1)]^{n+1}$$
$$=-\lambda\{[p_2^{n+1}-p_1^n-\rho c(u_2^{n+1}-u_1^n)]$$
$$+[p_1^n-p_1^{n+1}-\rho c(u_1^n-u_1^{n+1})]\}$$
$$=-\lambda[p_2^{n+1}-p_1^n-\rho c(u_2^{n+1}-u_1^n)]+\lambda(\delta p_1-\rho c\delta u_1)$$

即

$$\delta u=\frac{-\lambda[p_2^{n+1}-p_1^n-\rho c(u_2^{n+1}-u_1^n)]}{(1-\lambda)\left(\frac{\partial p}{\partial u}-\rho c\right)} \qquad (C.3.4.37)$$

其中

$$\lambda=+(u-c)\frac{\Delta t}{\Delta x} \qquad (C.3.4.38)$$

由于 p_1^n，u_1^n 已知，内点的 p_2^{n-1}，u_2^{n-1} 也由 n 层值解得，于是由上式可计算出 δu，然后

$$\left.\begin{aligned}
u_1^{n-1} &= u_1^n + \delta u \\
v_1^{n-1} &= u_1^{n-1} + \mathrm{tg}\theta \\
p_1^{n-1} &= p(u_1^{n-1}) \\
T_1^{n-1} &= T(u_1^{n-1}) = T_t[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}(1+\mathrm{tg}^2\theta)\frac{u^2}{a^{*2}}]^{n-1} \\
\rho_1^{n-1} &= p_1^{n-1}/RT_1^{n-1} \\
e_1^{n-1} &= c_V T_1^{n-1} \\
E_1^{n-1} &= e_1^{n-1} + \frac{1}{2}[(u_1^{n-1})^2 + (v_1^{n-1})^2]
\end{aligned}\right\} \qquad (C.3.4.39)$$

出口条件：

此时出口为超声速，不要条件，亚声速时给一条件（图 C.3.33）。

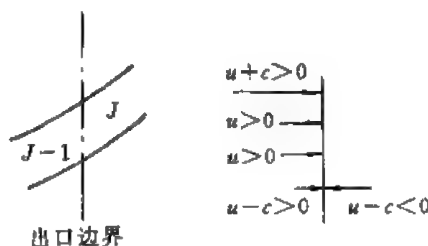


图 C.3.33

用类似方法有

$$\delta\rho - \frac{1}{c^2}\delta p = -\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\left[\rho_J - \rho_{J-1} - \frac{1}{c_{J-1}^2}(p_J - p_{J-1})\right] = R_1 \qquad (C.3.4.40\text{-}1)$$

$$\lambda_1 = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$$

$$\delta p + \rho c\delta u = \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}\left[p_J - p_{J-1} + (\rho c)_{J-1}(u_J - u_{J-1})\right] = R_2 \qquad (C.3.4.40\text{-}2)$$

$$\lambda_2 = \frac{(u+c)\Delta t}{\Delta x}$$

$$\delta v = -\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}(v_J - v_{J-1}) = R_3 \qquad (C.3.4.40\text{-}3)$$

$$\delta p - \rho c\delta u = -\frac{\lambda_4}{1+\lambda_4}[p_J - p_{J-1} - (\rho c)_{J-1}(u_J - u_{J-1})] = R_4 \qquad (C.3.4.40\text{-}4)$$

$$\lambda_4 = \frac{(u-c)\Delta t}{\Delta x}$$

故得

$$\delta p = \begin{cases} \frac{1}{2}(R_2 + R_4) & M = \frac{u_{J-1}}{c_{J-1}} > 1 \\ 0 & M < 1 \end{cases} \qquad (C.3.4.41)$$

当 $M<1$ 时 ρc 是给定的，且

$$\left.\begin{aligned}
\delta\rho &= (R_1 + \delta p)/c_{J-1}^2 \\
\delta u &= (R_2 + \delta p)/\rho c_{J-1} \\
\delta v &= R_3
\end{aligned}\right\} \qquad (C.3.4.42)$$

然后

$$
\left.\begin{array}{l}
\rho_j^{n+1} = \rho_j^n + \delta\rho, \quad \delta\rho = \rho_j^{n+1} - \rho_j^n \\
u_j^{n+1} = u_j^n + \delta u, \quad \delta(\rho u) = (\rho u)_j^{n+1} - (\rho u)_j^n \\
v_j^{n+1} = v_j^n + \delta v, \quad \delta(\rho v) = (\rho v)_j^{n+1} - (\rho v)_j^n \\
p_j^{n+1} = p_j^n + \delta p, \quad \delta(\rho E_t) = (\rho E_t)_j^{n+1} - (\rho E_t)_j^n \\
T_j^{n+1} = p_j^{n+1}/R\rho_j^{n+1} \\
E_{tj}^{n+1} = e_j^{n+1} + \dfrac{1}{2}[(u_j^{n+1})^2 + (v_j^{n+1})^2] \\
e_j^{n+1} = c_V T_j^{n+1}
\end{array}\right\} \tag{C. 3. 4. 43}
$$

实际上，当出口为超声速时，边界点当作内点算就可以，因为这时内点的方程中都是向前差分的。在出口并声速时，把边界条件代入即可以，所以这时 $\delta p=0$（定常出口），这相当于在出口点的方程中加上一个条件，因此方程是封闭的。

壁面条件：

$$
u = v = 0, \quad T = T_w, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \tag{C. 3. 4. 44}
$$

用差分表示，则有

$$
\left.\begin{array}{l}
u_2 = -u_1 \\
v_2 = -v_1 \\
\dfrac{1}{2}(T_1 + T_2) = T_w \\
p_1 = p_2
\end{array}\right\} \tag{C. 3. 4. 45}
$$

（在计算无粘流时 $u_2=u_1$，$v_2=-v_1$，压力由等熵条件确定）

网格选定：

x 方向为 18 个，y 方向为 8 个，节点位置由下式确定：

$$
x = \frac{e^{k_x \xi} - 1}{e^{k_x} - 1} l, \quad y = \frac{e^{k_y \eta} - 1}{e^{k_y} - 1} t \ (t\ \text{为截面宽度}) \tag{C. 3. 4. 46}
$$

$$
k_x = 1.40282, \quad k_y = 2.54792
$$

$$
\xi_i = \frac{i}{9} (i = 1, 2, \cdots, 9)
$$

$$
\eta_j = \frac{j}{8} (j = 1, 2, \cdots, 8)
$$

在初始条件中取进口 $p^{(0)}=p_t$，$\rho^{(0)}=\rho_t$，$u=v=0$，出口 $p^{(0)}=\dfrac{p_t}{3}$；进口选用 MacCormack 格式计算 10～20 次，再用显式通量分裂计算 10～20 次，这里 Δt 均取

$$
\Delta t = \min\left\{ \frac{\nabla_{jk}}{|uL_{j+\frac{1}{2},x} + vL_{j+\frac{1}{2},y}| + c_{jk}L_{j+\frac{1}{2}}}; \frac{\nabla_{jk}}{|uL_{k+\frac{1}{2},x} + vL_{k+\frac{1}{2},y}| + c_{jk}L_{k+\frac{1}{2}}} \right\} \cdot \text{CFL} \tag{C. 3. 4. 47}
$$

CFL～0.9。在以后则用隐式通量分裂格式，每一步 Δt 增加一倍，16 次后即可收敛。

收敛以后的计算结果如图 C. 3. 34 和图 C. 3. 35 所示。其中图 C. 3. 34 表示缩放喷管及其网格划分。图 C. 3. 35 表示表面压力分布及喉部速度剖面。

本例请读者自行编制程序并计算结果。

其于类似的思想，张涵信提出推进迭代法，其基本思想如下。

设基本方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=0 \qquad (C.3.4.48)$$

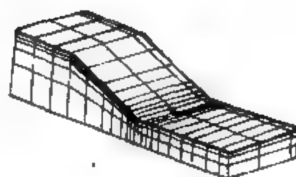


图 C.3.34

其中 F，G 是 U，U_x，U_y 的函数。为简单起见，可以作一些简化而得到简化的 N-S 方程、同时只考虑定常的情况，具体形式可以写作

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{Re_\infty}\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right) \qquad (C.3.4.49)$$

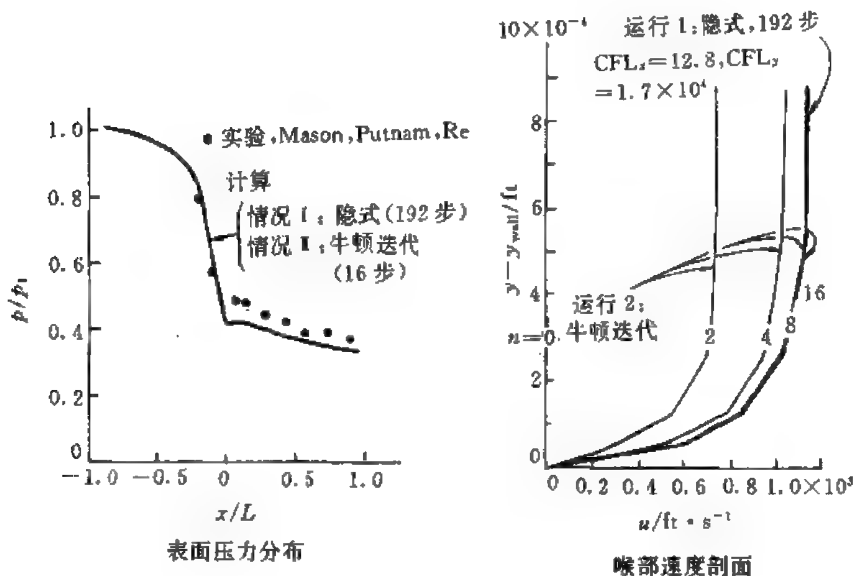


图 C.3.35

其中

$$F=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ (\rho E_s+p)u\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ (\rho E_s+p)v\end{pmatrix}\quad \Theta=\begin{pmatrix}0\\ u\\ 0\\ H+\left(\frac{1}{Pr}-1\right)h\end{pmatrix} \qquad (C.3.4.50)$$

$$h=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho},\quad H=h+\frac{1}{2}(u^2+v^2),\quad E_s=\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}(u^2+v^2) \qquad (C.3.4.51)$$

记向量 $U=(\rho,\ \rho u,\ \rho v,\ \rho E_s)^{\mathrm{T}}$，则 (C.3.4.49) 式可改写为

$$\frac{\partial AU}{\partial x}-\frac{\partial BU}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{Re_\infty}D\frac{\partial U}{\partial y}\right) \qquad (C.3.4.52)$$

其中 $A=\frac{\partial F}{\partial U}$，$B=\frac{\partial G}{\partial U}$，$D=\frac{\partial \Theta}{\partial U}$ (C.3.4.53)

由于 A，B 都可以分解为

$$A=A_+ + A_-,\quad B=B_+ + B_- \qquad (C.3.4.54)$$

为求解 (C.3.4.49) 式，可以用牛顿法。由此求解

$$f(z)=0 \qquad (C.3.4.55)$$

可设初值 $z^{(k)}$，令真解记作 $z^{(k)}+\delta z$，代入上式可得

$$f(z^{(k)}+\delta z)=0 \qquad (C.3.4.56)$$

设 δz 为小量，略去高阶小量，上式可写为

$$f(z^{(k)})+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(k)}\delta z=0 \tag{C.3.4.57}$$

或记

$$\delta z=-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(k)^{-1}}f(z^{k}) \tag{C.3.4.58}$$

若将（C.3.4.49）式左侧看作 U 的函数，利用牛顿法应有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial U}\delta U^{(k)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial U}\delta U^{(k)}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{Re_\infty}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial U}\delta U^{(k)}\right)\right]$$

$$=-\left[\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{Re_\infty}\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)\right]^{(k)}=R^{(k)} \tag{C.3.4.59}$$

利用（C.3.4.53）及（C.3.4.54）式可以得到

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}(A_++A_-)+\frac{\partial}{\partial y}(B_++B_-)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{Re_\infty}\frac{\partial}{\partial y}(D)\right]\right\}\delta U^{(k)}$$

$$=-\left[\frac{\partial(A_+U+A_-U)}{\partial x}+\frac{\partial(B_+U+B_-U)}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{Re_\infty}D\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right]^{(k)} \tag{C.3.4.60}$$

利用信息传播的概念，可得差分公式为

$$\left\{\Delta_x^- A_+^{(k)}+\Delta_x^+ A_-^{(k)}+\Delta_y^- B_+^{(k)}+\Delta_y^+ B_-^{(k)}-\Delta_y^0\left[\frac{\mu}{Re_\infty}D^{(k)}\Delta_y^0\right]\right\}\delta U_{jk}^{(k)}$$

$$=-\left\{\Delta_x^- A_+^{(k)}+\Delta_x^+ A_-^{(k)}+\Delta_y^- B_+^{(k)}+\Delta_y^+ B_-^{(k)}-\Delta_y^0\left(\frac{\mu}{Re_\infty}D^{(k)}\Delta_y^0\right)\right\}U_{jk}^{(k)}$$

$$\overset{\text{记作}}{=\!=\!=} R^{(k)} \tag{C.3.4.61}$$

上式可改写为与（C.3.4.19）式相类似的方程，同样可以沿 x 正、反两个方向推进，进行迭代过程（推进迭代公式亦由此得名）。当

$$\| U^{(k)}-U^{(k-1)}\| < \epsilon$$

（ϵ 为一给定的误差限）时迭代停止，所以这时 $\frac{\partial U}{\partial t}\to 0$，也就是说与 MacCormack 的通量分裂格式是一致的。

该推进迭代法可以进一步应用于不可压缩流动的计算，关于这一点将在下面章节中详细讨论。

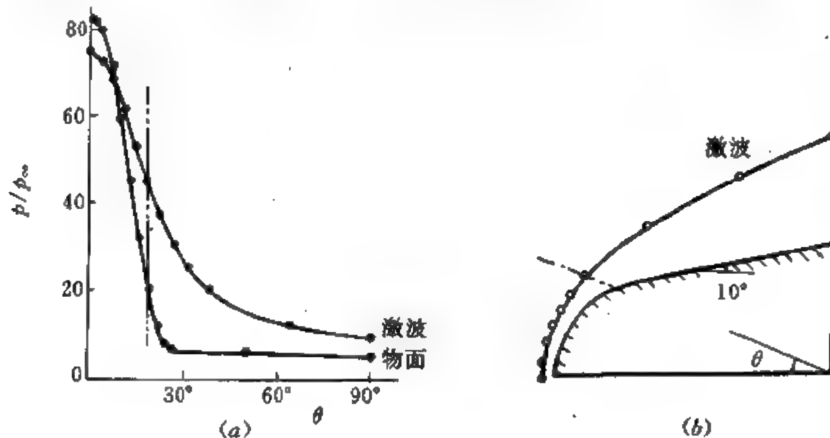


图 C.3.36

（a）绕球形锥流动的压力曲线，$M_\infty=8$ • Lyubimov 结果 —本结果

（b）沿球形锥表面的激波，$M_\infty=8$

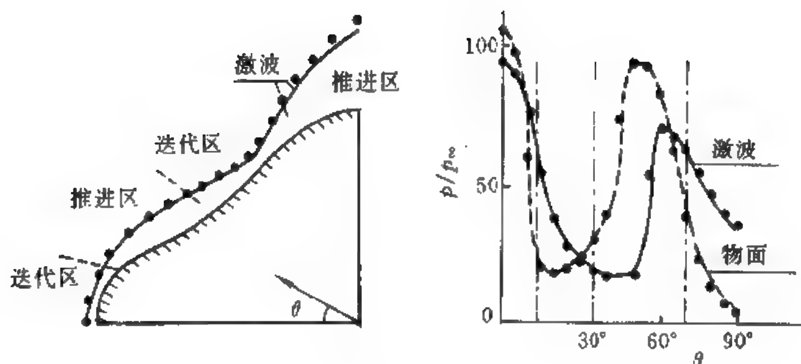


图 C. 3. 37

图 C. 3. 36 和图 C. 3. 37 表示了用推进迭代法计算的一些结果。

3.5 用流函数-旋度方程求解不可压缩粘性流体流动的 N-S 方程

不可压缩粘性流体流动是可压缩的粘性流体流动的一个特例，即 ρ=常数。初看起来不可压缩流动的计算会简单一些，事实上却并非如此简单。在不可压缩流动中，连续方程可简单地写为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{C. 3. 5. 1}$$

这里$\frac{\partial \rho}{\partial t}$项不出现，于是不可压缩流动的基本方程必须写成如下形式

$$\theta \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \tag{C. 3. 5. 2}$$

其中 θ 为一奇异矩阵。关于可压缩流动的一些计算方法均不能直接引用，此时必须设计新的计算方法，会引出许多新的问题。

此外不可压缩流动中如果粘性与温度关系不很大时，粘性可以作为常数计算。此时连续性方程与动力学方程组成一封闭方程，可以独立求解，在求得解以后再求解能量方程。这样就使得问题得以简化。本章以后的几节主要讨论粘性系数为常数的情况。

现在先考虑二维流动的情况。在直角坐标下连续方程和动力学方程具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{C. 3. 5. 3}$$

压力项只在动力学方程中出现。在联列求解时会出现奇异方程的求解问题，所以对于不可压缩流动的求解问题，处理好压力项是很重要的方面。

要避免上述困难，方法之一是将方程中的压力项消去。为此人们采用流函数-旋度的方法，即根据连续方程引入流函数；另外将动力学方程取旋得到一个关于旋度的方程，在其中压力项因取旋而消失（因为压力项只以梯度形式出现，梯度的旋度恒为零）。

动力学方程的向量形式为

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\rho}\Delta p+\nu\Delta\boldsymbol{V} \tag{C.3.5.4}$$

取旋后得

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}-\nu\nabla^2\boldsymbol{\Omega}=0 \tag{C.3.5.5}$$

引入向量流函数 $\boldsymbol{\psi}$，使

$$\boldsymbol{V}=\nabla\times\boldsymbol{\psi} \tag{C.3.5.6}$$

连续方程显然总能满足。由 $\boldsymbol{\Omega}$ 定义

$$\boldsymbol{\Omega}=\nabla\times\boldsymbol{V} \tag{C.3.5.7}$$

不难得到

$$\nabla^2\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\Omega}=0 \tag{C.3.5.8}$$

于是（C.3.5.5）和（C.3.5.8）两式构成了关于流函数-旋度的基本方程。方程中的 $\boldsymbol{V}$ 由（C.3.5.6）式计算得到。可以看出三维问题也可以应用流函数-旋度的方程来计算，但是比较复杂，有兴趣的读者可以参考有关的文献。

对于二维问题

$$\boldsymbol{\psi}=\psi\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{\Omega}=\zeta\boldsymbol{k} \tag{C.3.5.9}$$

其中 ψ，ζ 是数量函数，与（t，x，y）有关。将上式代入（C.3.5.7）式得

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{C.3.5.10}$$

（C.3.5.8）式简化为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\zeta \tag{C.3.5.11}$$

（C.3.5.5）式简化为

$$-\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial y^2}-\nu\Delta\Delta\psi=0 \tag{C.3.5.12}$$

（C.3.5.11）与（C.3.5.12）式就构成了二维流函数-旋度的基本方程。为了计算压力，可将（C.3.5.4）式取散度，得到方程

$$\nabla^2 p=-\rho\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \tag{C.3.5.13}$$

这是一个泊松方程。在流函数-旋度方程求解后速度场是已知的，故压力方程可以求解。

为了求解，需要给出边界条件和起始条件。一般说对于求解定常问题，起始条件不是十分重要的，一个简单的方法是采用较低雷诺数的流场作为初值。对于不定常问题，起始条件对于流场的描写是会有影响的，一般采用低雷诺数的流场作为起始值。

边界条件的给出，对于流函数不十分困难，比如物体的绕流，来流情况给定时来流处（$x=-\infty$）的流函数是已知的。上下边界取足够远时也可以是给定的。物面上的流函数一般取常数（对于固定物体）或给出它沿物面的变化（物面运动的情况）。下游可以认为流函数线性变化。对于旋度采用开边界条件，即略去粘性项得到

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}=0 \tag{C.3.5.14}$$

这是一个双曲型的方程，可以用一般后向差分方法求得边界上的值。

比较麻烦的是 ζ 在物面处的边界条件。这是因为在物理上得不到直接条件，而需要由方程本身以及物理上的附加条件来得到 ζ 的相应条件。目前对此有各种处理方法，但是最常见的是

如下方法：

由（C.3.5.11）式得知

$$\zeta|_W = -\nabla^2\psi|_W \tag{C.3.5.15}$$

下标 W 表示在壁面处。设壁面处的正交曲线坐标为 n，τ；n 为法向，τ 为切向。上式可改写为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial \tau^2} = -\zeta \tag{C.3.5.16}$$

在壁面上 $\frac{\partial^2\psi}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial v_n}{\partial \tau}$，$\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}$ 可由 Tayler 公式确定，其一阶公式为

$$\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\right|_W = \frac{2}{\Delta n^2}[\psi(\tau,\Delta n) - \psi(\tau,0)] - \frac{2}{\Delta n}v_\tau \tag{C.3.5.17}$$

二阶公式为

$$\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\right|_W = \frac{1}{2\Delta n^2}[\psi_{j,2} - 8\psi_{j,1} + 7\psi_{j,0}] + \frac{3}{\Delta n}v_{\tau_{j,0}} + \left(\frac{\partial v_n}{\partial \tau}\right)_{j,0} \tag{C.3.5.18}$$

代入（C.3.5.16）式得一阶公式

$$\zeta_{j,0} = -\frac{2}{\Delta n}(\psi_{j,1} - \psi_{j,0}) + \frac{2}{\Delta n}v_{\tau_{j,0}} + \left(\frac{\partial v_n}{\partial \tau}\right)_{j,0} \tag{C.3.5.19}$$

二阶公式请读者自行列出。

另一种二阶公式可以由以下方法导得：

由于

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2} = -\zeta + \frac{\partial^2\psi}{\partial \tau^2} \tag{C.3.5.20}$$

关于 n 求导得

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial n^3} = -\frac{\partial\zeta}{\partial n} - \frac{\partial^2 v_\tau}{\partial \tau^2}$$

或

$$\frac{\partial\zeta}{\partial n} = \frac{\partial^3\psi}{\partial n^3} - \frac{\partial^2 v_\tau}{\partial \tau^2}$$

差分后得

$$\frac{\zeta_{j,1} - \zeta_{j,0}}{\Delta n} = -\frac{6}{\Delta n^2}\left[\psi_{j,1} - \psi_{j,0} - \Delta n\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{j,0} - \frac{\Delta n^2}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\right)_{j,0}\right] - \left(\frac{\partial^2 v_\tau}{\partial \tau^2}\right)_{j,0} \tag{C.3.5.21}$$

或改写为

$$\zeta_{j,0} = -\frac{1}{2}\zeta_{j,1} - \frac{3}{\Delta n^2}(\psi_{j,1} - \psi_{j,0}) + \frac{3}{\Delta n}v_{\tau_{j,0}} + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial v_n}{\partial \tau}\right)_{j,0} - \frac{\Delta n}{2}\left(\frac{\partial^2 v_\tau}{\partial \tau^2}\right)_{j,0} \tag{C.3.5.22}$$

这里（C.3.5.21）式的 $\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}$ 用（C.3.5.20）式代入。

虽然这里的边界条件只有一阶精度，但并不会降低整个解的精度，相反却更加稳定。有时使用比较高阶的格式反而不稳定，这一点最早是由 Kreiss 指出的。

下面讨论差分格式的选用。

最简单的格式是一阶和二阶迎风格式，即

$$u\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{u_i + |u_i|}{2}\frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\Delta x} + \frac{u_i - |u_i|}{2}\frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\Delta x} \tag{C.3.5.23}$$

这是一阶精度的。

$$\frac{\partial u\psi}{\partial x}=\frac{1}{2\Delta x}(u_i+|u_i|)\frac{1}{|u_i|}[3u_i\psi_i-4u_{i-1}\psi_{i-1}+u_{i-2}\psi_{i-2}]$$
$$+\frac{1}{2\Delta x}(-u_i+|u_i|)\frac{1}{|u_i|}[-u_{i+2}\psi_{i-2}+4u_{i+1}\psi_{i-1}-3\psi_iu_i] \quad \text{(C. 3. 5. 24)}$$

这是二阶精度的。后者用得比较多，也比较稳定。

最常用的是有限解析格式或指数格式。这种格式在B篇中已经讨论过，这里简单地回顾一下。设方程为

$$\varepsilon u_{xx}+a(x)u_x=c(x) \quad \text{(C. 3. 5. 25)}$$

在以 i 点为中心，$(i-1,\ i+1)$ 区间内取 a，c 取 a_i，c_i 值，得

$$\varepsilon u_{xx}+a_iu_i=c_i$$

方程的解为 $u=Ae^{-\frac{a_i}{\varepsilon}x}+B+\frac{c_i}{a_i}x$

由于 $u(x_{i-1})=u_{i+1},u(x_{i-1})=u_{i-1}$，故得

$$\frac{a_i}{\Delta(1-e^{-\lambda\Delta})}\{u_{i+1}-(1+e^{-\lambda\Delta})u_i+e^{-\lambda\Delta}u_{i-1}\}=c_i \quad \text{(C. 3. 5. 26)}$$

其中，$\lambda=a_i/\varepsilon$，$\Delta=x_{i+1}-x_i=x_i-x_{i-1}$，或进一步简写为

$$\varepsilon\sigma\Delta_+\Delta_-u_i+a_i\Delta_0u_i=c_i \quad \text{(C. 3. 5. 27)}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\sigma=\frac{Re_\Delta}{2}\coth\left(\frac{Re_\Delta}{2}\right)\quad Re_\Delta=|\lambda|\Delta x(\text{格子雷诺数})\\&\Delta_+u_i=\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}\qquad\Delta_-u_i=\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}\qquad\Delta_0u_i=\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}\end{aligned}\right\}\quad \text{(C. 3. 5. 28)}$$

Kellogg 分析表明格式精度为

$$|u(x_i)-u_i|\leqslant\frac{c\Delta^2}{\varepsilon+\Delta} \quad \text{(C. 3. 5. 29)}$$

c 为某一与 ε，Δ 无关的常数。$\varepsilon\to0$ 时为一阶精度，ε 比较大时有二阶精度。不难看出，当 $Re_\Delta\to0$ 时变为中心差分格式。$Re_\Delta\to\infty$时有自动迎风性质。

这一性质可以推广到不定常情况中去。方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2u}{\partial x^2} \quad \text{(C. 3. 5. 30)}$$

格式写作

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\frac{f_{i+1}^{n+1}-f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}=\nu\frac{(\sigma u)_{i+1}^{n+1}-2(\sigma u)_i^{n+1}+(\sigma u)_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad \text{(C. 3. 5. 31)}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_i=\frac{a_i\Delta x}{2\nu}\coth\left(\frac{a_i\Delta x}{2\nu}\right)\\&a_i=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_i\end{aligned}\right\}\quad \text{(C. 3. 5. 32)}$$

这一格式由 Kellogg 在 1980 年提出，他证明了本格式不受 Re_Δ 的限制。

上面的方法结合 ADI 方法可以得到二、三维问题的求解过程。在直角坐标下，关于旋度

ζ 的动力学方程可写作

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial u\zeta}{\partial x}+\frac{\partial v\zeta}{\partial y}-\nu\Delta\zeta=0 \tag{C.3.5.33}$$

正交曲线坐标下可写成

$$J\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial U\zeta}{\partial \xi}+\frac{\partial V\zeta}{\partial \eta}=\frac{J\nu}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_\xi}{h_\eta}\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)\right] \tag{C.3.5.34}$$

差分格式为

$$J\Delta_t^+\zeta+\Delta_\xi^0(U\zeta)+\Delta_\eta^0(V\zeta)=\frac{J\nu}{h_\xi^2}\Delta_\xi^+\Delta_\xi^-(\sigma_1\zeta)+\frac{\zeta\nu}{h_\eta^2}\Delta_\eta^+\Delta_\eta^-(\sigma_2\zeta) \tag{C.3.5.35}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_1=\left[\frac{\overline{Re}_{\Delta\xi}}{2}\coth\left(\frac{\overline{Re}_{\Delta\xi}}{2}\right)\right]_{ij}, \qquad \overline{Re}_{\Delta\xi}=\frac{U\Delta\xi}{J\nu/h_\xi^2}\\
&\sigma_2=\left[\frac{\overline{Re}_{\Delta\eta}}{2}\coth\left(\frac{\overline{Re}_{\Delta\eta}}{2}\right)\right]_{ij}, \qquad \overline{Re}_{\Delta\eta}=\frac{V\Delta\eta}{J\nu/h_\eta^2}\\
&U=u\frac{\partial y}{\partial \eta}-v\frac{\partial x}{\partial \eta} \qquad V=-u\frac{\partial y}{\partial \xi}+v\frac{\partial x}{\partial \xi}
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.5.36}$$

求解（C.3.5.35）式则用交替方向的格式，即一个方向上是隐式，另一个方向上则是显式，具体形式如下：

$$\begin{aligned}
&J\frac{\tilde{\zeta}_{ij}-\zeta_{ij}^n}{\Delta t/2}+\frac{U_{i+1,j}\tilde{\zeta}_{i+1,j}-U_{i-1,j}\tilde{\zeta}_{i-1,j}}{2\Delta\xi}+\frac{V_{i,j+1}\zeta_{i,j+1}^n-V_{i,j-1}\zeta_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta}\\
&=\frac{J\nu}{h_\xi^2}\frac{(\sigma_1\tilde{\zeta})_{i+1,j}-2(\sigma_1\tilde{\zeta})_{ij}+(\sigma_1\tilde{\zeta})_{i-1,j}}{\Delta\xi^2}+\frac{J\nu}{h_\eta^2}\frac{(\sigma_2\zeta^n)_{i,j+1}-2(\sigma_2\zeta^n)_{ij}+(\sigma_2\zeta^n)_{i,j-1}}{\Delta\eta^2}\\
&J\frac{\zeta_{ij}^{n+1}-\tilde{\zeta}_{ij}}{\frac{\Delta t}{2}}+\frac{U_{i+1,j}\tilde{\zeta}_{i+1,j}-U_{i-1,j}\tilde{\zeta}_{i-1,j}}{2\Delta\xi}+\frac{V_{i,j+1}\zeta_{i,j+1}^{n+1}-V_{i,j-1}\zeta_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\eta}\\
&=\frac{J\nu}{h_\xi^2}\frac{(\sigma_1\tilde{\zeta})_{i+1,j}-2(\sigma_1\tilde{\zeta})_{ij}+(\sigma_1\tilde{\zeta})_{i-1,j}}{\Delta\xi^2}+\frac{J\nu}{h_\eta^2}\frac{(\sigma_2\zeta^{n+1})_{i,j+1}-2(\sigma_2\zeta^{n+1})_{ij}+(\sigma_2\zeta^{n+1})_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}
\end{aligned} \tag{C.3.5.37}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
U_{ij}&=\frac{1}{2}(3U_{ij}^n-U_{ij}^{n-1})\\
V_{ij}&=\frac{1}{2}(3V_{ij}^n-V_{ij}^{n-1})
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.5.38}$$

边界上 $\zeta\approx\frac{1}{2}(\zeta^{n+1}+\zeta^n)$

以上格式适用于中等雷诺数（～1000）。可以证明，当 Re 增加时，误差不断增加，比如 $Re_{\Delta\xi}$ 比较大时

$$\begin{aligned}
\sigma_1&=\frac{\overline{Re}_{\Delta\xi}}{2}\coth\left(\frac{\overline{Re}_{\Delta\xi}}{2}\right)=\frac{\overline{Re}_{\Delta\xi}}{2}\,\frac{1+e^{-\overline{Re}_{\Delta\xi}}}{1-e^{-\overline{Re}_{\Delta\xi}}}\\
&=\frac{\overline{Re}_{\Delta\xi}}{2}+\overline{Re}_{\Delta\xi}e^{-\overline{Re}_{\Delta\xi}}+O(e^{-2\overline{Re}_{\Delta\xi}})
\end{aligned}$$

设方程只有 ξ 方向，则（C.3.5.37）式有

$$J\frac{\zeta_{ij}^{n+1}-\zeta_{ij}^{n}}{\Delta t}+U_{ij}\frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1}-\zeta_{i-1,j}}{2\Delta\xi}$$

$$=\frac{J\nu}{h_{\xi}^{2}}\overline{R}e_{\Delta\xi}e^{-\overline{R}e_{\Delta\xi}}\frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1}-2\zeta_{ij}^{n+1}+\zeta_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta\xi^{2}}$$

相容方程为

$$J\frac{\partial\zeta}{\partial t}+U_{ij}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}=\frac{2}{\overline{Re}_{\Delta\xi}}\left(\frac{\overline{Re}_{\Delta\xi}}{4}+\overline{Re}_{\Delta\xi}e^{-\overline{Re}_{\Delta\xi}}\right)\frac{\partial^{2}\zeta}{\partial\xi^{2}}$$

在 $\overline{Re}_{\Delta\xi}$ 比较大时（>4），即会出现附加的比较大的人工粘性项。为使 $\overline{Re}_{\Delta\xi}<4$，必须加密网格，这是不经济的作法。在高 Re 数时还要采用更高阶的差分格式，这一点将在第六章中予以介绍。

利用上述方法可以计算平面不可压缩粘性流体绕圆柱的流动。这里引入的 ξ，η 为

$$\eta=\frac{\theta}{2\pi},\quad \xi=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{r}{a}$$

来流的初值可用位势流的计算结果作初值（位势流存在解析解）。当时间趋向无限时，流场计算结果趋于稳定，其计算结果在 $Re=40$，$L/D=2.0$ 时如图 C.3.38 所示。与之相应的实验照片如图 C.3.39 所示，其中 $L/D=2.1$。从二者的比较看，其结果是可信的。

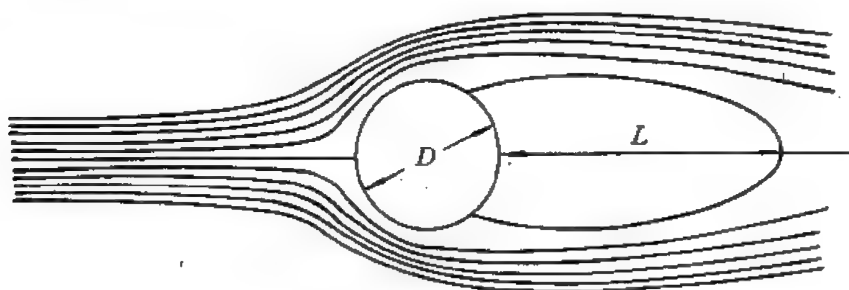


图 C.3.38



图 C.3.39

对于不同 Re 数的情况，阻力系数的计算结果如表 B.3.2。其中 $C_D=F_D/\left(\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 D\right)$ 为阻力系数。与实验结果的比较见图 C.3.40。

表 B.3.2

Re	1	20	40	200	500	1000
$\|p\|_{max}$	0.07	0.04	0.04	0.026	0.016	0.008
C_D	12.85	2.60	2.128	1.617	1.569	1.617

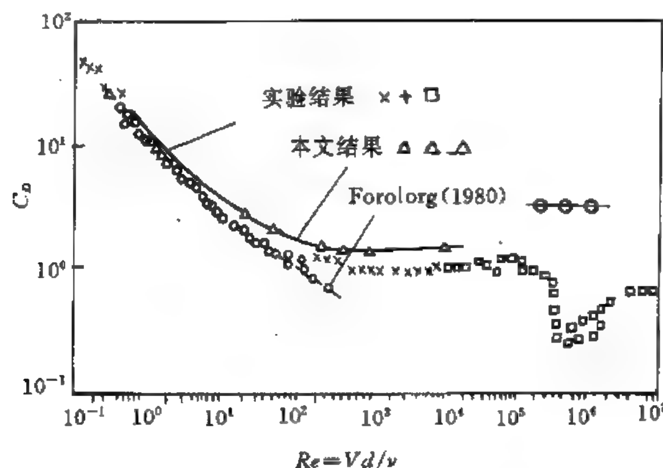


图 C.3.40

应该指出，如果计算中不采取任何措施，则 Re 数提高时计算仍能趋向一个对称的稳定结果，这与实际情况不符，因为实际上会有交替脱落的涡产生。为此在计算中要加干扰，我们采用的方法是令圆柱沿一个方向转动，又向另一个方向转动，最后停下来，可以看到涡的对称脱落。在其它计算方法中存在同样的问题，这一点将在以后的章节中叙述。

3.6 用有限元法求解不可压缩粘性流体流动方程

用有限元法解流动问题的优点是对流场形状没有什么限制，边界条件也比较容易处理，因此长期以来人们一直在想办法将其应用于流体力学问题。但是由于以下几个问题而使这种努力受到挫折：

(1) 流体力学有粘流动的算子是非对称的，不能形成固体力学中的对称正定刚度阵，而且流体力学中的有限元一般生成非线性代数方程组，所以求解比较困难。只有少数情况下(如理想流体无旋运动、极缓慢流动等)才形成线性的对称正定的方程组。

(2) 有限元方程的建立、求解比有限差分法要麻烦得多，而且计算不定常流动时每一时间步长都要求解一次，相当繁琐，所以人们更愿意采用有限差分法。

(3) 计算表明，在计算不可压缩流动时，保证连续性方程条件的满足是十分重要的，由于有限元法不易保证连续方程所需条件的严格满足(至少是在离散的意义上)，而有限差分法通过修正压力使连续方程条件得到比较好的满足，这就使有限差分法在这一点上优于有限元法。

鉴于以上原因，有限元法长期以来在流体力学中应用并不广泛。但近年来由于计算方法的改进，有限元法的应用已是一个重要的研究领域。本节将介绍有限元法的早期应用和一些改进的措施，供读者参考。

下面主要讨论平面的粘性流体流动，无量纲化后基本方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\end{aligned}\right\}\tag{C.3.6.1}$$

为了建立有限元方程，这里只能采用加权余量法。在方程（C.3.6.1）中待解的变量为 u，v，p，边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{ij}n_j=f_i(\text{对于 } j \text{ 从 1 到 2 求和}) \text{ 在 } \Gamma_1 \text{ 上}\\&\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\\&v_i n_i=g(\text{对于 } i \text{ 从 1 到 2 求和}) \text{ 在 } \Gamma_2 \text{ 上}\end{aligned}\right\}\tag{C.3.6.2}$$

这里第 1 种条件是应力条件，第 2 种条件是速度条件。另外在许多情况下，人们给出条件

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial n}=0\\&\boldsymbol{V}|_{\Gamma}=\boldsymbol{g}\quad(\text{物面条件})\end{aligned}\right\}\tag{C.3.6.3}$$

当然第 1 个条件在很多情况下只是近似的，关于压力条件的详细讨论可参考 Gresho 的文章。

现在假设有 3 个权函数 W_p，W_u，W_v，则加权余量公式为

$$\left.\begin{aligned}&\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)W_p\mathrm{d}\Omega=0\\&\int_\Omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]W_u\mathrm{d}\Omega=0\\&\int_\Omega\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]W_v\mathrm{d}\Omega=0\end{aligned}\right\}\tag{C.3.6.4}$$

如果考虑到原始的推导（见 B 篇），动力学方程可以写作

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}=0\\&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{C.3.6.5}$$

又考虑到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial_x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}\right)W_u\mathrm{d}\Omega\\&=\int_\Omega\left[\frac{\partial\sigma_{xx}W_u}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}W_u}{\partial y}-\sigma_{xx}\frac{\partial W_u}{\partial x}-\sigma_{yx}\frac{\partial W_u}{\partial y}\right]\mathrm{d}\Omega\\&=\oint_{\partial\Omega}W_u(\sigma_{xx}n_x+\sigma_{yx}n_y)\mathrm{d}\partial\Omega-\int_\Omega\left(\sigma_{xx}\frac{\partial W_u}{\partial x}+\sigma_{yx}\frac{\partial W_u}{\partial_y}\right)\mathrm{d}\Omega\\&=\oint_{\partial\Omega}W_u\sigma_{nx}\mathrm{d}\partial\Omega-\int_\Omega\left(\sigma_{xx}\frac{\partial W_u}{\partial x}+\sigma_{yx}\frac{\partial W_u}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

类似地，有

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}\right)W_v\mathrm{d}\Omega=\oint_{\partial\Omega}W_v\sigma_{ny}\mathrm{d}\partial\Omega-\int_\Omega\left(\sigma_{xy}\frac{\partial W_v}{\partial x}+\sigma_{yy}\frac{\partial W_v}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega$$

将它们代入（C.3.6.4）式得

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)W_p\mathrm{d}\Omega=0\\
&\int_{\Omega}\left\{W_u\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\left[(-p+\tau_{xx})\frac{\partial W_u}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial W_u}{\partial y}\right]\right\}\mathrm{d}\Omega\\
&-\int_{\partial\Omega}[(-p+\tau_{xx})\cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y)]W_u\mathrm{d}\partial\Omega=0\\
&\int_{\Omega}\left\{W_v\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\left[\tau_{yx}\frac{\partial W_v}{\partial x}+(-p+\tau_{yy})\frac{\partial W_v}{\partial y}\right]\right\}\mathrm{d}\Omega\\
&-\int_{\partial\Omega}[\tau_{yx}\cos(n,x)+(-p+\tau_{yy})\cos(n,y)]W_v\mathrm{d}\partial\Omega=0
\end{aligned}\right\}\quad(\text{C. 3. 6. 6})
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&\tau_{ij}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)(i,j=1,2)\\
&u_1=u,u_2=v;x_1=x,x_2=y
\end{aligned}\right\}\quad(\text{C. 3. 6. 7})
$$

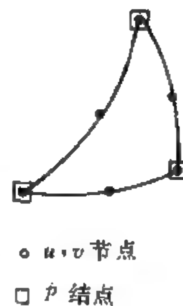


图 C. 3. 41

为了形成有限元方程，要选择试函数（即插值函数）和试验函数（即权函数）。在这里压力和速度需采用不同阶数的插值函数，这是因为压力作用下产生的理想流体的动量传递是一阶的，而由应变率引起的粘性动量传递是二阶量。事实上如果压力和速度采用同阶逼近时，生成的代数方程将是病态的。如果采用不同阶则可克服这一困难。所以这里采用混合单元的方法，比如用三角单元，则在 3 个顶点及 3 个边中心点上定义速度值，而在 3 个顶点定义压力值（图 C. 3. 41），于是

$$
\left.\begin{aligned}
u&=\sum_i\varphi_i^u(r)u_i\\
v&=\sum_i\varphi_i^v(r)v_i\\
p&=\sum_j\varphi_j^p(r)p_j
\end{aligned}\right\}\quad(\text{C. 3. 6. 8})
$$

其中 φ^u，φ^v，φ^p 分别为 u，v，p 的插值函数，i，j 为节点，另外将 W_p，W_u，W_v 选为φ^p，φ^u，φ^v，于是代入（C. 3. 6. 6）式得

$$
\int_{\Omega}\left[\sum_i u_i\frac{\partial\varphi_i^u(r)}{\partial x}+\sum_i v_i\frac{\partial\varphi_i^v(r)}{\partial y}\right]\varphi_j^p(r)\mathrm{d}\Omega=0\quad(\text{C. 3. 6. 9-1})
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left\{\varphi_j^u(r)\left[\sum_i\varphi_i^u\dot{u}_i+\sum_{i1,i2}u_{i1}u_{i2}\varphi_{i1}^u\frac{\partial\varphi_{i2}^u}{\partial x}+\sum v_{k1}u_{k2}\varphi_{k1}^u\frac{\partial\varphi_{k2}^u}{\partial y}\right]\right.\\
&\left.+\frac{\partial\varphi_j^u}{\partial x}\left[-\sum_i p_i\varphi_i^p+\frac{2}{Re}\sum_i u_i\frac{\partial\varphi_i^u}{\partial x}\right]+\frac{\partial\varphi_j^u}{\partial y}\left[\frac{1}{Re}\left(\sum_i\frac{\partial\varphi_i^u}{\partial y}u_i+\sum_i\frac{\partial\varphi_i^v}{\partial x}v_i\right)\right]\right\}\mathrm{d}\Omega\\
&-\int_{\partial\Omega}[(-p+\tau_{xx})\cos(n,x)+\tau_{yx}\cos(n,y)]\varphi_j^u\mathrm{d}\partial\Omega=0
\end{aligned}\quad(\text{C. 3. 6. 9-2})
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\left\{\varphi_j^v(r)\left[\sum_i\varphi_i^v\dot{v}_i+\sum_{k1k2}u_{k1}v_{k1}\varphi_{k1}^u\frac{\partial\varphi_{k2}^v}{\partial x}+\sum_{i1,i2}v_{i1}v_{i2}\varphi_{i1}^v\frac{\partial\varphi_{i2}^v}{\partial y}\right]\right.\\
&\left.+\frac{\partial\varphi_j^v}{\partial x}\left[\frac{1}{Re}\left(\sum_i^I\frac{\partial\varphi_i^v}{\partial x}v_i+\sum_i^I\frac{\partial\varphi_i^u}{\partial y}u_i\right)\right]+\frac{\partial\varphi_i^v}{\partial y}\left[-\sum_i^I p_i\varphi_i^p+\frac{2}{Re}\sum_i v_i\frac{\partial\varphi_i^v}{\partial y}\right]\right\}\mathrm{d}\Omega\\
&-\int_{\partial\Omega}[\tau_{xy}\cos(n,x)+(-p+\tau_{yy})\cos(n,y)]\mathrm{d}\partial\Omega=0
\end{aligned}\quad(\text{C. 3. 6. 9-3})
$$

可以看出 (C. 3. 6. 9-1) 式有 J 个，J 为定义未知量 p 的节点数。(C. 3. 6. 9-2) 式及 (C. 3. 6. 9-3) 式各有 I 个，其中 I 为定义未知速度量的节点数，不难看出方程是非线性的。上式可简化为

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{I} A_{ij}u_i + \sum_{i=1}^{I} B_{ij}v_i = 0 \quad j = 1,2,\cdots,J \\
&\sum_{i=1}^{I} A_{Tij}\dot{u}_i + \sum_{i1,i2}^{I} \tilde{A}_{i1,i2,j}u_{i1}u_{i2} + \sum_{k1,k2}^{I} \tilde{B}_{k1,k2,j}v_{k1}u_{k2} - \sum_{i}^{J} P_{ij}^{(1)}p_i \\
&+ \sum_{i}^{I} A_{ij}^{(1)}u_i + \sum_{i}^{I} B_{ij}^{(1)}u_i = Q_j^{\text{I}} \qquad j = 1,2,\cdots,I \\
&\sum_{i=1}^{I} B_{Tij}\dot{v}_i + \sum_{k1k2}^{I} \tilde{\tilde{A}}_{k1k2}u_{k1}v_{k2} + \sum_{i1,i2}^{I} \tilde{\tilde{B}}_{i1,i2,j}v_{i1}v_{i2} + \sum_{i}^{I} A_{ij}^{(2)}u_i \\
&+ \sum_{i=1}^{I} B_{ij}^{(2)}v_i - \sum_{i=1}^{J} P_{ij}^{(2)}p_i = Q_j^{\text{II}} \qquad j = 1,2,\cdots,I
\end{aligned}\right\} \quad (C.3.6.10)$$

其中

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_\Omega \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial x}\varphi_j^p \mathrm{d}\Omega, \quad B_{ij} = \int_\Omega \frac{\partial \varphi_i^v}{\partial y}\varphi_j^p \mathrm{d}\Omega \\
A_{Tij} &= \int_\Omega \varphi_i^u \varphi_j^u \mathrm{d}\Omega, \quad \tilde{A}_{i1,i2,j} = \int_\Omega \varphi_i^u \frac{\partial \varphi_{i2}^u}{\partial x}\varphi_j^u \mathrm{d}\Omega \\
\tilde{B}_{k1,k2j} &= \int_\Omega \varphi_{k1}^v \frac{\partial \varphi_{k2}^u}{\partial y}\varphi_j^u \mathrm{d}\Omega, \quad P_{ij}^{(1)} = \int_\Omega \varphi_i^p \frac{\partial \varphi_j^u}{\partial x}\mathrm{d}\Omega \\
A_{ij}^{(1)} &= \int_\Omega \left(\frac{2}{Re}\frac{\partial \varphi_j^u}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial x} + \frac{1}{Re}\frac{\partial \varphi_j^u}{\partial y}\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial y} \right) \mathrm{d}\Omega \\
B_{ij}^{(1)} &= \int_\Omega \frac{1}{Re}\frac{\partial \varphi_j^u}{\partial y}\frac{\partial_i^v}{\partial x}\mathrm{d}\Omega \\
Q_j^{\text{I}} &= \int_{\partial\Omega} [(-p + \tau_{xx})\cos(n,x) + \tau_{yx}\cos(n,y)]\varphi_j^u \mathrm{d}\partial\Omega \\
B_{Tij} &= \int_\Omega \varphi_j^v \varphi_i^v \mathrm{d}\Omega, \quad \tilde{\tilde{A}}_{k1,k2j} = \int_\Omega \varphi_{k1}^u \frac{\partial \varphi_{k2}^v}{\partial x}\varphi_j^v \mathrm{d}\Omega \\
\tilde{\tilde{B}}_{i1,i2,j} &= \int_\Omega \varphi_{i1}^v \frac{\partial \varphi_{i2}^v}{\partial y}\varphi_j^v \mathrm{d}\Omega, \quad P_{ij}^{(2)} = \int_\Omega \varphi_i^p \frac{\partial \varphi_j^v}{\partial y}\mathrm{d}\Omega \\
A_{ij}^{(2)} &= \int_\Omega \frac{1}{Re}\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j^v}{\partial x}\mathrm{d}\Omega \\
B_{ij}^{(2)} &= \int_\Omega \left(\frac{1}{Re}\frac{\partial \varphi_j^v}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i^v}{\partial x} + \frac{1}{Re}\frac{\partial \varphi_i^v}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j^v}{\partial y} \right) \mathrm{d}\Omega \\
Q_j^{\text{II}} &= \int_{\partial\Omega} [\tau_{xy}\cos(n,x) + (-p + \tau_{yy})\cos(n,y)]\varphi_j^v \mathrm{d}\partial\Omega
\end{aligned} \quad (C.3.6.11)$$

由 (C. 3. 6. 10) 式可知，方程是非线性的，(C. 3. 6. 10) 式形式上可写作

$$T\dot{V} + EVV^{\mathrm{T}} + AV = Q \quad (C.3.6.12)$$

其中 V 为列向量，T，E，A 为相应的系数矩阵，V 列向量是由 u，v，p 组成。

定常问题时 $\dot{V}=0$，只需解一个二阶代数方程组，可以用迭代法求解。当 Re 高时难度则很大。下面介绍几种求解方法。

1. 牛顿-拉斐逊法

设方程组为

$$F(z)=0 \tag{C.3.6.13}$$

则解为如下的迭代，即

$$z^{(k+1)}=z^{(k)}-\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^{-1}F(z^{(k)}) \tag{C.3.6.14}$$

对于低 Re，可以用

$$AV^{(k+1)}=-(EVV^{\mathrm{T}})^{(k)}+Q \tag{C.3.6.15}$$

也能得到收敛的解。但对高 Re 难度很大。

对于不定常流动，时间方向可以用前差、后差或中心差。前差时

$$T\frac{V^{(n+1)}-V^{(n)}}{\Delta t}+(EVV^{\mathrm{T}}+AV)^{(n)}=F^{(n)} \tag{C.3.6.16}$$

后差，即隐式格式

$$T\frac{V^{(n+1)}-V^{(n)}}{\Delta t}+(EVV^{\mathrm{T}}+AV)^{(n+1)}=F^{(n+1)} \tag{C.3.6.17}$$

中心差，即 Crank-Nicolson 格式

$$T\frac{V^{(n+1)}-V^{(n)}}{\Delta t}+\frac{1}{2}[(EVV^{\mathrm{T}}+AV)^{(n+1)}$$

$$+(EVV^{\mathrm{T}}+AV)^{(n)}]=\frac{1}{2}[F^{(n+1)}+F^{(n)}] \tag{C.3.6.18}$$

应该指出，隐式格式求解又需要用牛顿-拉斐逊法，比较困难；显式格式则比较简单，但必须注意 Δt 的限制。因为格式是有条件隐定的，其稳定条件的选取只能作一近似的分析。首先把（C.3.6.12）式作近似线性化，也就是说改写为

$$T\dot{V}+E_0V+AV=F \tag{C.3.6.19}$$

然后得到

$$\dot{V}+T^{-1}(E_0+A)V=T^{-1}F \tag{C.3.6.20}$$

设 λ_D 是 T^{-1}（E_0+A）$=D$ 的特征，且

$$|\lambda|_{\max}=\max_{\forall\lambda_D}\{|\lambda_D|\} \tag{C.3.6.21}$$

于是稳定条件为

$$\Delta t<\frac{h_{\min}}{|\lambda|_{\max}} \tag{C.3.6.22}$$

其中 $h_{\min}$ 是最小网格直径。有时 T 是一个不可逆阵，一般说要将关于连续方程的方程列出来，得到一组方程，将其余方程组合起来，然后作类似分析。但实际上 $|\lambda|_{\max}$ 本身的估计就十分困难，所以只有用实际运算来估计。

这一方法可以推广到非牛顿流体的流动。

关于有限元方法的误差估计已有不少人作了大量工作，一般要用泛函作工具，而且得到的也只是一个估计，所以这里不作介绍。有兴趣的读者可参考有关的专著。

后来为了适应流动问题的计算，有限元方法也有了一些新的进展，下面对此作简要介绍。

2. 迎风有限元

这一方法的思想和迎风差分格式有同一基础。为了说明迎风有限元的思想，先讨论一阶常微分方程

$$\left.\begin{aligned}-k\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1\\ u(0)=u(1)=0\end{aligned}\right\}\tag{C.3.6.23}$$

它的解为

$$u(x)=\frac{1}{a}\left[x-\frac{(1-\mathrm{e}^{\lambda x})}{(1-\mathrm{e}^{\lambda})}\right]\tag{C.3.6.24}$$

其中 $\lambda=a/k$

如果用有限解析法，所得的差分格式为

$$\frac{u_{i+1}-(1+\mathrm{e}^{\bar{\lambda}})u_i+\mathrm{e}^{\bar{\lambda}}u_{i-1}}{\frac{\Delta x}{a}(1-\mathrm{e}^{\bar{\lambda}})}=1\tag{C.3.6.25}$$

其中 $\bar{\lambda}=\lambda\cdot\Delta x=a\Delta x/k$

上式可改写为

$$a\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}+k\frac{\bar{\lambda}}{2}\frac{1+\mathrm{e}^{\bar{\lambda}}}{1-\mathrm{e}^{\bar{\lambda}}}\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta x^2}=1\tag{C.3.6.26}$$

或

$$a\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}+\left(-k+k-k\frac{\bar{\lambda}}{2}\mathrm{cth}\frac{\bar{\lambda}}{2}\right)\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta x^2}=1\tag{C.3.6.27}$$

或

$$a\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}-k\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta x^2}-k\left[\frac{\bar{\lambda}}{2}\mathrm{cth}\frac{\bar{\lambda}}{2}-1\right]\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta x^2}=1\tag{C.3.6.28}$$

这里相当于增加一个人工粘性项，粘性系数为

$$k'=k\left[\frac{\bar{\lambda}}{2}\mathrm{cth}\frac{\bar{\lambda}}{2}-1\right]\tag{C.3.6.29}$$

另一方面（C.3.6.23）式的上风格式为

$$-k\frac{u_{i+1}-2u_i-u_{i-1}}{\Delta x^2}+a\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}=1\tag{C.3.6.30}$$

下风格式为

$$-k\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta x^2}+a\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}=1\tag{C.3.6.31}$$

将上、下风格式组合得

$$-k\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta x^2}+a\left[\alpha\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}+(1-\alpha)\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}\right]=1\tag{C.3.6.32}$$

其中 α 的选用方法是

$$\left.\begin{aligned}a>0\text{ 时}\qquad 1\geqslant\alpha\geqslant\frac{1}{2}\\ a<0\text{ 时}\qquad \frac{1}{2}\geqslant\alpha\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{C.3.6.33}$$

比较（C.3.6.32）式和（C.3.6.28）式可知当

$$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{cth}\frac{\bar{\lambda}}{2}-\frac{1}{\bar{\lambda}}\tag{C.3.6.34}$$

时，二式完全相同，这就是说（C.3.6.34）式是 α 的最优选择。

同样，如果（C.3.6.23）式用标准的有限元方程法，则可得到与有限差分中心格式相同的形式。计算结果可能产生振荡，而用上面（C.3.6.28）式的上风格式则可以得到误差最小的解（与精确解比较）。

像过去一样将方程记作 $L(u)=f$，设加权函数为 W，则余量法要求

$$\int_{\Omega}[L(u)-f]W\mathrm{d}\Omega=0 \qquad \text{(C.3.6.35)}$$

图 C.3.42

一般说 W 选用 φ_j，φ_j 在 (x_{j-1},x_j) 及 (x_j,x_{j+1}) 中分别为两个线性函数，如图 C.3.42 中粗实线所示。

而在上风有限元中，则设

$$W_j=\begin{cases}\varphi_j(x)+\dfrac{\alpha_j}{h_j}N\left(\dfrac{x-x_{j-1}}{h_j}\right) & x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j\\ \varphi_j(x)-\dfrac{\alpha_j}{h_{j-1}}N\left(\dfrac{x_{j-1}-x}{h_{j-1}}\right) & x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1}\end{cases} \qquad \text{(C.3.6.36)}$$

其中

$$h_j=x_j-x_{j-1}$$

$$h_{j+1}=x_{j+1}-x_j$$

$$N(\xi)=3\xi(1-\xi)$$

显然如图所示 $\alpha_j>0$，故上风占优；如果 $\alpha_j<0$ 则下风占优。利用 W_j，可以对（C.3.6.33）式作有限元，由此得

$$\begin{aligned}&k\left[-\frac{1}{h_j}u_{j-1}+\left(\frac{1}{h_j}+\frac{1}{h_{j+1}}\right)u_j-\frac{1}{h_{j+1}}u_{j+1}\right]\\&+a\left(-\frac{1+\alpha}{2}u_{j-1}+\alpha u_j+\frac{1-\alpha}{2}u_{j-1}\right)\\&=\frac{1+\alpha}{2}h_j+\frac{1-\alpha}{2}h_{j+1}\end{aligned} \qquad \text{(C.3.6.37)}$$

当 $h_j=h_{j+1}=\Delta x$ 时，上式可得

$$k\left(1+\frac{\alpha a}{2k}\Delta x\right)\frac{2u_j-u_{j-1}-u_{j+1}}{2\Delta x^2}+a\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2\Delta x}=1 \qquad \text{(C.3.6.38)}$$

显然当 $\alpha=\operatorname{cth}\dfrac{\bar{\lambda}}{2}-\dfrac{2}{\bar{\lambda}}$ 时与精确解吻合，另外很容易证明稳定条件为

$$\left.\begin{array}{l}|\bar{\lambda}|\leqslant L\\ \text{或}\quad |\alpha|\geqslant 1-\dfrac{2}{|\bar{\lambda}|}\end{array}\right\} \qquad \text{(C.3.6.39)}$$

从上面简单的例子中可以看出，上风有限元的实质是将权函数向上游扭曲，使得建立的有限元格式具有迎风性。这一思想可以推广到二维问题中去。

二维时对流扩散方程可以写为

$$-k\Delta u+\boldsymbol{a}\cdot\nabla u=f \qquad \text{(C.3.6.40)}$$

$$u|_{\Gamma}\ \text{已知}$$

选权函数为 W_j，则由加权余量法可建立下面的方程

$$\int_{\Omega}[-k\Delta u+\boldsymbol{a}\cdot\nabla u-f]W_j\mathrm{d}\Omega=0 \qquad \text{(C.3.6.41)}$$

分步积分后得

$$\int_{\Omega}[k\nabla u\cdot\nabla W_j+(a\cdot\Delta u)W_j-fW_j]\mathrm{d}\Omega-\int_{\partial\Omega}kW_j\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\partial\Omega=0\quad(C.3.6.42)$$

可设

$$u=\sum u_i\varphi_i\quad(C.3.6.43)$$

在三角形单元时

$$\left.\begin{aligned}W_1(\xi_1\xi_2\xi_3)&=\xi_1-3\alpha_3\xi_1\xi_2+3\alpha_2\xi_1\xi_3\\W_2(\xi_1\xi_2\xi_3)&=\xi_2-3\alpha_1\xi_2\xi_3+3\alpha_3\xi_2\xi_1\\W_3(\xi_1\xi_2\xi_3)&=\xi_3-3\alpha_2\xi_3\xi_1+3\alpha_1\xi_3\xi_2\end{aligned}\right\}\quad(C.3.6.44)$$

其中 ξ_1，ξ_2，ξ_3 为单元的面积坐标。

3. 集中质量矩阵法

对于一、二、三维流动采用线性和二次等参元以及适当的积分公式，就可将质量矩阵化为对角线矩阵，从而大大简化计算。

下面以二维流动的 4 节点和 9 节点的等参元来说明这一点。

质量矩阵中的元素为

$$M_{ij}=\int_{\Omega}\varphi_i\varphi_j\mathrm{d}\Omega=\sum_e\int_{\Omega_e}N_p^{(e)}N_q^{(e)}\mathrm{d}\Omega_e\delta_{ip}^{(e)}\delta_{iq}^{(e)}\quad(C.3.6.45)$$

形函数 $N_p^{(e)}$ 具有如下的性质

$$N_p^{(e)}(\xi_q,\eta_q)=\delta_{qp}\quad(C.3.6.46)$$

对于 4 结点和 9 结点的等参元分别用梯形公式及 Simpson 公式，则有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_e}f\mathrm{d}\Omega&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(\xi,\eta)\,|J^{(e)}(\xi,\eta)|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&=\sum_{p=1}^{n}f(\xi_p,\eta_p)\,|J^{(e)}(\xi_p,\eta_p)|\,W_p\end{aligned}\quad(C.3.6.47)$$

其中 n 为积分结点数，梯形公式 $n=4$，Simpson 公式 $n=9$，W_p 为积分权数。梯形公式全部 $W_p=1$，Simpson 公式中，4 个角点 $W_p=1/9$，4 个边点为 $W_p=4/9$，中心点 $W_p=16/9$。

$$J^{(e)}(\xi,\eta)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x^{(e)}}{\partial\xi}&\dfrac{\partial x^{(e)}}{\partial\eta}\\\dfrac{\partial y^{(e)}}{\partial\xi}&\dfrac{\partial y^{(e)}}{\partial\eta}\end{vmatrix}\quad(C.3.6.48)$$

为 Jacobi 行列式。又

$$\left.\begin{aligned}x^{(e)}&=\sum_{p=1}^{n}N_p^{(e)}(\xi,\eta)x_p^{(e)}\\y^{(e)}&=\sum_{p=1}^{n}N_p^{(e)}(\xi,\eta)y_p^{(e)}\end{aligned}\right\}\quad(C.3.6.49)$$

将这些公式代入 M_{ij}的计算公式，可得

$$\left.\begin{aligned}M_{pq}^{(e)}&=\int_{\Omega^{(e)}}N_p^{(e)}N_q^{(e)}\mathrm{d}\Omega=\delta_{pq}\,|J_q^{(e)}|\,W_q\\M_{ij}&=\delta_{ij}\sum_{e=1}^{E}\sum_{q=1}^{n}|J_q^{(e)}|\,W_q\delta_{qj}^{(e)}\end{aligned}\right\}\quad(C.3.6.50)$$

以上 $\delta_{ip}^{(e)}$表示如果总序号 i 点与单元内 p 点重合时为 1，否则为零；E 为单元总数，n 为单元上的节点数。

4. 集中质量的迎风有限元法

大家知道，迎风有限元法的权函数是非对称的，权函数比形函数复杂，所以计算工作量比较大，对扩散项处理带来了不合理的结果。

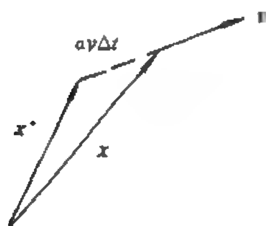


图 C.3.43

为了解决这些问题，1980年，吴江航在Galerkin有限元的范围内提出了另一种集中质量的迎风有限元法，其思想是针对方程

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\nabla(cv)=V\cdot(k\nabla c)+f \qquad (C.3.6.51)$$

其中 c 为某一标量，v 为流体运动速度，k 为一常数。

首先进行时间上的差分离散，在时间差分的时间间隔中，在"迎风"位置

$$x^*=x-\alpha v\Delta t \qquad (C.3.6.52)$$

计算对流项，如图C.3.43所示。α 为迎风度。

于是有

$$\nabla\cdot(cv)=\nabla[c(x-\alpha v^n\Delta t,n\Delta t)v^n]$$

$$=\nabla\cdot(cv)^n-\nabla\cdot(vv\cdot\nabla c)^n\alpha\Delta t+O(\Delta t^2) \qquad (C.3.6.53)$$

$$\frac{c^{n+1}-c^n}{\Delta t}+\nabla(cv)^n=\nabla(k\nabla c)+\nabla(vv\cdot\nabla c)^n\alpha\Delta t+f \qquad (C.3.6.54)$$

对上式采用一般Galerkin有限元法即可求解。

采用4结点或9结点等参元，分别利用梯形或Simpson公式就可得到另外一种集中质量的迎风有限元格式。

这种方法的优点是可以采用通常的Galerkin表达式的算法和程序，对于一、二、三维问题可以进行统一处理，缺点是引入了张量粘性 $\nabla\cdot(vv\cdot\nabla c)^n\alpha\Delta t$，产生耗散，计算量也增加。

更为简单的是集中质量的迎风有限元法，其主要思想是在一阶三角形网格上，将具有连续质量分布的流体用集中质量表示（质量集中在三角形网格的结点），即 $\rho(x,y)$ 近似为

$$\rho(x,y)\sim\sum_{i=1}^{N}M_i\delta(x-x_i,y-y_i) \qquad (C.3.6.55)$$

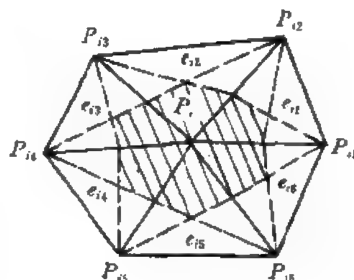


图 C.3.44

对于不可压缩流体，$\rho(x,y)\equiv1$，$M_i=A_i$，对于二维问题，A_i 为三角形网格上结点 P_i 的集中质量区域的面积，这一面积如图C.3.44所示。

仍以（C.3.6.51）式为例，用Galerkin方法，则

$$\int_\Omega\varphi_i\rho\frac{Dc}{Dt}d\Omega=\int_\Omega\varphi_i\sum_{j=1}^{n}A_j\delta(x-x_i,y-y_i)\frac{Dc}{Dt}d\Omega$$

$$=\int_{\partial\Omega}k\frac{\partial c}{\partial n}d\partial\Omega-\int_\Omega k\nabla\varphi_i\cdot\nabla c d\Omega$$

$$+\int_\Omega\varphi_i\sum_{j=1}^{n}A_j\delta(x-x_j,y-y_j)fd\Omega \qquad (C.3.6.56)$$

设 $\frac{\partial c}{\partial n}|_{\partial\Omega}=0$，则上式可写为

$$A_i\left(\frac{Dc}{Dt}\right)_i = -\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega} k\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \mathrm{d}\Omega \cdot c_j + A_i f \tag{C.3.6.57}$$

其中$\left(\frac{Dc}{Dt}\right)_i$在迎风单元上离散，取为

$$\begin{aligned}\left(\frac{Dc}{Dt}\right)_i &= \frac{c_i^{n+1}-c_i^n}{\Delta t} + (v\cdot\nabla c)_i^n \\ &= \frac{c_i^{n+1}-c_i^n}{\Delta t} + a_{ii}c_i^n + a_{ii\beta}c_{i\beta}^n + a_{ii\gamma}c_{i\gamma}^n\end{aligned} \tag{C.3.6.58}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_{ii} &= \frac{1}{2S^{(e_i)}}[u_i^n(y_{i\beta}-y_{i\gamma}) + v_i^n(x_{i\gamma}-x_{i\beta})] \\ a_{ii\beta} &= \frac{1}{2S^{(e_i)}}[u_i^n(y_{i\gamma}-y_i) + v_i^n(x_i-x_{i\gamma})] \\ a_{ii\gamma} &= \frac{1}{2S^{(e_i)}}[u_i^n(y_i-y_{i\beta}) + v_i^n(x_{i\beta}-x_{i\gamma})] \end{aligned}\right\} \tag{C.3.6.59}$$

$x_{i\alpha}$，$x_{i\beta}$，$x_{i\gamma}$，$y_{i\alpha}$，$y_{i\beta}$，$y_{i\gamma}$是 i 单元中 α，β，γ 点的坐标，$S^{(e_i)}$为单元的面积。

这样，由（C.3.6.58）式可得

$$c_i^{n-1} = [1-(a_{ii}+b_{ii})\Delta t]c_i - \sum_{k=1}^{n_i}(a_{iik}+b_{iik})\Delta t c_{ik}^n + f_i^n\Delta t \tag{C.3.6.60}$$

p_{ik}为 p_i 的相邻结点，n_i 为相邻结点数

$$\left.\begin{aligned} a_{iik} &= a_{ii\beta}\delta_{ik,i\beta} + a_{ii\gamma}\delta_{ik,i\gamma} \\ b_{iik} &= \sum_{e=1}^{E}\int S^{(e)}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\lambda=1}^{3}k\varphi_\alpha^{(e)}\varphi_\lambda^{(e)}\mathrm{d}\Omega\delta_{\alpha i}^{(e)}\delta_{\lambda k}^{(e)}/A_i \\ &= \sum_{e=1}^{E}\frac{k}{4S^{(e)}}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}[(x_\beta^{(e)}-x_\gamma^{(e)})(x_\mu^{(e)}-x_\gamma^{(e)}) \\ &\quad +(y_\beta^{(e)}-y_\gamma^{(e)})(y_\mu^{(e)}-y_\gamma^{(e)})]\delta_{\alpha_i}^{(e)}\delta_{\lambda_{ik}}^{(e)}/A_i \end{aligned}\right\} \tag{C.3.6.61}$$

α，β，$\gamma=1$，2，3；λ，μ，$\nu=1$，2，3，进行反时针的循环置换。

可以证明，当三角形的所有内角均为锐角时

$$\left.\begin{aligned} & a_{ii}>0 \quad a_{ii\beta}<0 \qquad a_{ii\gamma}<0 \\ & a_{ii}+a_{ii\beta}+a_{ii\gamma}=0 \\ & b_{ii}>0 \qquad b_{iik}>0 \qquad k=1,2,\cdots,n_i \\ & b_{ii}+\sum_{k=1}^{n_i}b_{iik}=0 \\ & 0<a_{ii}\leqslant\frac{V}{d} \qquad 0<b_{ii}\leqslant\frac{3k}{d^2} \end{aligned}\right\} \tag{C.3.6.62}$$

其中 $V=\max\limits_{\forall i}\sqrt{u_i^2+v_i^2}$，$d$ 为三角形单元中最短垂线之长度。

当 $\Delta t \leqslant \dfrac{1}{\left(\dfrac{V}{d}+\dfrac{3k}{d^2}\right)}$时，(C. 3. 6. 60) 式中右端所有系数皆为正，其和为 j，因而有

$$\min c_j^n + \min_j f_j^n \Delta t \leqslant c_i^{n+1} \leqslant \max_j c_j^n + \max_j f_j^n \Delta t \tag{C. 3. 6. 63}$$

即当 $\Delta t = \dfrac{1}{\dfrac{V}{d}+\dfrac{3k}{d^2}}$时

$$\min_{(x,y)\in\Omega} c^0 + \min_{\substack{(x,y)\in\Omega\\ t\in[0,T]}} f\Delta t \leqslant c_i^n \leqslant \max_{(x,y)\in\Omega} c^0 + \max_{\substack{(x,y)\in\Omega\\ t\in[0,T]}} f\Delta t \tag{C. 3. 6. 64}$$

这表明 (C. 3. 6. 58) 格式是 L_∞ 稳定的。

5. 罚函数法

在有限元方法中有 3 种不同的方法来处理不可压缩的约束条件。第 1 种方法是将压力的插值函数当作 Galerkin 方法的权函数，第 2 种方法是选取速度及插值函数对于每个单元在积分意义下满足不可压缩条件；第 3 种方法就是罚函数法。

罚函数法主要特点是在连续方程上人为地加上一虚设项$\frac{1}{\lambda}p^{(\lambda)}$，当 $1/\lambda \to 0$ 时这一项就没有了。这时连续方程为

$$\frac{1}{\lambda}p^{(\lambda)} + \nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{C. 3. 6. 65}$$

其它方程和边界条件不变。当 λ 很大时就越逼近真实情况，但 λ 太大计算又有很多困难，所以本方法只作参考使用。

利用有限元法计算的例子很多，这里介绍几个基本例子。

方框流的计算是检验此方法的一个重要例子。其边界条件如图 C. 3. 45 所示。

图 C. 3. 46 是方框流的网格划分的示意图。图 C. 3. 47 是方框流的计算结果。从计算结果看与其它方法的结果基本相同。

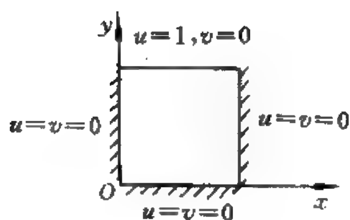


图 C. 3. 45

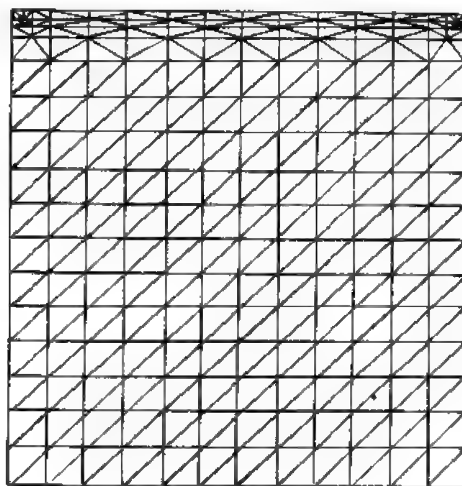


图 C. 3. 46

图 C. 3. 48 是 Periaux 计算进气道时所用的有限元网格。图 C. 3. 49 是由计算得到的不同时刻的流场情况。计算是在 IBM/370/168 机上完成的。

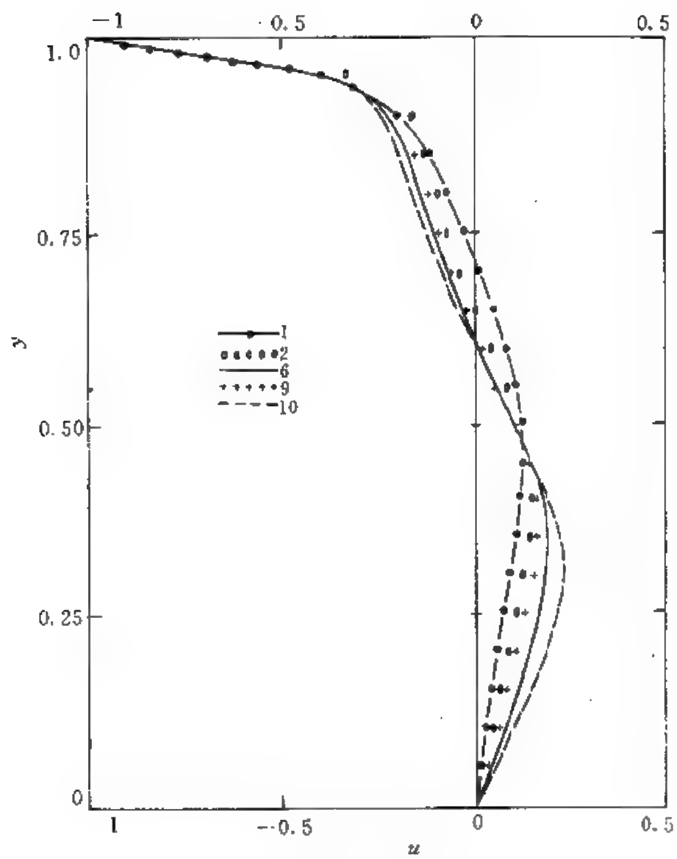


图 C.3.47

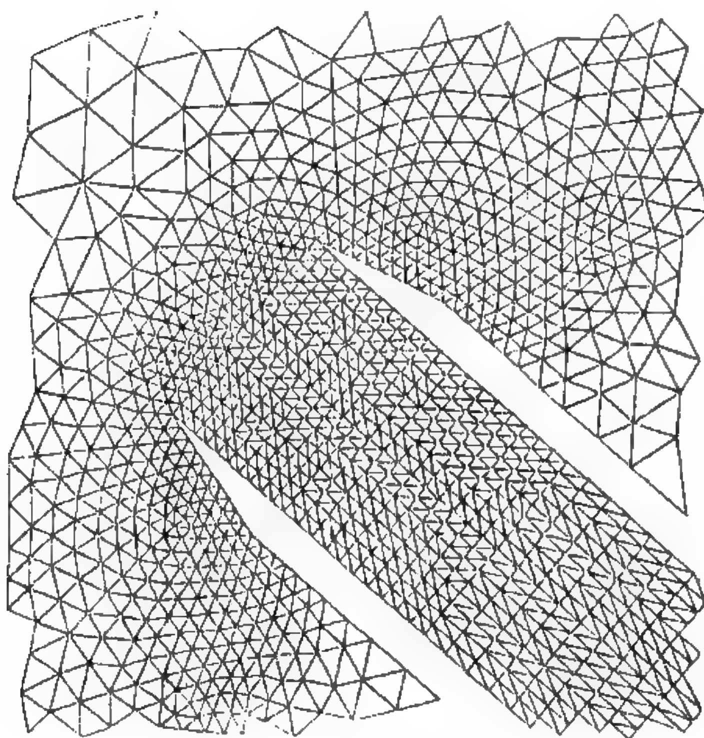


图 C.3.48

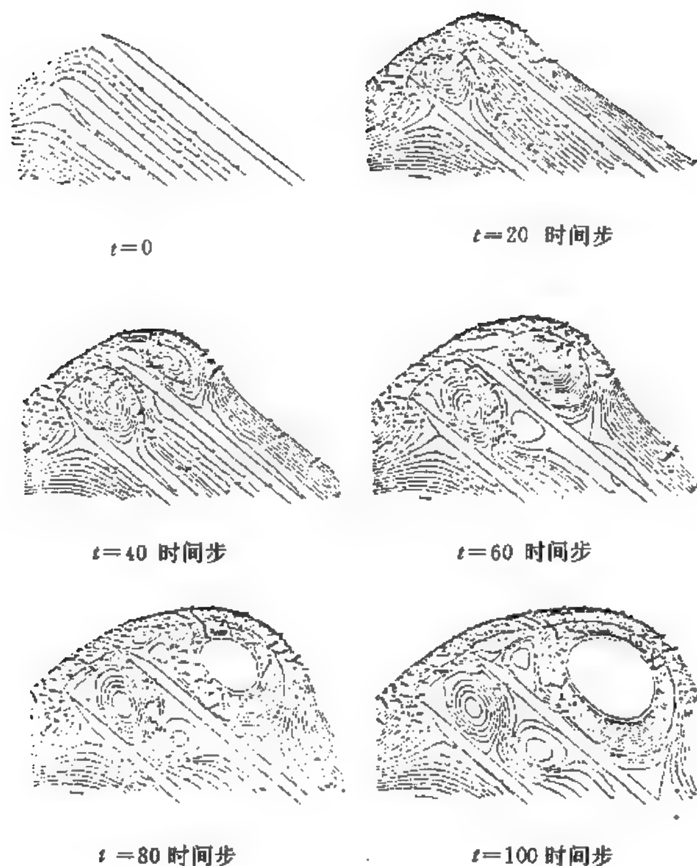


图 C.3.49

3.7 用有限解析法求解不可压缩粘性流体流动方程

这里讨论的有限解析法也是用来解具有原始变量的 N-S 方程。方法目前已经得到广泛的应用。在上一节中讨论的有限元法，一般情况下计算比较困难，人们都希望用差分方法。这种有限解析法是差分方法的一种改进，在 B 篇中已作了介绍，这里主要讲述如何应用该法求解 N-S 方程。

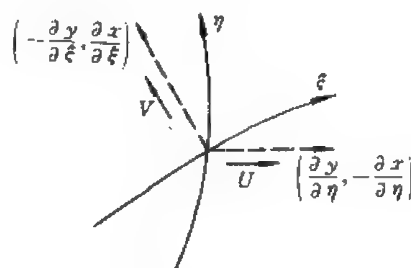


图 C.3.50

为了适合于有限解析法的应用，首先将 N-S 方程在贴体坐标系 ξ，η 中写出如下的形式（图 C.3.50）：

设
$$\left.\begin{aligned} U &= u\frac{\partial y}{\partial \eta} - v\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ V &= -u\frac{\partial y}{\partial \xi} + v\frac{\partial x}{\partial \xi} \end{aligned}\right\} \qquad (\text{C}.3.7.1)$$

它们是速度在与 η 线正交的方向以及与 ξ 线正交的方向上的速度分量。

N-S 方程可写为：

$$U_{\xi\xi} + \frac{\gamma}{\alpha}U_{\eta\eta} - \frac{ReJU - A^U_\xi}{\alpha}U_\xi - \frac{ReJV - A^U_\eta}{\gamma}U_\eta$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{ReJ^2}{\alpha}U_t - \frac{ReJ}{\alpha}(-\alpha P_\xi + \beta P_\eta) + \frac{ReJ^2}{\alpha}(A^{UU}U^2 + A^{UV}UV + A^{VV}V^2) \\
&\quad - \frac{1}{\alpha}(-2\beta U_{\xi\eta} + A_\xi^V V_\xi + A_\eta^V V_\eta + A^U U + A^V V) \\
&\xlongequal{\text{记作}} \frac{ReJ^2}{\alpha}U_t + f_u(P_\xi, P_\eta, U, V, V_\xi, V_\eta, U_{\xi\eta})
\end{aligned} \tag{C.3.7.2-1}
$$

$$
\begin{aligned}
&V_{\xi\xi} + \frac{\gamma}{\alpha}V_{\eta\eta} - \frac{ReJU - B_\xi^V}{\alpha}V_\xi - \frac{ReJV - B_\eta^V}{\gamma}V_\eta \\
&= \frac{ReJ^2}{\alpha}V_t - \frac{ReJ}{\alpha}(\beta P_\xi - \alpha P_\eta) + \frac{ReJ^2}{\alpha}(B^{UU}U^2 + B^{UV}UV + B^{VV}V^2) \\
&\quad - \frac{1}{\alpha}(-2\beta V_{\xi\eta} + B_\xi^V V_\xi + B_\eta^V V_\eta + B^U U + B^V V) \\
&\xlongequal{\text{记作}} \frac{ReJ^2}{\alpha}V_t + f_V(P_\xi, P_\eta, U, V, V_\xi, V_\eta, U_{\xi\eta})
\end{aligned} \tag{C.3.7.2-2}
$$

连续方程

$$
\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \tag{C.3.7.3}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2, \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2, \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \\
&J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.4}
$$

其它如 A_ξ^U，A_η^U，…，B^V 都是与几何参数有关的量，它们的表达式请读者自行导出，Re 为雷诺数，$P=p/\rho$。

(C.3.7.2) 式可以改写为紧凑的形式，即

$$
\left.\begin{aligned}
&U_{\xi\xi} + C^U U_{\eta\eta} - 2A^U U_\xi - 2B^U C^U U_\eta = f^U \\
&V_{\xi\xi} + C^V V_{\eta\eta} - 2A^V V_\xi - 2B^V C^V V_\eta = f^V
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.5}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&C^U = C^V = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)_P, A^U = \left(\frac{ReJU - A_\xi^U}{2\alpha}\right)_P, B^U = \left(\frac{ReJV - A_\eta^U}{2\gamma}\right)_P \\
&A^V = \left(\frac{ReJU - B_\xi^V}{2\alpha}\right)_P, B^V = \left(\frac{ReJV - B_\eta^V}{2\gamma}\right)_P \\
&f^U = \left(\frac{ReJ^2}{\alpha}U_t + f_u\right)_P, f^V = \left(\frac{ReJ^2}{\alpha}V_t + f_V\right)_P
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.6}
$$

这里下标 P 表示中心点，如图 C.3.51 所示。

现在 (C.3.7.5) 式与 B 篇第 4 章的 (B.4.3.1) 式形式上相同。这里的系数由于用 P 点值代替而常数化了，所以那里的方法可以原样照搬，即

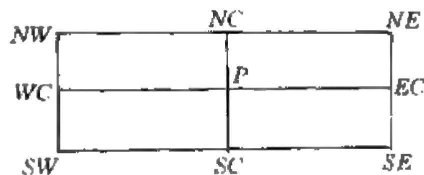


图 C.3.51

$$
\left.\begin{aligned}
U_P &= C^U_{NW}U_{NW} + C^U_{NC}U_{NC} + C^U_{NE}U_{NE} \\
&\quad + C^U_{SW}U_{SW} - C^U_{SC}U_{SC} + C^U_{SE}U_{SE} \\
&\quad + C^U_{WC}U_{WC} + C^U_{EC}U_{EC} - C^U_P f^U \\
V_P &= C^V_{NW}V_{NW} + C^V_{NC}V_{NC} + C^V_{NE}V_{NE} + C^V_{SW}V_{SW} \\
&\quad + C^V_{SC}V_{SC} + C^V_{SE}V_{SE} + C^V_{WC}V_{WC} + C^V_{EC}V_{EC} - C^V_P f^V
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.7}
$$

或简记作

$$
\left.\begin{aligned}
U_P &= \sum_{nb} C^U_{nb}U_{nb} - C^U_P f^U \\
V_P &= \sum_{nb} C^V_{nb}V_{nb} - C^V_P f^V
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.8}
$$

由于

$$
\left.\begin{aligned}
f^U &= \left(\frac{ReJ^2}{\alpha}U_t + f_U\right)_P \approx \frac{ReJ^2}{\alpha}\frac{U^n_P - U^{n-1}_P}{\Delta t} + f_U|_P \\
f^V &= \left(\frac{ReJ^2}{\alpha}V_t + f_V\right)_P \approx \frac{ReJ^2}{\alpha}\frac{V^n_P - V^{n-1}_P}{\Delta t} + f_V|_P
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.9}
$$

代入（C.3.7.8）式，计及松弛因子，整理得

$$
\left.\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{E}\right)\left(1+\frac{ReJ^2C^U_P}{\alpha\Delta t}\right)U^n_P \\
&= \sum_{nb} C^U_{nb}U^n_{nb} - C^U_P f^{n-1}_{UP} + \frac{C^U_P ReJ^2}{\alpha\Delta t}U^{n-1}_P + \frac{1}{E}\left(1+\frac{C^U_P ReJ^2}{\alpha\Delta t}\right)U^{n-1}_P \\
&\left(1+\frac{1}{E}\right)\left(1+\frac{ReJ^2C^V_P}{\alpha\Delta t}\right)V^n_P \\
&= \sum_{nb} C^V_{nb}V^n_{nb} - C^V_P f^{n-1}_{VP} + \frac{C^V_P ReJ^2}{\alpha\Delta t}V^{n-1}_P + \frac{1}{E}\left(1+\frac{C^V_P ReJ^2}{\alpha\Delta t}\right)V^{n-1}_P
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.10}
$$

这里建立了关于 U_P，V_P 的两个方程，但是连续方程尚未应用，故只有这两个方程是不能确定解的。为了得到满足连续方程的解，必须修正压力值，使之满足连续方程。修正压力的过程是一个比较麻烦的过程，目前主要采用 SIMPLER 方法来修正，其具体作法如下：

为讨论简单起见，首先在直角坐标下讨论压力修正问题。曲线坐标下的修正实际上是类同的。

为了保证准确满足连续方程，如何布置压力与速度的定义节点是一个比较重要的问题，通常有如下几种可能的布置。

最简单的方法是将压力和速度定义在同一点上，此时 P 点的压力梯度可以用 W，E 二点的值来计算（图 C.3.52），即

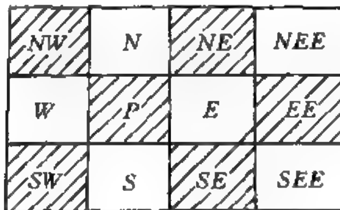


图 C.3.52

$$
\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_P = \frac{p_E - p_W}{2\Delta x} \tag{C.3.7.11}
$$

而

$$
\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_E = \frac{p_{EE} - p_P}{2\Delta x} \tag{C.3.7.12}
$$

这里，关于 P 点的动力学方程涉及 p_W，p_E；关于 E 点的动力学方程涉及 P 点和 EE 点的压力，因此形成了有阴影的和无阴影的网格的两

套压力，它们只是由边界条件十分松散地联系在一起。这样计算压力收敛很困难，而且可能发生错误。这一点比较容易说明，比如所有有阴影的网格内的压力是一个常数，所有无阴影网格的压力为另一常数，这时每一点的压力梯度都为零，可是相邻两点的压力值却是不等的；这样就会出现压力值波动，而计算出来的压力梯度处处为零。这种不合理的结果却能满足方程，显然这种布置是不合适的。

另一种方法是将压力点设置在网格中心，而速度点布置在网格节点上，如图 C.3.53 所示。在建立关于 P 网格右上角点的 u 速度的动力学方程时

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{(N)} = \frac{1}{2}\left[\frac{p_{NE} - p_N}{\Delta x} + \frac{p_E - p_P}{\Delta y}\right] \tag{C.3.7.13}$$

而质量守恒方程为

$$\left[\frac{u_{(NE)} + u_{(SE)}}{2} - \frac{u_{(NW)} + u_{(SW)}}{2}\right]\Delta y + \left[\frac{v_{(NE)} + v_{(NW)}}{2} - \frac{v_{(SE)} + v_{(SW)}}{2}\right]\Delta x = 0 \tag{C.3.7.14}$$

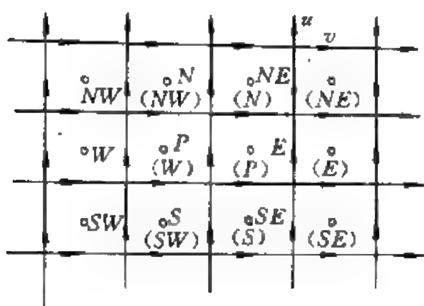


图 C.3.53

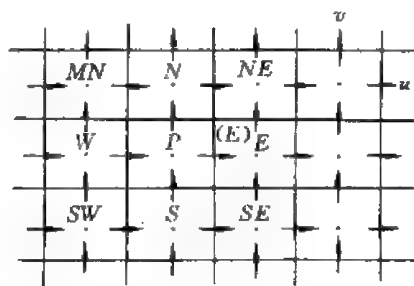


图 C.3.54

所以若 NE，NW，SE，SW，P 点的压力正确，上面的连续方程可以比较正确地满足；如果 N，NEE，S，SEE，E 点的压力正确，可以使 E 点的连续方程得以满足，因此这里又一次出现交错的情况，所以这种布置同样是不合适的。

比较好的方法如图 C.3.54 所示，压力点设置在网格中心，U 点设置在网格左右边，V 点设置在网格的上下边，在关于（E）点的 u 方向的动力学方程中

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{(E)} = \frac{p_E - p_P}{\Delta x} \tag{C.3.7.15}$$

关于（N）点的 v 方向的动力学方程中

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{(N)} = \frac{p_N - p_P}{\Delta y} \tag{C.3.7.16}$$

连续方程则为

$$(u_{(E)} - u_{(W)})\Delta y - (V_{(W)} - V_{(S)})\Delta x = 0 \tag{C.3.7.17}$$

涉及的压力点为 N，S，E，W，P，可见压力点的值是紧密相关的，不会出现前面所说的情况，同时连续方程也能在积分意义下准确地得到满足。这种网格的压力，速度是错位的，所以也叫错位网格（Staggered Gird），或者又叫做 MAC 网格（Marker and cell）。用这种网格并且进行压力修正的方法也叫 MAC 法，关于这种差分方法将在下一节中加以介绍。

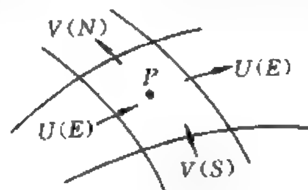


图 C.3.55

上述配置压力、速度点的方法可以推广到曲线坐标，这

时速度和压力的布置点仍类似于直角坐标系的情况。由于U,V分别与坐标线本身正交(尽管坐标线本身不正交——参看图C.3.55),这时连续方程为

$$(U_{(E)} - U_{(W)})\Delta\eta + (V_{(N)} - V_{(S)})\Delta\xi = 0 \tag{C.3.7.18}$$

故仍保证在积分意义下满足连续方程。

现在有了正确的压力、速度配置,就可以讨论压力修正了。

动力学方程可以写作

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \cdots \tag{C.3.7.19}$$

这里P为p/ρ,其它项为简化而未详细写出。上式差分后得到

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -\frac{\partial (P^{n+1} - P^n)}{\partial x} - \frac{\partial P^n}{\partial x} + \cdots \tag{C.3.7.20}$$

如果由n向$n+1$计算作为第1步,由于P^{n+1}不知道,所以先设P^{n+1}等于P^n,这时可以解出$\tilde{u}^{n+1}$,这里表示$\tilde{u}^{n+1}$是不满足连续方程,它满足

$$\frac{\tilde{u}^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -\frac{\partial P^n}{\partial x} + \cdots \tag{C.3.7.21}$$

将(C.3.7.21)式及(C.3.7.20)式相减得

$$\frac{u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}}{\Delta t} = -\frac{\partial (P^{n+1} - P^n)}{\partial x} \tag{C.3.7.22}$$

类似地有

$$\frac{V^{n+1} - \tilde{V}^{n+1}}{\Delta t} = -\frac{\partial (P^{n+1} - P^n)}{\partial y} \tag{C.3.7.23}$$

引入记号

$$\delta P = P^{n+1} - P^n \tag{C.3.7.24}$$

上二式可写为

$$\frac{\boldsymbol{V}^{n+1} - \tilde{\boldsymbol{V}}^{n+1}}{\Delta t} = -\nabla \delta P \tag{C.3.7.25}$$

二边取散度,则由于$\boldsymbol{V}^{n+1}$满足连续方程,故有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V}^{n+1} = 0 \tag{C.3.7.26}$$

由此可得

$$\frac{1}{\Delta t}\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{V}}^{n+1} = \nabla \cdot \nabla \delta p \tag{C.3.7.27}$$

写出差分公式为

$$\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\tilde{u}^{n+1}_{(E)} - \tilde{u}^{n+1}_{(W)}}{\Delta x} + \frac{\tilde{v}^{n+1}_{(N)} - \tilde{v}^{n+1}_{(S)}}{\Delta y}\right) = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\delta P_E - \delta P_P}{\Delta x} - \frac{\delta P_P - \delta P_W}{\Delta x}\right] + \frac{1}{\Delta y}\left[\frac{\delta P_N - \delta P_P}{\Delta y} - \frac{\delta P_P - \delta P_S}{\Delta y}\right] \tag{C.3.7.28}$$

由于$\tilde{\boldsymbol{V}}^{n+1}$已知,所以(C.3.7.28)式是关于$\delta P$的方程,求解后可得$\delta P$,再由(C.3.7.25)式得

$$\boldsymbol{V}^{n+1} = \tilde{\boldsymbol{V}}^{n+1} - \Delta t \cdot \nabla \delta P \tag{C.3.7.29}$$

但是直接求解(C.3.7.28)式是比较困难的,一个方法是将(C.3.7.28)式改写为

$$\frac{1}{\Delta t}D_P^n = -\left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\right)\beta_0^{-1}\delta p_P \tag{C.3.7.30}$$

这里 β_0 为一影响系数，D_P^n 即（C.3.7.28）式左端括号内的值，它是已知的。由上式可得

$$\delta P_P = -\frac{\beta_0 D_P^n}{2\Delta t\left(\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}\right)} \tag{C.3.7.31}$$

这一值是不完全准确的，故记作 $\delta P_P^{(k)}$，然后，

$$P_P^{(n+1)(k)} = P_P^{(n+1)(k-1)} + \delta P_P^{(k)} \tag{C.3.7.32}$$

然后再将 $P^{(n+1)(k)}$ 代替 P^n，重复以上过程直到 $|\delta P_P^{(k)}| \leqslant \epsilon$ 为止，同时还要检查 $\| \boldsymbol{u}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{u}_{n+1}^{(k-1)} \| \leqslant \epsilon$ 及 $\| D_P^{n(k)} \| < \epsilon$；一般应三者都达到后才进行完一 T 时间步。但如果计算定常流动时，则迭代不必进行，因为 n 本身就是迭代次数。

上面的方法可以推广到贴体坐标，此时（C.3.7.2）式改写为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{\alpha}{J}P_\xi + \frac{\beta}{J}P_\eta + \cdots \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\beta}{J}P_\xi - \frac{\gamma}{J}P_\eta + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.33}$$

类似地有

$$\left.\begin{aligned} \frac{U^{n+1}-\tilde{U}^{n+1}}{\Delta t} &= -\frac{\alpha}{J}\delta P_\xi + \frac{\beta}{J}\delta P_\eta \\ \frac{V^{n+1}-\tilde{V}^{n+1}}{\Delta t} &= \frac{\beta}{J}\delta P_\xi - \frac{\gamma}{J}\delta P_\eta \end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.34}$$

由于

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \tag{C.3.7.35}$$

故类似地可以有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t}\left[\frac{\tilde{U}_{(E)}^{n+1}-\tilde{U}_{(W)}^{n+1}}{\Delta\xi} + \frac{\tilde{V}_{(N)}^{n+1}-\tilde{V}_{(S)}^{n+1}}{\Delta\eta}\right] \\ &= \frac{\alpha}{J\Delta\xi}\left[\frac{\delta P_E-\delta P_P}{\Delta\xi} - \frac{\delta P_P-\delta P_W}{\Delta\xi}\right] - \frac{\beta}{2J\Delta\xi}\left[\frac{\delta P_{NE}-\delta P_{SE}}{2\Delta\eta} - \frac{\delta P_{NW}-\delta P_{SW}}{2\Delta\eta}\right] \\ &\quad - \frac{\beta}{2J\Delta\eta}\left[\frac{\delta P_{NE}-\delta P_{NW}}{2\Delta\xi} - \frac{\delta P_{SE}-\delta P_{SW}}{2\Delta\xi}\right] + \frac{\gamma}{J\Delta\eta}\left[\frac{\delta P_N-\delta P_P}{\Delta\eta} - \frac{\delta P_P-\delta P_S}{\Delta\eta}\right] \end{aligned} \tag{C.3.7.36}$$

或近似地记作

$$\frac{1}{\Delta t}D_P = -\frac{2}{J}\left(\frac{\alpha}{\Delta\xi^2}+\frac{\gamma}{\Delta\eta^2}\right)\beta_0^{-1}\delta P_P \tag{C.3.7.37}$$

或

$$\delta P_P = -\frac{\beta_0 D_P}{2\Delta t\,\frac{1}{J}\left(\frac{\alpha}{\Delta\xi^2}+\frac{\gamma}{\Delta\eta^2}\right)} \tag{C.3.7.38}$$

这里需要选择 β_0 的值。计算表明，β_0 在（0，2）之间。当网格大小变化较快时，β_0 不应太大；对于不同的点应当取不同的 β_0 值，但选用原则不明，尚待进一步研究。

应当指出，按（C.3.7.28）式修改压力是比较简单的方法，但迭代次数比较多。因此人们又研究其它修正压力的方法，其中最常见的是 Spalding 和 Patankar 发展的 SIMPLE 法及其改进方法。

SIMPLE 是压力相关方程半隐方法（SemiImplicit Method for Pressure Linked Equation）的简称，它的基本思想概述如下。

为方便起见，只讨论直角坐标的情况。(C.3.7.10) 式中考虑到 f_U，f_V 中关于压力项的表达式（见 (C.3.7.2) 式），可将压力项分离出来，得到

$$\left.\begin{aligned} a_e^U U_e^n &= \sum_{nb} C_{nbe}^U U_{nbe}^n + A_e^U (P_E - P_P) + f_e^U \\ a_n^V U_n^n &= \sum_{nb} C_{nbn}^V V_{nbn}^n + A_n^V (P_N - P_P) + f_n^V \end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.39}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_e^U &= \left(1 + \frac{1}{E}\right)\left(1 + \frac{ReJ^2 C_P^U}{a\Delta t}\right) \qquad A_e^U = C_P^U ReJ \\ a_n^V &= \left(1 + \frac{1}{E}\right)\left(1 + \frac{ReJ^2 C_P^V}{a\Delta t}\right) \qquad A_n^V = C_P^V ReJ \end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.40}$$

f_e^U，f_n^V 为其它项之总和，这里新的下标 e 是因为 U 点在 E 处，下标 n 是因为 V 点在 N 处。

设原始假定的压力为 P^*，求得 u^*，v^* 满足方程

$$\left.\begin{aligned} a_e^U u_e^* &= \sum_{nb} C_{nbe}^U u_{nbe}^* + A_e^U (P_E^* - P_P^*) + f_e^U \\ a_n^V v_n^* &= \sum_{nb} C_{nbn}^V v_{nbn}^* + A_n^V (P_N^* - P_P^*) + f_n^V \end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.41}$$

将 (C.3.7.39) 式减去 (C.3.7.41) 式可得

$$\left.\begin{aligned} a_e^U u'_e &= \sum_{nb} C_{nbe}^U u'_{nbe} + A_e^U (P'_E - P'_P) \\ a_n^V v'_n &= \sum_{nb} C_{nbn}^V v'_{nbn} + A_n^V (P'_N - P'_P) \end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.42}$$

其中

$$u' = U^n - u^*, v' = V^n - v^*, P' = P^n - P^* \tag{C.3.7.43}$$

在 SIMPLE 法中假定

$$\sum_{nb} C_{nb}^U u'_{nb} = 0, \quad \sum_{nb} C_{nb}^V v'_{nb} = 0$$

于是可得

$$u_e = u'_e + u_e^* = u_e^* + \frac{A_e^U}{a_e^U}(P'_E - P'_P)$$

$$v_n = v'_n + v_n^* = v_n^* + \frac{A_n^V}{a_n^V}(P'_N - P'_P) \tag{C.3.7.44}$$

同时有

$$u_W = u'_W + u_W^* = u_W^* + \frac{A_W^U}{a_W^U}(P'_P - P'_W)$$

$$v_S = v'_S + v_S^* = v_S^* + \frac{A_S^V}{a_S^V}(P'_P - P'_S)$$

代入连续方程

$$\frac{u_e - u_W}{\Delta x} + \frac{v_N - v_S}{\Delta y} = 0 \tag{C.3.7.45}$$

可得到

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \tag{C.3.7.46}$$

其中

$$b = \frac{u_e^* - u_W^*}{\Delta x} + \frac{v_N^* - v_S^*}{\Delta y}$$

$$a_E = \frac{A_e^U}{a_e^U \Delta x}, \quad a_W = \frac{A_W^U}{a_W^U \Delta x}, \quad a_N = \frac{A_N^V}{a_N^V \Delta y}$$

$$a_S = \frac{A_S^V}{a_S^V \Delta y}, \quad a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$$

于是计算步骤为：

(1) 假定压力场 P^*；

(2) 由 (C.3.7.41) 式计算 u^*，v^*；

(3) 由解 (C.3.7.46) 式得 P'；

(4) 计算 $P = P^* + \theta_P P'$，θ_P 为一松弛因子，范围在 (0—2) 内；

(5) 由 (C.3.7.44) 式计算 u，v（这里 P' 用 $\theta_P P'$）；

(6) 当 $\|u-u^*\|$，$\|v-v^*\|$ 不小于预定的 ε 值，则令 P 为 P^*，重复以上步骤，直到 $<\varepsilon$ 为止。

上述方法在计算中引入 θ_P，不太方便，迭代次数多，需加以改进。

第 1 种改进为 SIMPLEC 法，它首先将 (C.3.7.42) 式改写为

$$\left.\begin{aligned}(a_e^U - \sum C_{nbe}^U)u'_e &= \sum_{nb} C_{nbe}^U (u'_{nb} - u'_e) + A_e^U (P'_E - P'_P) \\ (a_n^V - \sum C_{nbn}^V)v'_n &= \sum_{nb} C_{nbn}^V (v'_{nb} - v'_n) + A_n^V (P'_N - P'_P)\end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.47}$$

然后设

$$\left.\begin{aligned}\sum_{nb} C_{nbe}^U (u'_{nb} - u'_e) \approx 0 \\ \sum_{nb} C_{nbn}^V (v'_{nb} - v'_n) \approx 0\end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.48}$$

于是可得

$$\left.\begin{aligned}u_e &= u_e^* + u'_e = u_e^* + \frac{A_e^U}{a_e^U - \sum_{nb} C_{nbe}^U}(P'_E - P'_P) \\ v_n &= v_n^* + v'_n = v_n^* + \frac{A_e^V}{a_n^V - \sum_{nb} C_{nbn}^V}(P'_N - P'_P) \\ u_W &= u_W^* + u'_W = u_W^* + \frac{A_W^U}{a_W^U - \sum_{nb} C_{nbW}^U}(P'_P - P'_W) \\ v_S &= v_S^* + v'_S = v_S^* + \frac{A_S^V}{a_S^V - \sum_{nb} C_{nbs}^V}(P'_P - P'_S)\end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.49}$$

同法得（后两式）

将它代入连续方程 (C.3.7.45) 式可得

$$
\left.\begin{aligned}
&a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \\
&\text{其中} \quad b = \frac{u_e^* - u_W^*}{\Delta x} + \frac{v_N^* - v_S^*}{\Delta y} \\
&a_E = \frac{A_e^U}{(a_e^U - \sum_{nb} C_{nbe}^U)\Delta x} \qquad a_W = \frac{A_W^U}{(a_W^U - \sum_{nb} C_{nbW}^U)\Delta x} \\
&a_N = \frac{A_n^V}{(a_n^V - \sum_{nb} C_{nbn}^V)\Delta y} \qquad a_S = \frac{A_S^V}{(a_S^V - \sum_{nb} C_{nbS}^V)\Delta y} \\
&a_P = a_E + a_W + a_N + a_S
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.50}
$$

这样做可以加速收敛。

第 2 种改进方法是 SIMPER，它的作法是先将（C.3.7.41）式中的压力项略去得

$$
\left.\begin{aligned}
\hat{u}_e &= \frac{\sum_{nb} C_{nbe}^U u_{nbe} + f_e^U}{a_e^U} \\
\hat{v}_n &= \frac{\sum_{nb} C_{nbn}^V v_{nbn} + f_n^V}{a_n^V}
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.51}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{而设} \quad u_e = \hat{u}_e + u'_e = \frac{\sum_{nb} C_{nbe}^U u_{nbe} + f_e^U}{a_e^U} + \frac{A_e^U}{a_e^U - \sum_{nb} C_{nbe}^U}(P_E - P_P) \\
&v_n = \hat{v}_n + v'_n = \frac{\sum_{nb} C_{nbn}^V v_{nbn} + f_n^V}{a_n^V} + \frac{A_n^V}{a_n^V - \sum_{nb} C_{nbn}^V}(P_N - P_P) \\
&\text{类似地有} \quad u_W = \hat{u}_W + u'_W = \frac{\sum_{nb} C_{nbW}^U u_{nbW} + f_W^U}{a_W^U} + \frac{A_W^U}{a_W^U - \sum_{nb} C_{nbW}^U}(P_P - P_W) \\
&v_S = \hat{v}_S + v'_S = \frac{\sum_{nb} C_{nbS}^V v_{nbS} + f_S^V}{a_S^V} + \frac{A_S^V}{a_S^V - \sum_{nb} C_{nbS}^V}(P_P - P_S)
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.52}
$$

代入（C.3.7.45）式可得出关于 P 的方程

$$
a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P'_S + \bar{b} \tag{C.3.7.53}
$$

其中 a_P，a_E，a_W，a_S，a_N 与（C.3.7.50）式中的定义相同，$\bar{b}$与同一式中的 b 形式相同，只需将 u^*，v^* 用 $\hat{u}$，$\hat{v}$代替即可。

这里计算步骤为：

(1) 利用 $n-1$ 层的值计算 $\hat{u}$，$\hat{v}$；

(2) 解（C.3.7.53）式得修正压力 P；

(3) 利用（C.3.7.41）式得 u^*，v^*，这里 P^* 用二面的 P 代替；

(4) 利用（C.3.7.50）式再解得 P'；

(5) 利用 (C.3.7.44) 式计算 u, v;

(6) 考察 u, v 与 u^{n-1}, v^{n-1} 之差是否小于 ε, 否则将 u, v 代替 u^{n-1}, v^{n-1} 重复以上过程。

计算表明 SIMPLER 比 SIMPLEC 的收敛性更好一些。

以后又发展了一种算子分裂的压力隐式方法 (PISO-Pressure-implicit with splitting of operator) 得到更好的效果，有兴趣的读者可参考有关文献。

应该指出，以上分析是对直角坐标而言的。对于曲线坐标，由于不一定正交，所得方程更为复杂，这时应将 (C.3.7.41) 式写为

$$
\left.\begin{aligned}
a_e^U U_e^n &= \sum_{nb} C_{nbe}^U U_{nbe}^n - C_{\xi e}^U (P_E - P_P) \\
&\quad - C_{\eta e}^U (P_N - P_S + P_{NE} - P_{SE}) + f_e^U \\
a_n^V v_n^n &= \sum_{nb} C_{nbn}^V V_{nbn}^n - C_{\xi n}^V (P_{NE} - P_{NE} + P_E - P_W) \\
&\quad - C_{\eta n}^V (P_N - P_P) + f_n^V
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.54}
$$

用 SIMPLEC 的方法可以得到如下方程

$$
b_P P'_P = \sum_{nb} b_{nb} P'_{nb} + D^* \tag{C.3.7.55}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
b_{NE} &= \frac{C_{\eta e}^U}{a_e^U - \sum_{nb} C_{nbe}^U} + \frac{C_{\xi n}^V}{a_n^V - \sum_{nb} C_{nbn}^V} \\
b_{NW} &= \frac{-C_{\eta W}^U}{a_W^U - \sum_{nb} C_{nbW}^U} - \frac{C_{\xi n}^V}{a_n^V - \sum_{nb} C_{nbn}^V} \\
b_{SE} &= \frac{-C_{\eta e}^U}{a_e^U - \sum_{nb} C_{nbe}^U} - \frac{C_{\xi S}^V}{a_S^V - \sum_{nb} C_{nbS}^V} \\
b_{SW} &= \frac{C_{\eta W}^U}{a_W^U - \sum_{nb} C_{nbW}^U} + \frac{C_{\xi S}}{a_S^V - \sum_{nb} C_{nbS}^V} \\
b_N &= \frac{C_{\eta e}^U}{a_e^U - \sum_{nb} C_{nbe}^U} - \frac{C_{\eta W}^U}{a_W^V - \sum_{nb} C_{nbW}^U} + \frac{C_{\eta n}^V}{a_n^V - \sum_{nb} C_{nbn}^V} \\
b_S &= -\frac{C_{\eta e}^U}{a_e^U - \sum_{nb} C_{nbe}^U} + \frac{C_{\eta W}^U}{a_W^U - \sum_{nb} C_{nbW}^U} + \frac{C_{\eta S}}{a_S^V - \sum_{nb} C_{nbS}^V} \\
b_E &= \frac{C_{\xi n}^V}{a_n^V - \sum_{nb} C_{nbn}^V} + \frac{C_{\xi e}^U}{a_e^U - \sum_{nb} C_{nbe}^U} - \frac{C_{\xi S}^V}{a_S^V - \sum_{nb} C_{nbS}^V} \\
b_W &= \frac{C_{\xi n}^V}{a_n^V - \sum_{nb} C_{nbn}^V} + \frac{C_{\xi W}^V}{a_W^U - \sum_{nb} C_{nbW}^U} + \frac{C_{\xi S}^V}{a_S^V - \sum_{nb} C_{nbS}^V} \\
b_P &= b_{NW} + b_{NE} + b_{SW} + b_{SE} + b_N + b_S + b_E + b_W \\
D^* &= U_e^* - U_w^* + V_n^* - V_S^*
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.7.56}
$$

以上公式请读者自行推导。这里得到的是准 9 对角矩阵，这种方程可以用 B 篇第 6 章第 6.3 节

中介绍的强隐方法（MSI）求解。

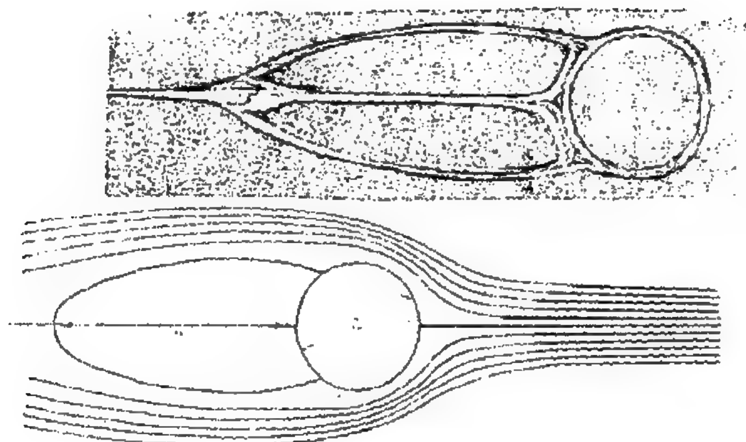


图 C. 3. 56

对称解 $Re=200$

利用这里描述的方法可得到圆柱绕流的流场。图 C. 3. 56 是在未采取任何干扰条件下得到的对称解。如再加上转动干扰（即令圆柱顺时和逆时转动后再停下）则得到的是涡交替脱落的图案。图 C. 3. 57 给出了其中的一个图。而图 C. 3. 58 则给出了振荡圆柱的流谱。这些计算请参看有关文献。

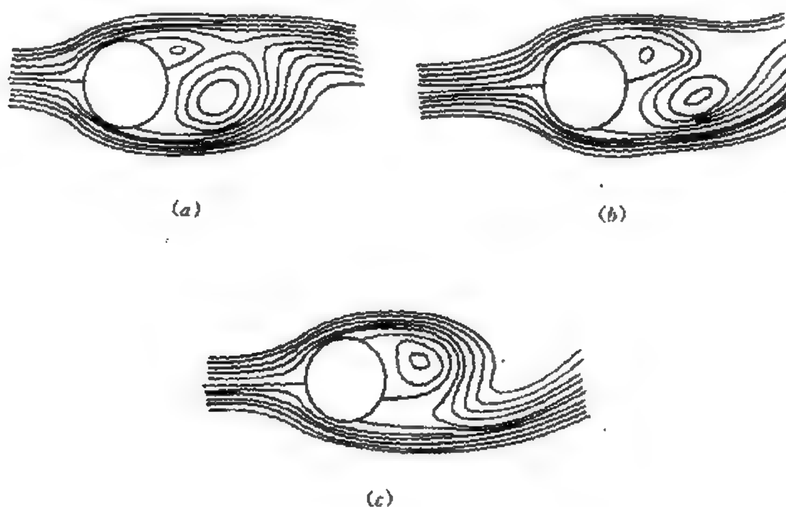


图 C. 3. 57

涡交替脱落 $Re=200$

附：(C. 3. 7. 2) 式中各系数表达式

$$\alpha=x_\eta^2+y_\eta^2,\quad \beta=x_\xi x_\eta+y_\xi y_\eta,\quad \gamma=x_\xi^2+y_\xi^2,$$

$$A^{UU}=F_1/J,\quad A^{UV}=(F_2+F_3)/J,\quad A^{VV}=F_4/J,$$

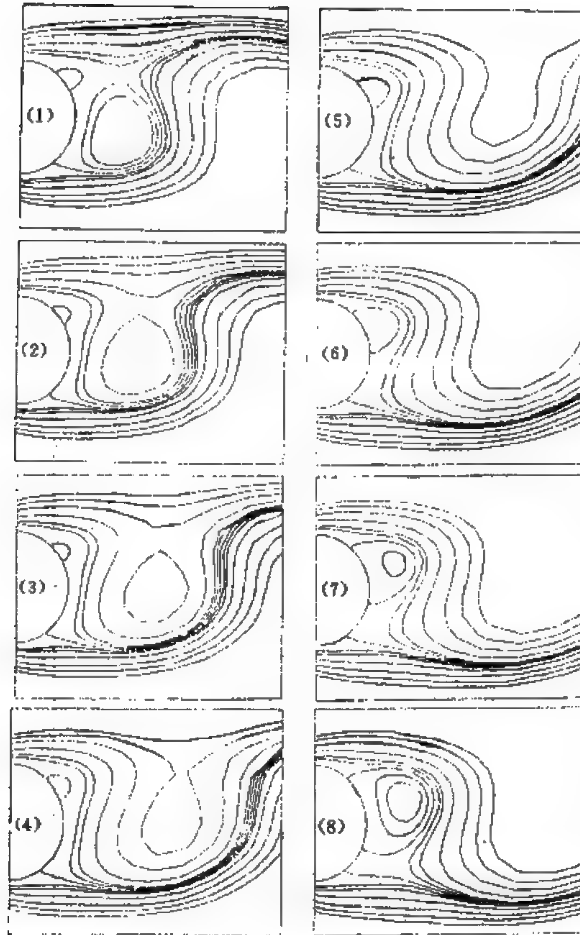


图 C.3.58

流动图案随时间变化（振荡圆柱）， $Re=200$，$\delta(t)=0.1\sin\omega t$，$f=0.2$

$$A_\xi^U=2\alpha F_1-2\beta F_2+F_3,\quad A_\eta^U=2\gamma F_2-2\beta F_1+F_6,$$

$$A_\xi^V=2\alpha F_3-2\beta F_4,\qquad A_\eta^V=2\gamma F_4-2\beta F_3,$$

$$A^U=\alpha\left[y_\eta\left(\frac{x_\xi}{J}\right)_{\xi\xi}-x_\eta\left(\frac{y_\xi}{J}\right)_{\xi\xi}\right]-2\beta\left[y_\eta\left(\frac{x_\xi}{J}\right)_{\xi\eta}-x_\eta\left(\frac{y_\xi}{J}\right)_{\xi\eta}\right]$$

$$+\gamma\left[y_\eta\left(\frac{x_\xi}{J}\right)_{\eta\eta}-x_\eta\left(\frac{y_\xi}{J}\right)_{\xi\xi}\right]+F_1F_5+F_2F_6,$$

$$A^V=\alpha\left[y_\eta\left(\frac{x_\eta}{J}\right)_{\xi\xi}-x_\eta\left(\frac{y_\eta}{J}\right)_{\xi\xi}\right]-2\beta\left[y_\eta\left(\frac{x_\eta}{J}\right)_{\xi\eta}-x_\eta\left(\frac{y_\eta}{J}\right)_{\xi\eta}\right]$$

$$+\gamma\left[y_\eta\left(\frac{x_\eta}{J}\right)_{\eta\eta}-x_\eta\left(\frac{y_\eta}{J}\right)_{\eta\eta}\right]+F_3F_5+F_4F_6,$$

$$F_1=y_\eta\left(\frac{x_\xi}{J}\right)_\xi-x_\eta\left(\frac{y_\xi}{J}\right)_\xi,\quad F_2=y_\eta\left(\frac{x_\xi}{J}\right)_\eta-x_\eta\left(\frac{y_\xi}{J}\right)_\eta,$$

$$F_3=y_\eta\left(\frac{x_\eta}{J}\right)_\xi-x_\eta\left(\frac{y_\eta}{J}\right)_\xi,\quad F_4=y_\eta\left(\frac{x_\eta}{J}\right)_\eta-x_\eta\left(\frac{y_\eta}{J}\right)_\eta,$$

$$F_5=y_\eta J\left(\frac{y_\eta}{J}\right)_\xi+x_\eta J\left(\frac{x_\eta}{J}\right)_\xi-x_\xi J\left(\frac{x_\eta}{J}\right)_\eta-y_\xi J\left(\frac{y_\eta}{J}\right)_\eta,$$

$$F_6=-y_\eta J\left(\frac{y_\xi}{J}\right)_\xi-x_\eta J\left(\frac{x_\xi}{J}\right)_\xi+x_\xi J\left(\frac{x_\xi}{J}\right)\eta+y_\xi J\left(\frac{y_\xi}{J}\right)_\eta,$$

$$B^{UU}=G_1/J,\quad B^{UV}=(G_2+G_3)/J,\quad B^{VV}=G_4/J,$$

$$B_\xi^U = 2\alpha G_1 - 2\beta G_2, B_\eta^U = 2\gamma G_2 - 2\beta G_1,$$
$$B_\xi^V = 2\alpha G_3 - 2\beta G_4 - G_5, \quad B_\eta^V = 2\gamma G_4 - 2\beta G_3 + G_6$$

3.8 用有限差分法求解不可压缩粘性流体流动的 N-S 方程

有限差分法是最早发展起来的一种数值方法，本节主要讨论涉及用原始变量 V，p 的 N-S 方程的求解及压力边界条件等问题。

1. 定常问题的不定常人工压缩方法

定常问题可作为不定常问题的渐近。这种方法叫做伪不定常，这一问题在讨论可压缩问题时已经提到。但是与可压缩情况不同的是，不可压缩的连续方程在定常和不定常时是一样的，都是 $\nabla \cdot V=0$，没有关于时间的导数项。直接解不定常不可压缩流体流动的方法是比较麻烦的，这里我们感兴趣的只是定常情况；于是可以加上一与时间导数有关的项，一旦达到定常后，这一项就自然消失了，其结果与原方程仍然相容。现在的问题是加什么项才合适。动力学方程中有 $\partial V/\partial t$，待解的量有 V，p，这里尚缺 $\partial p/\partial t$，所以不难想到在连续性方程上应加上 $\partial p/\partial t$，即连续性方程改写为

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \nabla \cdot V = 0 \qquad \text{(C. 3. 8. 1)}$$

由于可压缩流的连续方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

或

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

其中 c^2 为声速，如选为常数，ρ 为常数，即可得 (C. 3. 8. 1) 式（可令 $\rho=1$），所以 (C. 3. 8. 1) 式又叫伪压缩方程，它与不定常的 N-S 方程一起成为一不定常伪压缩方程。不定常 N-S 方程为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \Delta V \qquad \text{(C. 3. 8. 2)}$$

这里 c^2 应当比较大。

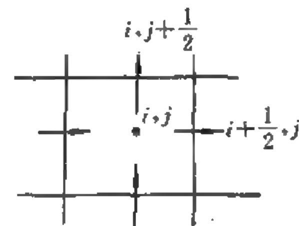


图 C. 3. 59

网格选用交错的 MAC，如图 C. 3. 59 所示。

差分格式为

$$\frac{1}{\Delta t}\left(u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}^{n}\right) + a_{i+\frac{1}{2},j}^{n} + \frac{p_{i+1}^{n} - p_{ij}^{n}}{\Delta x}$$
$$= \frac{1}{Re}\left(\frac{u_{i+\frac{3}{2},j}^{n} - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^{n} + u_{i-\frac{1}{2},j}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i-\frac{1}{2},j+1}^{n} - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^{n} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}^{n}}{\Delta y^2}\right) \qquad \text{(C. 3. 8. 3-1)}$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left(v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n}\right) + b_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} + \frac{p_{i,j+1}^{n} - p_{i,j}^{n}}{\Delta y}$$
$$= \frac{1}{Re}\left(\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+\frac{3}{2}}^{n} - 2v_{i,j+\frac{3}{2}}^{n} + v_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta y^2}\right) \qquad \text{(C. 3. 8. 3-2)}$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left(p^{n+1}_{i,j}-p^{n}_{i,j}\right)+c^2\left(\frac{u^{n+1}_{i+\frac12,j}-u^{n+1}_{i-\frac12,j}}{\Delta x}+\frac{v^{n+1}_{i,j+\frac12}-v^{n+1}_{i,j-\frac12}}{\Delta y}\right)=0 \qquad (C.3.8.3\text{-}3)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&a=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y},\; b=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\\
&a_{i+\frac12,j}=u^n_{i+\frac12,j}\frac{u^n_{i+\frac32,j}-u^n_{i-\frac12,j}}{2\Delta x}+\hat{v}^n_{i+\frac12,j}\frac{u^n_{i+\frac12,j+1}-u_{i+\frac12,j-1}}{2\Delta y}\\
&b^n_{i,j+\frac12}=\hat{u}^n_{i,j+\frac12}\frac{v^n_{i+1,j+\frac12}-v^n_{i-1,j+\frac12}}{2\Delta x}+v^n_{i,j+\frac12}\frac{v^n_{i,j+\frac32}-v_{i,j-\frac12}}{2\Delta y}\\
&\hat{v}^n_{i+\frac12,j}=\frac14\left(v^n_{i,j+\frac12}+v^n_{i+1,j+\frac12}+v^n_{i,j-\frac12}+v^n_{i+1,j-\frac12}\right)\\
&\hat{u}^n_{i,j+\frac12}=\frac14\left(u^n_{i+\frac12,j}+u^n_{i-\frac12,j}+u^n_{i+\frac12,j+1}+u^n_{i-\frac12,j+1}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (C.3.8.4)$$

也可以用守恒型，即

$$\left.\begin{aligned}
&a=\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}\qquad b=\frac{\partial uv}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial y}\\
&a_{i-\frac12,j}=\frac{(u^2)_{i-1,j}-(u^2)_{i,j}}{\Delta x}+\frac{(uv)_{i+\frac12,j-\frac12}-(uv)_{i+\frac12,j+\frac12}}{\Delta y}\\
&b_{i,j-\frac12}=\frac{(uv)_{i-\frac12,j-\frac12}-(uv)_{i+\frac12,j-\frac12}}{\Delta x}+\frac{(v^2)_{i,j+1}-(v^2)_{i,j}}{\Delta y}\\
&(u^2)_{i,j}=\frac14\left(u_{i+\frac12,j}+u_{i-\frac12,j}\right)^2\\
&(uv)_{i+\frac12,j-\frac12}=\frac14\left(u_{i+\frac12,j}+u_{i+\frac12,j-1}\right)\left(v_{i,j-\frac12}+v_{i+1,j-\frac12}\right)\\
&(v^2)_{i,j}=\frac14\left(v_{i,j+\frac12}+v_{i,j-\frac12}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (C.3.8.5)$$

(C.3.8.3) 的稳定性分析首先要让系数“冻结”成常数，然后再作估计；另外一种近似的方法是，如果不计压力项，则动力学两个方程的稳定条件为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac14\left(|u|_{\max}+|v|_{\max}\right)^2\Delta t Re\leqslant 1\\
&\frac{4\Delta t}{Re\Delta x^2}\leqslant 1
\end{aligned}\right\} \qquad (C.3.8.6)$$

这里假定 $\Delta x=\Delta y$。

另一种近似方法是略去对流项，则稳定条件为

$$4\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(\frac{1}{Re}+\frac{c^2\Delta t}{2}\right)\leqslant 1 \qquad (C.3.8.7)$$

对于一般情况的讨论请读者自行分析。

在讨论具体计算时还应该考虑边界条件的处理。首先是速度边界条件，一般在物面上给定速度值，但由于采用 MAC 网格，所以速度点不落在网格上。一般应用镜象法，即在边界外假想一个网格，然后用外推法假定一个速度值 $u_{0,j}$，如图 C.3.60 所示。

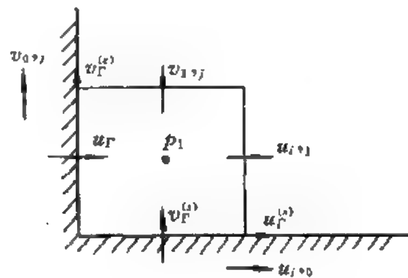


图 C.3.60

$$
\left.\begin{aligned}
v_{0,j} &= 2v_{\Gamma}^{(e)} - v_{1,j} \\
u_{i,0} &= 2U_{\Gamma}^{(s)} - u_{i,1}
\end{aligned}\right\} \tag{C.3.8.8}
$$

于是其它条件，如 $\partial u/\partial n$ 等都不难计算了。

对于压力边界条件，由于我们这里讨论的是定常问题，所以如图 C.3.59 所示

$$
\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\Gamma} + a_{\Gamma}^{(e)} = \frac{1}{Re}(\Delta u)_{\Gamma}^{(e)} \tag{C.3.8.9}
$$

由于 $u_{\Gamma}^{(e)}$ 及 $(\Delta u)_{\Gamma}^{(e)}$ 都已知，所以$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\Gamma}$ 也给出了，因此在计算中不会出现什么问题，当$1/Re$ 比较小时，近似有$\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)=0$。

用以下方法解一个来流绕后台阶的流动（图 C.3.61）。

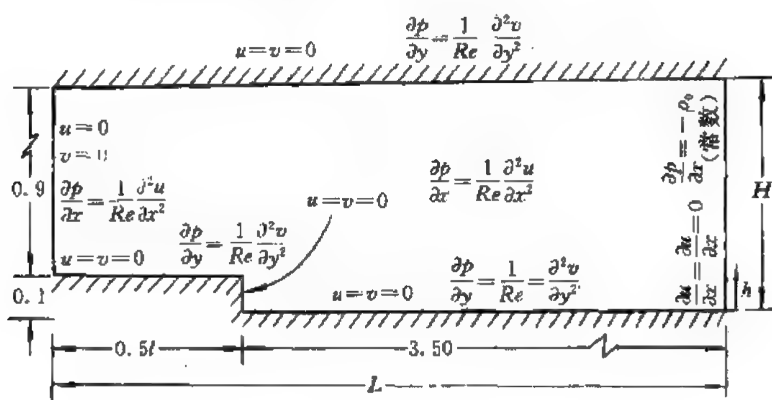


图 C.3.61

初始值给全场 $u=1$，$v=0$，选用

$$
\beta = -\frac{1}{Re}\frac{H-h}{H} \tag{C.3.8.10}
$$

当 $Re=25$，100 时，其计算结果如图 C.3.62 和图 C.3.63。

下面讨论不定常流动的计算。此时不能再用伪压缩法，因为方程与原问题不相容。下面介绍几种方法。

2. 投影法

这一方法首先由 Chorin 于 1968 年提出，目前已为人们广泛采用。其网格采用错位 MAC 网格，差分格式则分别在 $i+\frac{1}{2}$，j 上建立 u 的动力学方程，在 i，$j+\frac{1}{2}$ 上建立 v 的动力学方程，在 i，j 上建立连续方程，它们分别为（图 C.3.64）：

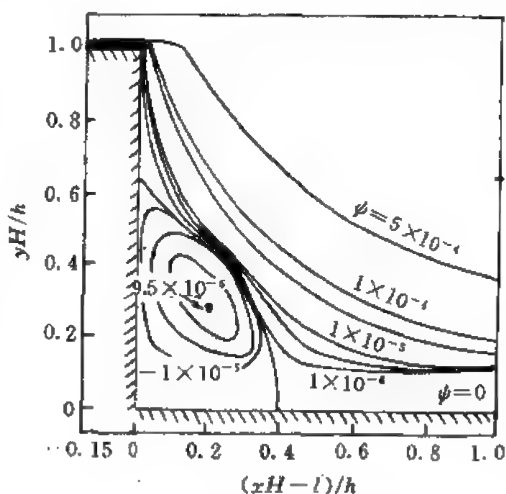


图 C.3.62

$Re=100$ 时的流线图

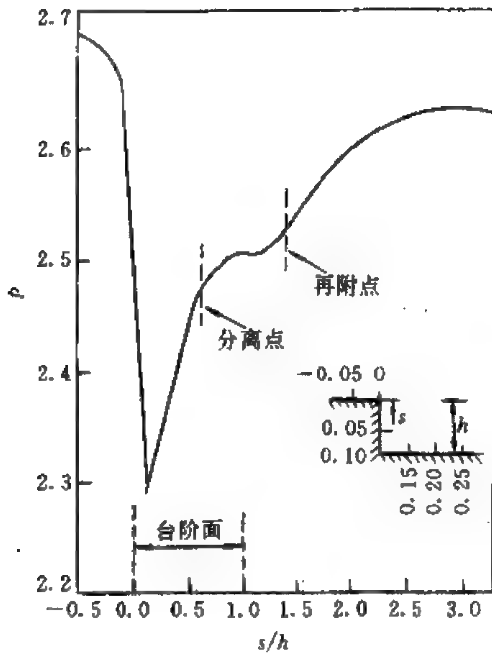


图 C.3.63
Re=25 时壁面压力分布

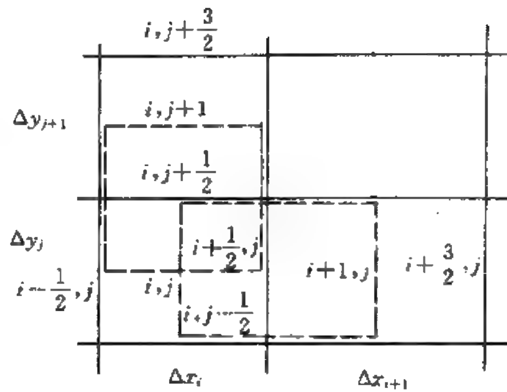


图 C.3.64

$$\frac{u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}-u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t}+a^{n}_{i+\frac{1}{2},j}+\frac{p^{n+1}_{i+1,j}-p^{n+1}_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}-\frac{1}{Re}\nabla^2_n u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}=0 \quad (C.3.8.11\text{-}1)$$

$$\frac{v^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}-v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta t}+b^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}+\frac{p^{n+1}_{i,j+1}-p^{n+1}_{i,j}}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}}-\frac{1}{Re}\nabla^2_n v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}=0 \quad (C.3.8.11\text{-}2)$$

$$\frac{u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}-u^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x_i}+\frac{v^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}-v^{n+1}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y_j}=0 \quad (C.3.8.11\text{-}3)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}a^{n}_{i+\frac{1}{2},j}&=\left[\frac{\partial(uu)}{\partial x}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}\right]^{n}_{i+\frac{1}{2},j}\\ b^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}&=\left[\frac{\partial(uv)}{\partial x}+\frac{\partial(vv)}{\partial y}\right]^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}\quad \text{表达式用(C.3.8.5)式}$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2_n u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}=&\frac{1}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}\left[\frac{u^{n}_{i+\frac{3}{2},j}-u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta x_{i+1}}-\frac{u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}-u^{n}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x_i}\right]\\&+\frac{1}{\Delta y_j}\left[\frac{u^{n}_{i+\frac{1}{2},j+1}-u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}}-\frac{u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}-u^{n}_{i+\frac{1}{2},j-1}}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}}\right]\\ \nabla^2_n v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}=&\frac{1}{\Delta x_i}\left[\frac{v^{n}_{i+1,j+\frac{1}{2}}-v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}-\frac{v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}-v^{n}_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}\right]\\&+\frac{1}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}}\left[\frac{v^{n}_{i,j+\frac{3}{2}}-v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta y_{j+1}}-\frac{v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}-v^{n}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y_j}\right]\end{aligned}\right\}\quad (C.3.8.12)$$

求解（C. 3. 8. 11）式的过程为：首先将（C. 3. 8. 11-1，2）两式中的压力项略去，得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\tilde{u}^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}-u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t}+a^{n}_{i+\frac{1}{2},j}-\frac{1}{Re}\cdot\nabla^{2}_{h}u^{n}_{i+\frac{1}{2},j}=0\\&\frac{\tilde{v}^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}-v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta t}+b^{n}_{i+\frac{1}{2},j}-\frac{1}{Re}\nabla^{2}_{h}v^{n}_{i,j+\frac{1}{2}}=0\end{aligned}\right\}\tag{C. 3. 8. 13}$$

将（C. 3. 8. 11-1，2）两式与（C. 3. 8. 13）式相减得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}-\tilde{u}^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t}+\frac{p^{n+1}_{i+1,j}-p^{n+1}_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}=0\\&\frac{v^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}-\tilde{v}^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta t}+\frac{p^{n+1}_{i,j+1}-p^{n+1}_{i,j}}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}}=0\end{aligned}\right\}\tag{C. 3. 8. 14}$$

将它们代入（C. 3. 8. 11-3）式，可以得到

$$\frac{1}{\Delta x_i}\left(\frac{p^{n+1}_{i+1,j}-p^{n+1}_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}-\frac{p^{n+1}_{i,j}-p^{n+1}_{i-1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}\right)+\frac{1}{\Delta y_j}\left(\frac{p^{n+1}_{i,j+1}-p^{n+1}_{i,j}}{\Delta y_{j+\frac{1}{2}}}-\frac{p^{n+1}_{i,j}-p^{n+1}_{i,j-1}}{\Delta y_{j-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\tilde{u}^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}-\tilde{u}^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x_i}+\frac{\tilde{v}^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}-\tilde{v}^{n+1}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y_j}\right)\tag{C. 3. 8. 15}$$

首先由（C. 3. 8. 13）式可以计算得到$\tilde{u}^{n+1}$，$\tilde{v}^{n+1}$，代入（C. 3. 8. 15）式可以得到关于 p^{n+1}的方程，解出 p^{n+1}后再代回（C. 3. 8. 14）式可得u^{n+1}，v^{n+1}。

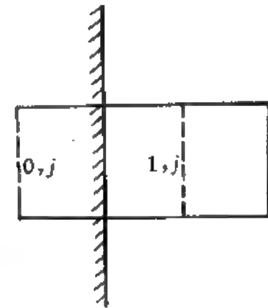


图 C. 3. 65

求解 p 的边界条件用

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)^{n+1}_{\Gamma}=-\frac{1}{\Delta t}(V^{n+1}_{\Gamma}-\tilde{V}_{\Gamma}^{n+1})\cdot n\tag{C. 3. 8. 16}$$

其中 V^{n+1}_{Γ} 是已知的。关于 $\tilde{V}^{n+1}_{\Gamma}$ 的处理看边界上单元的压力方程。为简单起见，设 Δx，Δy 分别为常数，于是1，j 点上的压力方程为（图 C. 3. 65）：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{p^{n+1}_{2,j}-p^{n+1}_{1,j}}{\Delta x}-\frac{p^{n+1}_{1,j}-p^{n+1}_{0,j}}{\Delta x}\right)\\&+\frac{1}{\Delta y}\left(\frac{p^{n+1}_{1,j+1}-p^{n+1}_{1,j}}{\Delta y}-\frac{p^{n+1}_{1,j}-p^{n+1}_{1,j-1}}{\Delta y}\right)\\&=\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\tilde{u}^{n+1}_{3/2,j}-\tilde{u}^{n+1}_{\Gamma,j}}{\Delta x}+\frac{\tilde{v}^{n+1}_{1,j+\frac{1}{2}}-\tilde{v}^{n+1}_{1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}\right)\end{aligned}\tag{C. 3. 8. 17}$$

而（C. 3. 8. 16）式可写为

$$\frac{p^{n+1}_{1,j}-p^{n+1}_{0,j}}{\Delta x}=-\frac{u^{n+1}_{\Gamma,j}-\tilde{u}^{n+1}_{\Gamma,j}}{\Delta t}\tag{C. 3. 8. 18}$$

将（C. 3. 8. 18）式两边除 Δx，再与（C. 3. 8. 17）式相加可得边界点的方程为

$$\frac{p^{n+1}_{2,j}-p^{n+1}_{1,j}}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y}\left(\frac{p^{n+1}_{1,j+1}-p^{n+1}_{1,j}}{\Delta y}-\frac{p^{n+1}_{1,j}-p^{n+1}_{1,j-1}}{\Delta y}\right)=\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\tilde{u}^{n+1}_{\frac{3}{2},j}-u^{n+1}_{\Gamma,j}}{\Delta x}+\frac{\tilde{v}^{n+1}_{1,j+\frac{1}{2}}-\tilde{v}^{n+1}_{1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}\right)\tag{C. 3. 8. 19}$$

这里边界点$\tilde{u}_{\Gamma}^{n+1}$被消去了，所以 p^{n+1}可以求解。

3. MAC 法

MAC 法与投影法的方程是相同的，也是（C. 3. 8. 11）式，但它直接由连续方程得到

$$\nabla_h^2 p_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{u}{\Delta t} - a + \frac{1}{Re}\nabla_h^2 u\right)_{i+\frac{1}{2},j}^{n} - \left(\frac{u}{\Delta t} - a + \frac{1}{Re}\nabla_h^2 u\right)_{i-\frac{1}{2},j}^{n}\right]$$

$$+ \frac{1}{\Delta y}\left[\left(\frac{v}{\Delta t} - b + \frac{1}{Re}\nabla_h^2 v\right)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} - \left(\frac{v}{\Delta t} - b + \frac{1}{Re}\nabla_h^2 v\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^{n}\right] \quad (C. 3. 8. 20)$$

这时边界条件用

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{\Gamma}^{n+1} = -\left[\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} - \frac{1}{Re}\nabla^2\boldsymbol{V}\right]_{\Gamma}^{n+1}\cdot\boldsymbol{n}$$

在图 C. 3. 64 中为

$$\frac{p_{1,j}^{n+1} - p_{0,j}^{n+1}}{\Delta x} = -\frac{1}{\Delta t}(u_{\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{\frac{1}{2},j}^{n}) - \left(a - \frac{1}{Re}\nabla^2 u\right)_{\frac{1}{2},j}^{n+1}$$

$$\approx -\frac{1}{\Delta t}(u_{\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{\frac{1}{2},j}^{n}) - \left(a - \frac{1}{Re}\nabla^2 u\right)_{\frac{1}{2},j}^{n} \quad (C. 3. 8. 21)$$

而（C. 3. 8. 20）式的边界点的方程为

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{p_{2,j}^{n+1} - p_{1,j}^{n+1}}{\Delta x} - \frac{p_{1,j}^{n+1} - p_{2,j}^{n+1}}{\Delta x}\right] + \frac{1}{\Delta y}\left[\frac{p_{1,j+1}^{n+1} - p_{1,j}^{n+1}}{\Delta y} - \frac{p_{1,j}^{n+1} - p_{1,j-1}^{n+1}}{\Delta y}\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{\Delta x}\left(u_{\frac{3}{2},j}^{n} - u_{\frac{1}{2},j}^{n}\right) + \frac{1}{\Delta y}(v_{1,j+\frac{1}{2}}^{n} - v_{1,j-\frac{1}{2}}^{n})\right] - \frac{1}{\Delta x}\left[\left(a - \frac{1}{Re}\nabla_h^2 u\right)_{\frac{3}{2},j}^{n}\right.$$

$$\left. - \left(a - \frac{1}{Re}\nabla_h^2 u\right)_{\frac{1}{2},j}^{n}\right] - \frac{1}{\Delta y}\left[\left(b - \frac{1}{Re}\nabla_h^2 v\right)_{1,j+\frac{1}{2}}^{n} - \left(b - \frac{1}{Re}\nabla_h^2 v\right)_{1,j-\frac{1}{2}}^{n}\right] \quad (C. 3. 8. 22)$$

将（C. 3. 8. 21）式两边除以 Δx 再与（C. 3. 8. 22）相加即得边界点方程

$$\frac{p_{2,j}^{n+1} - p_{1,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y}\left[\frac{p_{1,j+1} - p_{1,j}^{n+1}}{\Delta y} - \frac{p_{1,j}^{n+1} - p_{1,j-1}^{n+1}}{\Delta y}\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{\Delta x}(u_{\frac{3}{2},j}^{n} - u_{\frac{1}{2},j}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta y}\left(v_{1,j+\frac{1}{2}}^{n} - v_{1,j-\frac{1}{2}}^{n}\right) - \frac{1}{\Delta x}\left(a - \frac{1}{Re}\nabla_h^2 u\right)_{\frac{3}{2},j}^{n}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Delta y}\left[\left(b - \frac{1}{Re}\nabla_h^2 v\right)_{1,j+\frac{1}{2}}^{n} - \left(b - \frac{1}{Re}\nabla_h^2 v\right)_{1,j-\frac{1}{2}}^{n}\right]\right] \quad (C. 3. 8. 23)$$

于是可以直接求 p^{n+1}了。

MAC 和投影法区别不大，在投影法中引入了$\tilde{u}^{n+1}$，$\tilde{v}^{n+1}$作为未知变量，而在 MAC 法中则没有。以上格式均有一个稳定性条件的问题，此问题请读者自行分析。

4. 隐式方法

一个最常用的二阶格式为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\boldsymbol{V}^{n+1} - \boldsymbol{V}^{n}}{\Delta t} + \frac{3\boldsymbol{A}^{n} - \boldsymbol{A}^{n-1}}{2} + \nabla p^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\nabla^2\boldsymbol{V}^{n+1} + \nabla^2\boldsymbol{V}^{n}}{2Re} = 0 \\ &\nabla\cdot\boldsymbol{V}^{n+1} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (C. 3. 8. 24)$$

这一格式叫做 Adams-Bashforth/Crank-Nicolson 格式，这是因为关于 p，$\nabla^2\boldsymbol{V}$ 用的是 Crank-Nicolson 格式，而 $\boldsymbol{A}$（$=(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}$）用二次插值公式外插。

这个方程是非线性方程组，不易求解。有一个求解方法是引入 $\tilde{\boldsymbol{V}}$，使得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\tilde{V}-\tilde{V}^n}{\Delta t}+\frac{3A^n-A^{n-1}}{2}-\frac{\nabla^2 V^n}{2Re}=0\\&\frac{\tilde{V}^{n+1}-\tilde{V}}{\Delta t}+\nabla p^{n+\frac{1}{2}}-\frac{\nabla^2 V^{n+1}}{2Re}=0\\&\nabla\cdot\tilde{V}^{n+1}=0\end{aligned}\right\}\qquad(C.3.8.25)$$

这实际是一个时间分裂过程，将其中第 2 式两边取散度得

$$\nabla^2 p^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\Delta t}\nabla\cdot\tilde{V}\qquad(C.3.8.26)$$

边界条件为

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_\Gamma^{n+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\Delta t}\left[V^{n+1}-V-\frac{\nabla^2 V^{n+1}}{2Re}\right]_\Gamma\cdot n\qquad(C.3.8.27)$$

其中边界上的二阶导数计算为（仍以图 C.3.64 中的边界为例）

$$\begin{aligned}-(\nabla^2 V^{n+1})\cdot n|_\Gamma&=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{\frac{1}{2},j}^{n+1}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{\frac{1}{2},j}^{n+1}\\&=-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]_{\frac{1}{2},j}^{n+1}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{\frac{1}{2},j}^{n+1}\end{aligned}\qquad(C.3.8.28)$$

其它作法与前相同。

有了 p 以后再由 (C.3.8.25) 式中的第 2 式来求 V^{n+1}的值，当然这里的网格仍用 MAC 网格。

以上方法可以推广到曲线坐标，其有关公式请读者作为练习自行推导。

用上述方法计算振荡机翼的不定常流场如图 C.3.66 所示。

对于不定常流动，壁面压力条件可以用

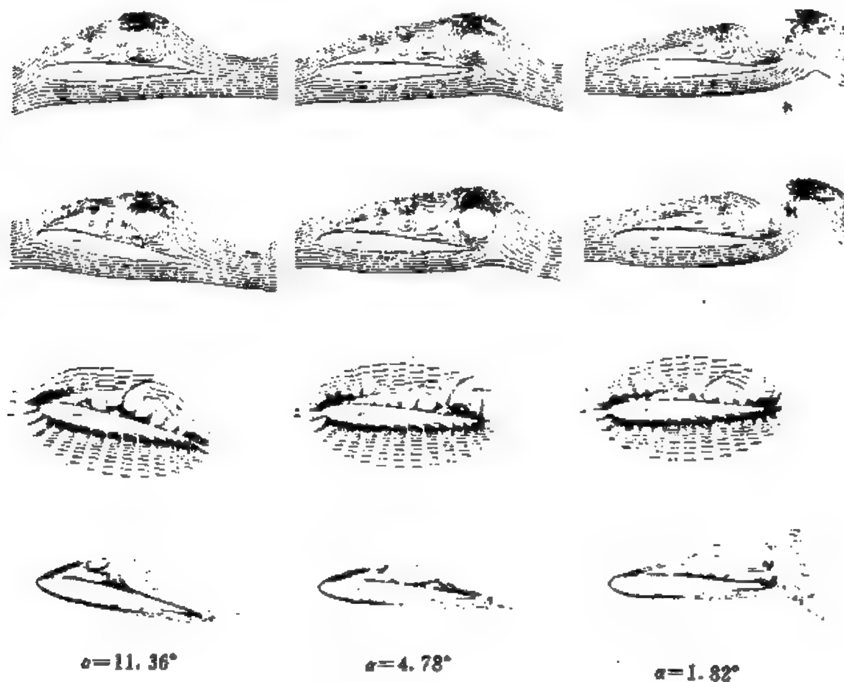


图 C.3.66 (1)

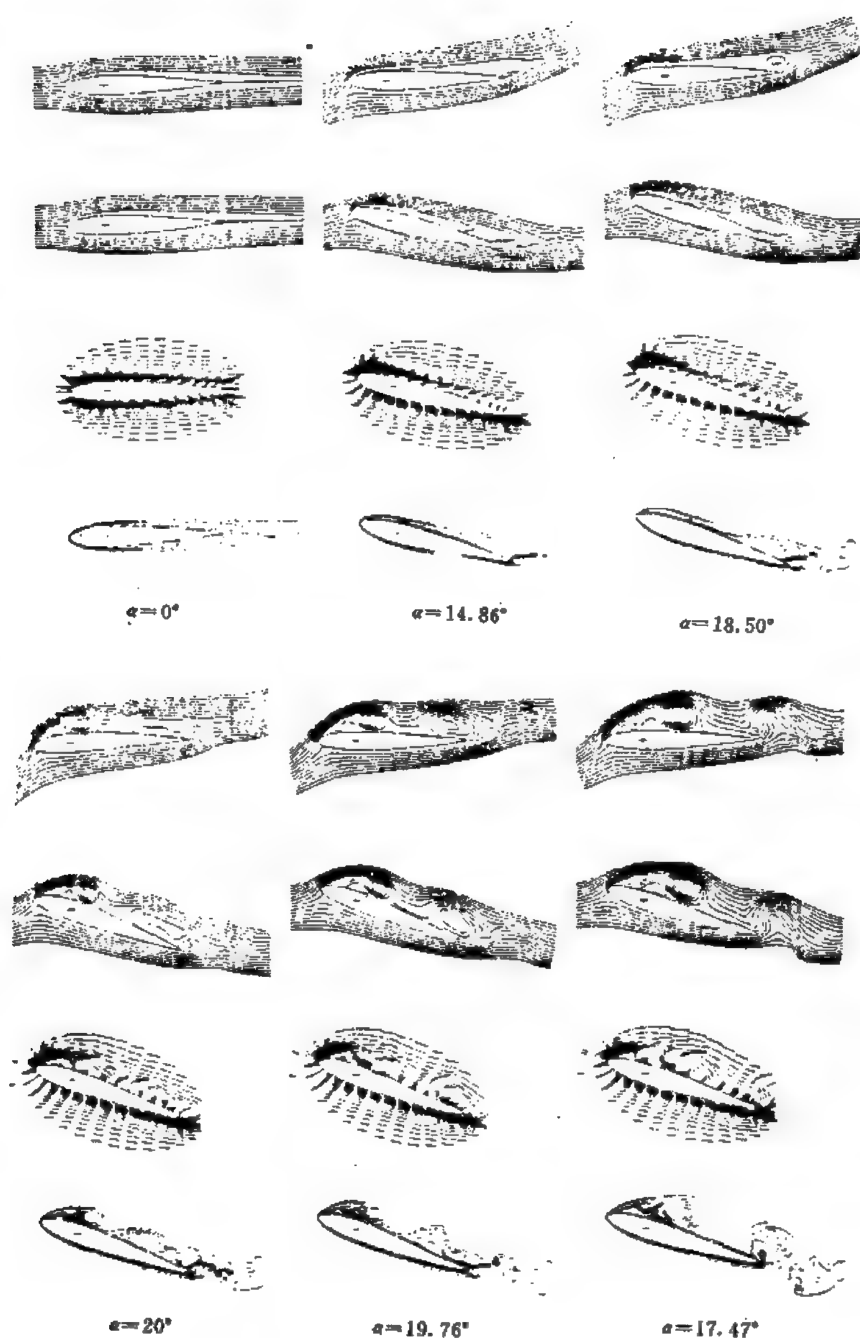


图 C.3.66 (2)

机翼作俯仰运动时的流动图案

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\Gamma}=-\left[\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}-\frac{1}{Re}\nabla^{2}\boldsymbol{V}\right]\cdot\boldsymbol{n} \qquad \text{(C.3.8.29)}$$

应该说在压力边界条件上目前提法有些混乱，其实压力在物理上并不要求给出边界条件，但在计算上则需要边界值的处理，为此才需要给出一个计算边界条件。这个条件的给法很多，我们认为（C.3.8.29）式的提法较好。关于这方面的讨论可以参考 Gresho 的论文。

3.9 用推进迭代法求解不可压缩粘性流体流动的 N-S 方程

在上一节中我们可以看到，求解以原始变量为因变量的 N-S 方程，计算比较困难。如果用 MAC 法，要求解关于压力的方程，用隐式格式计算，迭代次数也很多，因此有必要获得一个比较快的求解方程的计算方法。这里介绍的推进迭代法是基于牛顿法和系数矩阵分裂的方法。对于定常问题，这个方法收敛快；对于不定常流，本方法是否能推广还有待探索。

首先讨论定常问题。

在具体讨论差分格式前先讨论一下系数矩阵分裂问题。定常无粘性不可压缩流体运动的基本方程为

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \\ u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{aligned}\right\} \tag{C.3.9.1}$$

其中为简化起见，设 $\rho=1$，上式改写为矩阵形式有

$$\begin{pmatrix} u & 0 & 1 \\ 0 & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix}=0 \tag{C.3.9.2}$$

或记作

$$A\frac{\partial V}{\partial x}+B\frac{\partial V}{\partial y}=0 \tag{C.3.9.3}$$

其中

$$V=\begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix},A=\begin{pmatrix} u & 0 & 1 \\ 0 & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.3.9.4}$$

定常无粘性不可压缩流体运动基本方程的守恒型为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial uu}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial uv}{\partial x}+\frac{\partial vv}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{aligned}\right\} \tag{C.3.9.5}$$

或记作

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=0 \tag{C.3.9.6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} F=(u^2+p,uv,u)^{\mathrm{T}} \\ G=(uv,v^2+p,v)^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \tag{C.3.9.7}$$

记

$$A_1=\frac{\partial F}{\partial V}=\begin{bmatrix}2u & 0 & 1\\ v & u & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad B_1=\frac{\partial G}{\partial V}=\begin{bmatrix}v & u & 0\\ 0 & 2v & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{C.3.9.8}$$

则

$$A_1^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{u} & -\frac{v}{u}\\ 1 & 0 & -2u\end{bmatrix},\quad B_1^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{v} & 0 & -\frac{u}{v}\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2v\end{bmatrix} \tag{C.3.9.9}$$

直接验算可得

$$AA_1^{-1}=BB_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -u\\ 0 & 1 & -v\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\overset{\text{记作}}{=\!=}\theta$$

$$\theta^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & u\\ 0 & 1 & v\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{C.3.9.10}$$

故有
$$\frac{\partial F}{\partial V}=A_1=\theta^{-1}A,\quad \frac{\partial G}{\partial V}=B_1=\theta^{-1}B \tag{C.3.9.11}$$

于是（C.3.9.3）式二边各乘 θ^{-1} 可得

$$A_1\frac{\partial V}{\partial x}+B_1\frac{\partial V}{\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=0$$ 即为(C.3.9.5)式。

另外注意到

$$|A-\lambda I|=0 \tag{C.3.9.12}$$

的 3 个根为

$$\lambda_a=u,\quad \frac{u+\sqrt{u^2+4}}{2},\quad \frac{u-\sqrt{u^2+4}}{2} \tag{C.3.9.13}$$

记作 λ_{a_3}，λ_{a_1}，λ_{a_2}

A 可以分解为

$$A=T^{-1}\Lambda_AT=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_{a_1}-\lambda_{a_2}} & -\frac{1}{\lambda_{a_1}-\lambda_{a_2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{\lambda_{a_2}}{\lambda_{a_1}-\lambda_{a_2}} & \frac{\lambda_{a_1}}{\lambda_{a_1}-\lambda_{a_2}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_{a_1} & & \\ & \lambda_{a_2} & \\ & & \lambda_{a_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_{a_1} & 0 & 1\\ \lambda_{a_2} & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{C.3.9.14}$$

类似地有

$\mu_b=v$，$\frac{v+\sqrt{v^2+4}}{2}$，$\frac{v-\sqrt{v+4}}{2}$ 记作 μ_{b_3}，μ_{b_1}，μ_{b_2}

$$B=S^{-1}\Lambda_BS=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\mu_{b_1}-\mu_{b_2}} & -\frac{1}{\mu_{b_1}-\mu_{b_2}} & 0\\ -\frac{\mu_{b_2}}{\mu_{b_1}-\mu_{b_2}} & \frac{\mu_{b_1}}{\mu_{b_1}-\mu_{b_2}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_{b_1} & & \\ & \mu_{b_2} & \\ & & \mu_{b_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \mu_{b_1} & 1\\ 0 & \mu_{b_2} & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{C.3.9.15}$$

关于方程在曲线坐标下的表达式，直接列出如下。详细推导，请读者自行作出。

守恒型式为

$$\frac{\partial F'}{\partial \xi}+\frac{\partial G'}{\partial \eta}=0 \tag{C.3.9.16}$$

非守恒形式为（定常）

$$A'_1\frac{\partial V}{\partial \xi}+B'_1\frac{\partial V}{\partial \eta}+\theta\frac{\partial}{\partial \xi}\left(M_{F_\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}+M_{F_\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)+\theta\frac{\partial}{\partial \eta}\left(M_{G_\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}+M_{G_\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)=0 \tag{C.3.9.17}$$

不难证明，不定常时非守恒形式为

$$\theta\frac{\partial}{\partial t}(JV)+A'_1\frac{\partial V}{\partial \xi}+B'_1\frac{\partial V}{\partial \eta}+\theta\frac{\partial}{\partial \xi}\left(M_{F_\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}+M_{F_\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)$$
$$+\theta\frac{\partial}{\partial \eta}\left(M_{G_\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}+M_{G_\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)=0 \tag{C.3.9.18}$$

下面讨论推进迭代法的基本思想。

推进迭代法的思想来自信息传递及牛顿法。非线性方程 $F(U)$ 的求解一般用牛顿法，即设 $U^{(n)}+\delta U^{n}$ 为真解，则有

$$F(U^{(n)}+\delta U^{(n)})=0 \tag{C.3.9.19}$$

或展开得

$$F(U^{(n)})+\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)^{n}\delta U^{n}=0 \tag{C.3.9.20}$$

或

$$\delta U^{n}=-\left[\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)^{n}\right]^{-1}F\ (U^{(n)}) \tag{C.3.9.21}$$

该法应用于（C.3.9.16）式有

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial F'}{\partial V}\delta V^{n}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial G'}{\partial V}\delta V^{n}\right)=-\left(\frac{\partial F'}{\partial \xi}+\frac{\partial G'}{\partial \eta}\right)^{n} \tag{C.3.9.22}$$

由于

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F'}{\partial V}&=\frac{\partial F_1'}{\partial V}+\frac{\partial F_2'}{\partial V}=\theta^{-1}|L_\eta|R_{A'}^{-1}T'^{-1}\Lambda_{A'}T'R_{A'}+\left(M_{F_\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}+M_{F_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\\ \frac{\partial G'}{\partial V}&=\frac{\partial G_1'}{\partial V}+\frac{\partial G_2'}{\partial V}=\theta^{-1}|L_\xi|R_{B'}^{-1}S'^{-1}\Lambda_{B'}S'R_{B'}+\left(M_{G_\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}+M_{G_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\end{aligned}\right\} \tag{C.3.9.23}$$

或简写为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F'}{\partial V}&=A'_1+\left(M_{F_\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}+M_{F_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\\ \frac{\partial G'}{\partial V}&=B'_1+\left(M_{G_\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}+M_{G_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\end{aligned}\right\} \tag{C.3.9.24}$$

代入（C.3.9.22）式得

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(A'_1\delta V^{n})+\frac{\partial}{\partial \eta}(B'_1\delta V^{n})+\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\left(M_{F_\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}+M_{F_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\delta V^{n}\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(M_{G_\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}+M_{G_\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\delta V^{n}\right]=-\left(\frac{\partial F'}{\partial \xi}+\frac{\partial G'}{\partial \eta}\right)^{n} \tag{C.3.9.25}$$

引入记号

$$K^{n}=-\left(\frac{\partial F'}{\partial \xi}+\frac{\partial G'}{\partial \eta}\right)^{n} \tag{C.3.9.26}$$

将 A'_1、B'_1 分解后可得

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(A_1^{+'}\delta V^{n})+\frac{\partial}{\partial \xi}(A_1^{-'}\delta V^{n})+\frac{\partial}{\partial \eta}(B_1^{+'}\delta V^{n})+\frac{\partial}{\partial \eta}(B_1^{-'}\delta V^{n})$$

$$+\frac{\partial}{\partial\xi}\left[M_{F_\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}(\delta V^n)\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[M_{G_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}(\delta V^n)\right]$$

$$=-\left(\frac{\partial F'}{\partial\xi}+\frac{\partial G'}{\partial\eta}\right)^n-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[M_{F_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}(\delta V^n)\right]-\frac{\partial}{\partial\eta}\left[M_{G_\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}(\delta V^n)\right] \quad \text{(C. 3. 9. 27)}$$

差分化时用前、后差分及Beam-Warming显式差分，具体作法是两步：预测和校正。

预测步

$$A_{1,i,j}^{(+)'(n)}\delta V_{i,j}^{\overline{n+1}}-A_{1,i-1,j}^{(+)'(n)}\delta V_{i-1,j}^{\overline{n+1}}+A_{1,i+1,j}^{(-)'(n)}\delta V_{i+1,j}^{\overline{n+1}}-A_{1,i,j}^{(-)'(n)}\delta V_{i,j}^{\overline{n+1}}$$
$$+B_{1,i,j}^{(+)'(n)}\delta V_{i,j}^{\overline{n+1}}-B_{1,i,j-1}^{(+)'(n)}\delta V_{i,j-1}^{\overline{n+1}}+B_{1,i,j+1}^{(-)'(n)}\delta V_{i,j+1}^{\overline{n+1}}-B_{1,i,j}^{(-)'(n)}\delta V_{i,j}^{\overline{n+1}}$$
$$+[M_{F\xi_{i+1,j}}(\delta V_{i+1,j}^{\overline{n+1}}-\delta V_{i,j}^{\overline{n+1}})-M_{F\xi_{i-\frac{1}{2},j}}(\delta V_{i,j}^{\overline{n+1}}-\delta V_{i-1,j}^{\overline{n+1}})]$$
$$+[M_{G_{\eta i,j+\frac{1}{2}}}(\delta V_{i,j+1}^{\overline{n+1}}-\delta V_{i,j}^{\overline{n+1}})-M_{G_{\eta i,j-\frac{1}{2}}}(\delta V_{i,j}^{\overline{n+1}}-\delta V_{i,j-1}^{\overline{n+1}})]$$
$$+\frac{1}{4}\{[M_{F\eta_{i+1,j}}(\delta V_{i+1,j+1}^n-\delta V_{i+1,j-1}^n)+M_{\eta_{i-1,j}}(\delta V_{i-1,j+1}^n-\delta V_{i-1,j-1}^n)]$$
$$+[M_{G_{\xi i,j+1}}(\delta V_{i+1,j+1}^n-\delta V_{i-1,j+1}^n)-M_{G_{\xi i,j-1}}(\delta V_{i+1,j-1}^n-\delta V_{i-1,j-1}^n)]\}$$
$$=K_{预测}^n \quad \text{(C. 3. 9. 28)}$$

或改写为

$$\widetilde{W}_{i,j}^{(n)}\delta V_{i-1,j}^{\overline{n+1}}+\widetilde{S}_{i,j}^{(n)}\delta V_{i,j-1}^{\overline{n+1}}+\widetilde{C}_{i,j}^{(n)}\delta V_{i,j}^{\overline{n+1}}+\widetilde{N}_{i,j}^{(n)}\delta V_{i,j+1}^{\overline{n+1}}$$
$$+\widetilde{E}_{i,j}^{(n)}\delta V_{i+1,j}^{\overline{n+1}}=\widetilde{D}_{0,i,j}^{(n)} \quad \text{(C. 3. 9. 29)}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\widetilde{W}_{i,j}^{(n)}&=-A_{1,i-1,j}^{(+)'(n)}+M_{F_{\xi i-\frac{1}{2},j}}\\
\widetilde{E}_{i,j}^{(n)}&=A_{1,i+1,j}^{(-)'(n)}+M_{F_{\xi i+\frac{1}{2},j}}\\
\widetilde{S}_{i,j}^{(n)}&=-B_{1,i,j-1}^{(+)'(n)}+M_{G_{\eta_{i,j-\frac{1}{2}}}}\\
\widetilde{N}_{i,j}^{(n)}&=B_{1,i,j+1}^{(-)'(n)}+M_{G_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}}}\\
\widetilde{B}_{i,j}^{(n)}&=A_{1,i,j}^{(+)'(n)}-A_{1,i,j}^{(-)'(n)}+B_{1,i,j}^{(+)'(n)}-B_{1,i,j}^{(-)'(n)}\\
&\quad-(M_{F_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}}+M_{F_{\xi_{i-\frac{1}{2},j}}}+M_{G_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}}}+M_{G_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}}})\\
\widetilde{D}_{0,i,j}^{(n)}&=(K)_{预测}^n-\frac{1}{4}\{M_{F_{\eta_{i+1,j}}}(\delta V_{i+1,j+1}^n-\delta V_{i+1,j-1}^n)\\
&\quad-M_{F\eta_{i-1,j}}(\delta V_{i-1,j-1}^n-\delta V_{i-1,j-1}^n)\\
&\quad+M_{G_{\xi_{i,j+1}}}(\delta V_{i+1,j+1}^n-\delta V_{i-1,j+1}^n)\\
&\quad-M_{G_{\xi_{i,j-1}}}(\delta V_{i+1,j-1}^n-\delta V_{i-1,j-1}^n)\}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(C. 3. 9. 30)}$$

$K_{预测}^n$中$A_1^{(+)'}$部分也用后差，$A_1^{(-1)'}$部分用前差，B_1^+，B_1^-类似，其余均用中心差分。其中δV^n用上一次的迭代值。

校正步公式类同，有

$$\widetilde{W}_{i,j}^{\overline{n+1}}\delta V_{i-1,j}^{n+1}+\widetilde{S}_{i,j}^{\overline{n+1}}\delta V_{i,j-1}^{n+1}+\widetilde{C}_{i,j}^{\overline{n+1}}\delta V_{i,j}^{n+1}+\widetilde{N}_{i,j}^{\overline{n+1}}\delta V_{i,j+1}^{n+1}+\widetilde{E}_{i,j}^{\overline{n+1}}\delta V_{i-1,j}^{n+1}$$
$$=\widetilde{D}_{0,i,j}^{\overline{n+1}}+\widetilde{D}_{1,i,j}^{\overline{n+1}}$$

其中 $(\tilde{W}, \tilde{S}, \tilde{C}, \tilde{N}, \tilde{E})_{i,j}^{\overline{n+1}}$公式同 (C. 3. 9. 30) 式，只是将 (n) 值改为 $(\overline{n+1})$ 值；$\tilde{D}_{0,i,j}^{\overline{n+1}}$，$\tilde{D}_{1,i,j}^{\overline{n+1}}$计算中 K 值用 $K_{校正}^{\overline{n+1}}$值，它等于

$$K_{校正}^{\overline{n+1}} = \frac{1}{2}(K^{n} + K^{\overline{n+1}}) \tag{C. 3. 9. 31}$$

在 K^{n} 中

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_{-} &= 2f_{i,j} - 3f_{i-1,j} + f_{i-2,j} \\
\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_{+} &= -2f_{i,j} + 3f_{i+1,j} - f_{i+2,j} \\
\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_{-} &= 2f_{i,j} - 3f_{i,j-1} + f_{i,j-2} \\
\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_{+} &= -2f_{i,j} + 3f_{i,j+1} + f_{i,j+2}
\end{aligned}\right\} \tag{C. 3. 9. 32}$$

在 $K^{\overline{n-1}}$中

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_{-} = f_{i,j} - f_{i-1,j}, \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_{+} = f_{i+1,j} - f_{i,j} \\
\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_{-} = f_{i,j} - f_{i,j-1}, \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_{+} = f_{i,j+1} - f_{i,j}
\end{aligned}\right\} \tag{C. 3. 9. 33}$$

将它们代入 $\tilde{D}$ 中得到 D 的具体表达式为

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{0,i,j}^{\overline{n+1}} = &-\{[A_{i,j}^{(+)'\overline{n+1}}(V_{i,j}^{\overline{n+1}} - V_{i-1,j}^{\overline{n+1}}) + A_{i,j}^{(-)'\overline{n+1}}(V_{i+1,j}^{\overline{n+1}} - V_{i,j}^{\overline{n+1}}) \\
&+ B_{i,j}^{(+)'\overline{n+1}}(V_{i,j}^{\overline{n+1}} - V_{i,j-1}^{\overline{n+1}}) + B_{i,j}^{(-)'\overline{n+1}}(V_{i,j+1}^{\overline{n+1}} - V_{i,j}^{\overline{n+1}})]k_1 \\
&+ M_{F_{\xi_{i+\frac{1}{2},j}}}(\overline{V}_{i+1,j} - \overline{V}_{i,j}) - M_{F_{\xi_{i-\frac{1}{2},j}}}(\overline{V}_{i,j} - \overline{V}_{i-1,j}) \\
&+ M_{G_{\eta_{i,j+\frac{1}{2}}}}(\overline{V}_{i,j+1} - \overline{V}_{i,j}) - M_{G_{\eta_{i,j-\frac{1}{2}}}}(\overline{V}_{i,j} - \overline{V}_{i,j-1}) \\
&+ \frac{1}{4}[M_{F_{\eta_{i+1,j}}}(\overline{V}_{i+1,j+1} - \overline{V}_{i+1,j-1}) - M_{F_{\eta_{i-1,j}}}(\overline{V}_{i-1,j+1} - \overline{V}_{i-1,j-1}) \\
&+ M_{G_{\xi_{i,j+1}}}(\overline{V}_{i+1,j+1} - \overline{V}_{i-1,j+1}) - M_{G_{\xi_{i,j-1}}}(\overline{V}_{i,j+1} - \overline{V}_{i,j-1})] \\
&+ \frac{1}{4}[M_{F_{\eta_{i+1,j}}}(\delta\overline{V}_{i+1,j+1} - \delta\overline{V}_{i+1,j-1}) - M_{F_{\eta_{i-1,j}}}(\delta\overline{V}_{i-1,j+1} - \delta\overline{V}_{i-1,j-1}) \\
&+ M_{G_{\xi_{i,j+1}}}(\delta\overline{V}_{i+1,j+1} - \delta\overline{V}_{i-1,j+1}) - M_{G_{\xi_{i,j-1}}}(\delta\overline{V}_{i,j+1} - \delta\overline{V}_{i,j-1})]\}
\end{aligned} \tag{C. 3. 9. 34-1}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{1,i,j}^{\overline{n+1}} = &-k_2\{A_{i,j}^{(+)'(n)}(2V_{i,j}^{(n)} - 3V_{i-1,j}^{(n)}) + A_{i,j}^{(-)'(n)}(-2V_{i,j}^{(n)} + 3V_{i+1,j}^{(n)}) \\
&+ B_{i,j}^{(+)'(n)}(2V_{i,j}^{(n)} - 3V_{i,j-1}^{(n)}) + B_{i,j}^{(-)'(n)}(-2V_{i,j}^{(n)} + 3V_{i,j+1}^{(n)})\} \\
&- k_2\{A_{i,j}^{(+)'(n)}V_{i-2,j}^{(n)} - A_{i,j}^{(-)'(n)}V_{i-2,j}^{(n)} + B_{i,j}^{(+)'(n)}V_{i,j-2}^{(n)} \\
&- B_{i,j}^{(-)'(n)}V_{i,j-2}^{(n)}\}
\end{aligned} \tag{C. 3. 9. 34-2}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{其中} & \overline{V} = k_1 V^{(n)} + k_2 V^{\overline{n+1}}, \delta\overline{V} = k_1 \delta V^{(n)} + k_2 \delta V^{(n+1)} \\ \text{预测步中} & k_1 = 1, k_2 = 0 \\ \text{校正步中} & k_1 = k_2 = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \quad (C.3.9.35)$$

在计算时需要将 ξ，η 在正反两个方向上"扫"，即 ξ 方向向前推进一次，向后推进一次；η 方向也是正反两个方向各一次。流动有明显主流时，只用在主流方向前后推进即可。计算在 $\delta V \to 0$ 时趋于稳定。用本方法计算了如下的例子。

第一、第二两例均为空腔流，网络为 100×100，Re 从 1 到 5000，但上边界速度不同，如图 C.3.67 所示。其计算结果如图 C.3.68 和图 C.3.69 所示。

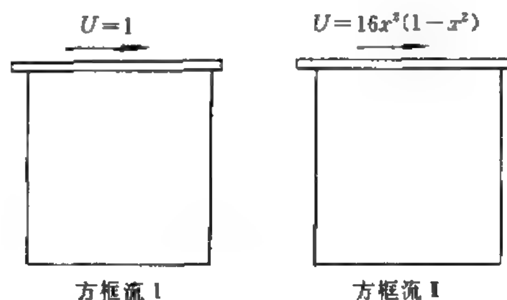


图 C.3.67

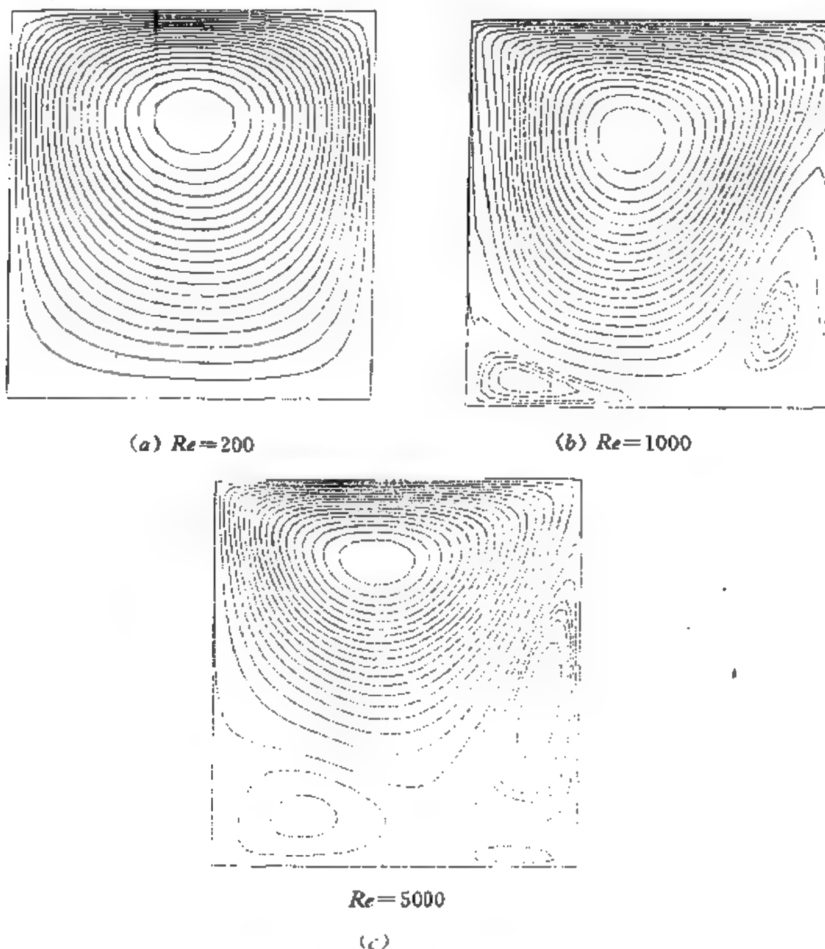
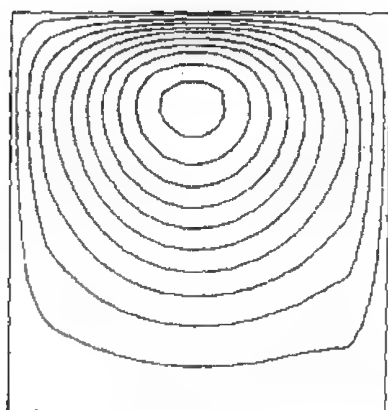


图 C.3.68

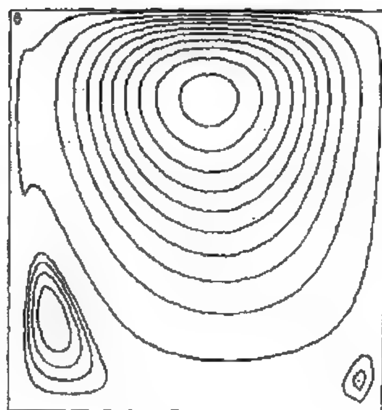
方框流 I 的流线图

第 3 例为圆柱绕流，$Re=40$ 的计算结果表示在图 C.3.70 上。

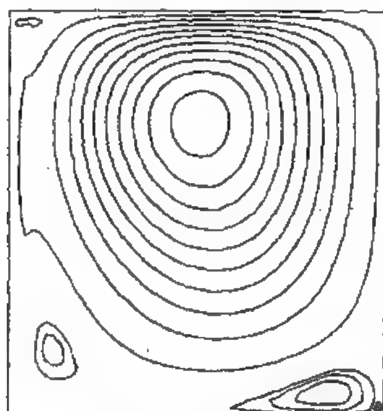
计算结果表明，本方法收敛性好，每计算 10 次，误差下降一个数量级，所以一般迭代 30



（a）$Re=200$



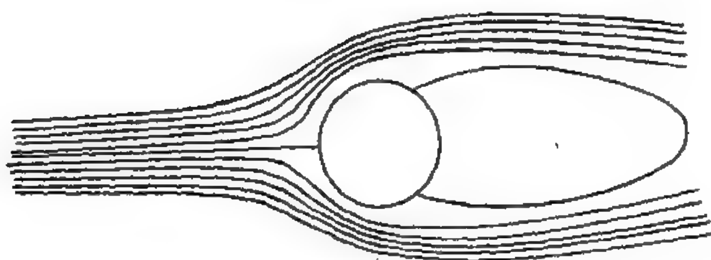
（b）$Re=1000$



（c）$Re=5000$

图 C.3.69

方框流Ⅰ的流线图



$Re=40$ 时的流线图

图 C.3.70

次，即可收敛到 $10^{-3}\sim10^{-4}$。本方法也可推广到不定常，这时方程采用（C.3.9.18）式，计算时 $\theta\dfrac{\partial}{\partial t}$（$JV$）可以用（$V^{n+1}-V^{n}$）$J\cdot\theta^{n}/\Delta t$ 代替，但 V^{n-1}用上一次的迭代结果，并把这一项值作为已知量移到方程右边，迭代多次后，V^{n-1}趋于稳定，再计算下一时间层的值。差分格

式中的其它项都用 $n+1$ 时间层的值计算，这样得到的是一个隐式格式，在时间方向上是无条件稳定的，因此可以用比较大的 Δt。建议读者试用这一方法。

3.10　用谱方法求解不可压缩粘性流体流动的 N-S 方程

以上各节讨论的方法大多比较复杂，计算量大，计算速度比较慢。如果采用谱方法，就能提高精度和计算效率。谱方法的缺点是在流场的几何形状方面有较大的限制。下面我们介绍平直槽道内用谱方法计算的步骤和结果。限于篇幅，此处只介绍 Moser 方法，其它方法将在下一章中讨论。

首先将 M-S 方程改写为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}=-\nabla p-\frac{1}{Re}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{\Omega}\\&\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0\quad \boldsymbol{V}|_{\text{壁面}}=0\end{aligned}\right\}\tag{C.3.10.1}$$

先将第 1 式改写为 Stokes 方程的形式，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}=-\nabla p-\frac{1}{Re}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{V}+\boldsymbol{f}\tag{C.3.10.2}$$

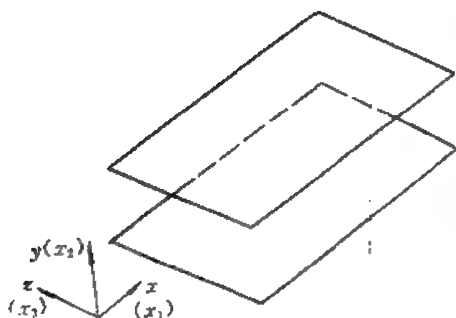


图　C.3.71

所求解的域为平直槽道内的流动。在平直槽道中将 p 分成两部分：

$$p=p_0+p'$$

其中　$\nabla p_0=\left(\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}x}\right)\boldsymbol{i}_x$，$\left(\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}x}\right)$ 为一常数，再把这一项吸收到 $\boldsymbol{f}$ 中去，可以看到 (C.3.10.2) 式中 p 应为 p'。在以后未加说明时 p 为 p'，并且和 $\boldsymbol{V}$ 一样也在 x，z 方向上为周期变化，其周期分别为 L_x 和 L_z。

参看图 C.3.71，在平直槽道内，设

$$\boldsymbol{V}=\sum_{k_z}\sum_{k_x}\sum_{j=0}^{J}\alpha_j(k_x,k_z,t)\cdot\boldsymbol{u}_j(y_j,k_x,k_z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_xx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_zz}\tag{C.3.10.3}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&k_x=\frac{2\pi m}{L_x}\quad m=-M,\cdots,-1,0,1,\cdots,M\\&k_z=\frac{2\pi n}{L_z}\quad n=-N,\cdots,-1,0,1,\cdots,N\end{aligned}\right\}\tag{C.3.10.4}$$

并要求

$$\nabla\cdot[\boldsymbol{u}_j(y_j,k_x,k_z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_xx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_zz}]=0,\boldsymbol{u}_j|_{y=\pm1}=0\tag{C.3.10.5}$$

引入权函数

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\phi}_j(k_x,k_z,x,y,z)=\boldsymbol{\psi}_j(y,k_x,k_z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_xx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_zz}\\&\nabla\cdot[\boldsymbol{\psi}_j(y_j,k_x,k_z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_xx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_zz}]=0\\&\boldsymbol{\psi}_j(y_j,k_x,k_z)\cdot\boldsymbol{n}|_{y=\pm1}=0\end{aligned}\right\}\tag{C.3.10.6}$$

将它与 (C.3.10.2) 式相数乘，并考虑到 p（即 p'!）及 $\boldsymbol{V}$ 的周期性，在全流场积分得

$$\sum_{j=0}^{J}\frac{\mathrm{d}a_j}{\mathrm{d}t}\int_{-1}^{1}\Psi_{j'}u_j\mathrm{d}y=\frac{1}{Re}\sum_{j=1}^{J}a_j\int_{-1}^{1}\psi_{j'}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}-(k_x^2+k_z^2)\right]u_j\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\psi_{j'}f\mathrm{d}y \tag{C.3.10.7}$$

$$j'=0,1,\cdots,J;\forall\ k_x,k_z$$

设

$$f=\sum_{k_x}\sum_{k_z}\hat{f}(y,k_x,k_z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_xx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_zz} \tag{C.3.10.8}$$

为简化计算引入

$$a_ju_j=a_j^+u_j^++a_j^-u_j^- \tag{C.3.10.9}$$

类似地设 $\psi_{j'}$ 也分成二部分，并令

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\psi_{j'}^+u_j^-\mathrm{d}y=0,\quad\int_{-1}^{1}\psi_{j'}^-\ u_j^+\mathrm{d}y=0\\&\int_{-1}^{1}\psi_{j'}^+\mathscr{L}u_j^-\mathrm{d}y=0,\quad\int_{-1}^{1}\psi_{j'}^-\ \mathscr{L}u_j^+\mathrm{d}y=0\\&\mathscr{L}u\equiv\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}-(k_x^2+k_z^2)\right]u\end{aligned}\right\} \tag{C.3.10.10}$$

代入（C.3.10.7）式可得

$$\left.\begin{aligned}A^+\frac{\mathrm{d}a^+}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{Re}B^+a^++F^+\\A^-\frac{\mathrm{d}a^-}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{Re}B^-a^-+F^-\end{aligned}\right\} \tag{C.3.10.11}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&A_{j'j}^+=\int_{-1}^{1}\psi_{j'}^+u_j^+\mathrm{d}y,A_{j'j}^-=\int_{-1}^{1}\psi_{j'}^-u_j^-\mathrm{d}y\\&B_{j'j}^+=\int_{-1}^{1}\psi_{j'}^+\mathscr{L}u_j^+\mathrm{d}y,B_{j'j}^-=\int_{-1}^{1}\psi_{j'}^+\mathscr{L}u_j^-\mathrm{d}y,\\&F_{j'}^+=\int_{-1}^{1}\psi_{j'}^+\hat{f}\mathrm{d}y,F_{j'}^-=\int_{-1}^{1}\psi_{j'}^-\hat{f}\mathrm{d}y,(j'j=0,1,\cdots,J)\end{aligned}\right\} \tag{C.3.10.12}$$

另外设

$$k_{x'}=\sqrt{k_x^2+k_z^2}\quad k_{z'}=0 \tag{C.3.10.13}$$

$$\left.\begin{aligned}&u_j^+=\begin{pmatrix}ig'_j\\k_xg_j\\0\end{pmatrix}\quad u_j^-=\begin{pmatrix}0\\0\\h_j\end{pmatrix}\\&\Psi_{j'}^+=\begin{pmatrix}-iQ'_{j'}\\k_{x'}Q_{j'}\\0\end{pmatrix}\quad\psi_{j'}^-=\begin{pmatrix}0\\0\\p_{j'}\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{C.3.10.14}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&g_j=(1-y^2)^2T_j(y)\quad h_j=(1-y^2)T_j(y)\\&Q_j=\left(\frac{T_{j-2}(y)}{j(j+1)}-\frac{2T_j(y)}{(j+1)(j-1)}+\frac{T_{j-2}(y)}{j(j-1)}\right)/4(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\\&p'_j=[T_{j'-1}(y)-T_{j'+1}(y)]/2j'(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{C.3.10.15}$$

T 为 Chedyshev 多项式，$g'_j=\mathrm{d}g_j/\mathrm{d}y$，$Q'_{j'}=\mathrm{d}Q_{j'}/\mathrm{d}y$，在 $k_{x'}=0$ 时

$$u_j^+=\begin{pmatrix}h_j\\0\\0\end{pmatrix},u_j^-=\begin{pmatrix}0\\0\\h_j\end{pmatrix},\psi_{j'}^+=\begin{pmatrix}p_{j'}\\0\\0\end{pmatrix},\psi_{j'}^-=\begin{pmatrix}0\\0\\p_{j'}\end{pmatrix} \tag{C.3.10.16}$$

有了以上这些表达式，可具体确定（C.3.10.11）式中的 A^+，A^-，B^+，B^-，F^+，F^-，由此得

$$A\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{Re}B\alpha+F \tag{C.3.10.17}$$

求解用 Adams-Bashforth/Crank-Nicolson 格式

$$A\frac{\alpha^{n+1}-\alpha^{n}}{\Delta t}=\frac{1}{2Re}B(\alpha^{n+1}+\alpha^{n})+\frac{1}{2}(3F^{n}-F^{n-1}) \tag{C.3.10.18}$$

或整理得

$$\left(A-\frac{\Delta t}{2Re}B\right)\alpha^{n+1}=\left(A+\frac{\Delta t}{2Re}B\right)\alpha^{n}+\frac{\Delta t}{2}(3F^{n}-F^{n-1}) \tag{C.3.10.19}$$

于是方程即可以求解了。

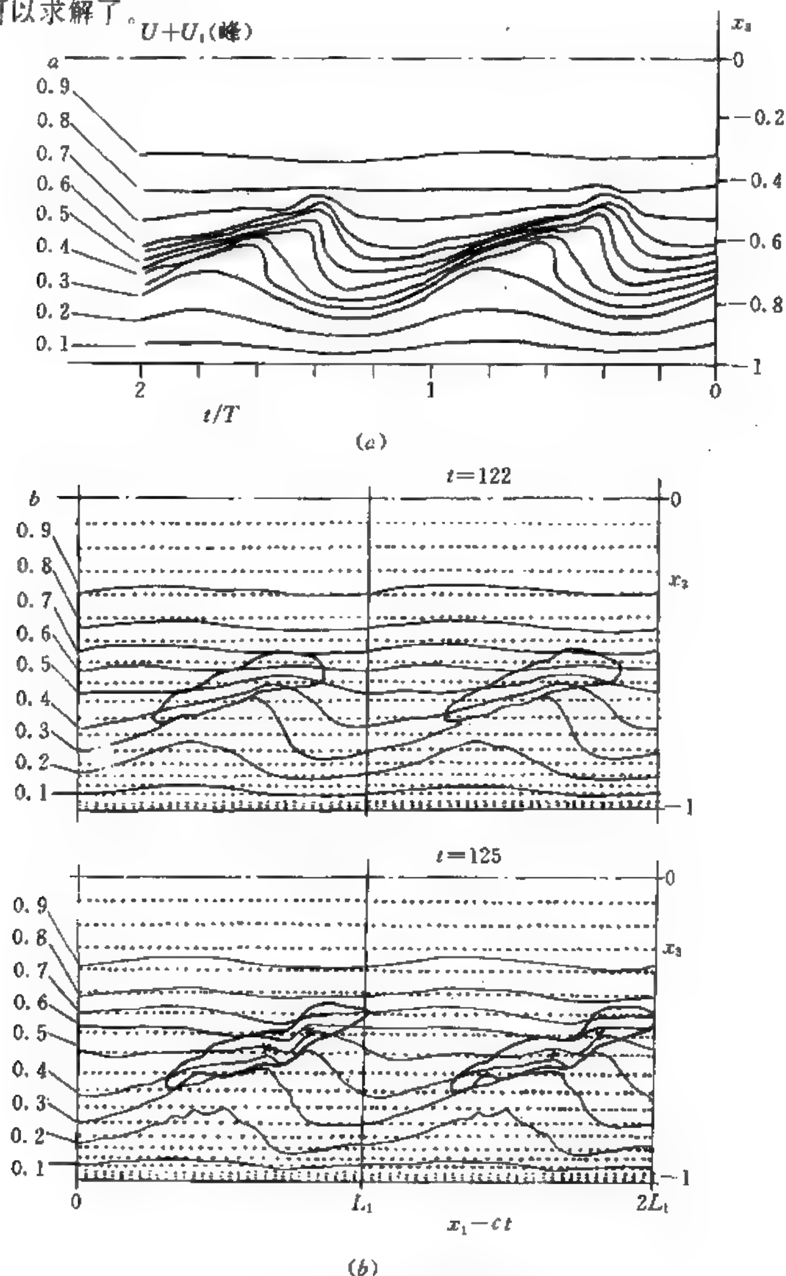


图 C.3.72 瞬时速度的等值线

(a) 实验值 (b) 计算值

谱方法用于槽道流的还有 Kleise 方法，另外 Orszag 和单肖文分别对剪切流进行了计算，得到的计算结果如图 C. 3. 72，C. 3. 73 及 C. 3. 74 所示。在图 C. 3. 72 及图 C. 3. 73 中显示的“斑点”与有关实验相符。图 C. 3. 74 中显示的剪切流的相干结构也与实验相一致。

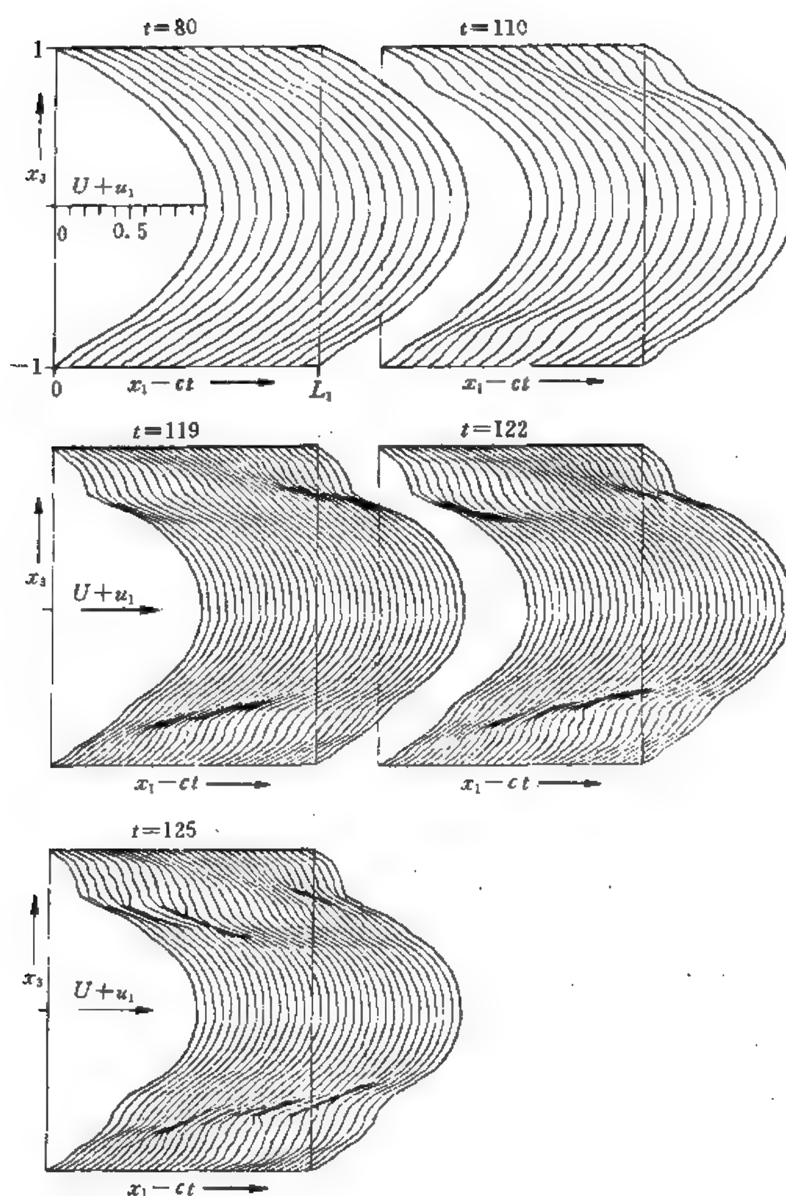


图 C. 3. 73　瞬时速度剖面

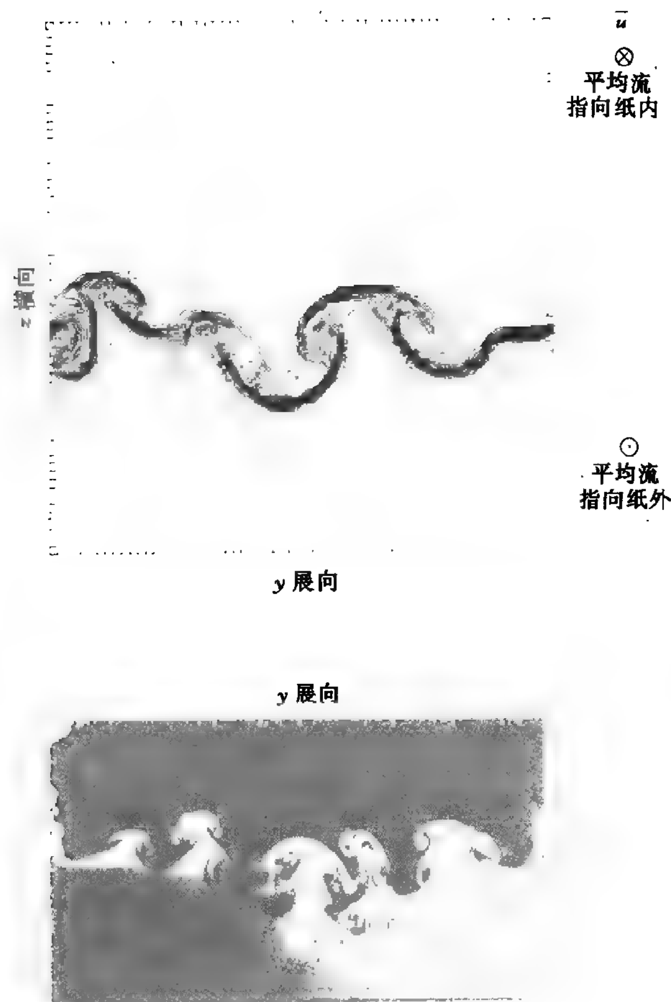


图 C.3.74　平面混合层中的相干结构
上图计算值　下图实验

小　　结

本章介绍了可压缩粘性流体流动的几种常用方法（MacCormack 显式格式，Beam-Warming 显式和隐式格式，及扩散格式和 NND 格式，通量分裂法和推进迭代法）以及不可压缩粘性流体流动的几种常用方法（ψ-ζ（流函数-旋度）方法，有限单元法，有限差分法，有限解析法，推进迭代法和谱方法）。

应该指出，对于可压缩粘性流体流动的数值计算近年来又有不少新的方法，最重要的方法是 TVD（总变差减小）方法。关于这一方法将在本篇第六章中介绍。不可压缩流动计算中的重要问题是寻求一种快速求解压力泊松方程的方法。谱方法就是其中的一种，但限制条件较多。多重网格是一种加速收敛的有效方法，还将在第六章中予以介绍，但寻求更有效的快速方法仍然是一亟待解决的问题。下表列出了求解不可压缩流动的 M-S 方程的几种方法的比较。

方　法	优　　点	缺点及限制
ψ-ζ 方法	(1) 不用压力修正 (2) 程序设计简单 (3) 便于图象显示	(1) 只能用于二维问题 (2) ζ 的边界条件不易处理
有限单元法	(1) 对于任意区域显示方便 (2) 可使用原始变量，不用压力修正	(1) 程序设计复杂 (2) 运算耗时较多
有限解析法	(1) 自动迎风性 (2) 高 Re 时有使用前途（用奇异摄动） (3) 可用原始变量	(1) 需要压力修正 (2) 运算耗时较多
有限差分法	(1) 程序设计简单 (2) 可以采用原始变量	(1) 需压力修正 (2) 运算耗时较多
推进迭代法	(1) 收敛性好 (2) 适用于任意曲线坐标 (3) 可以采用原始变量	虽然目前已使用于定常问题，不定常问题待解决
谱方法	(1) 计算速度快 (2) 精度高 (3) 可用于湍流和流动稳定性计算	(1) 只能用于具有简单形状的流场 (2) 要求有周期条件

参考文献

1. MacCormack R W. The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering. AIAA paper, 1969, No. 69—354
2. Hakkinen R J. The Interaction of an Oblique Shock Move with a Laminar Boundary Layer. NASA, 1959, Memo Z-18-59W
3. Beam R M, Warming R F, An Implicit Factored Scheme for the Compressible NS Equations, AIAA J, 1978, Vol. 16, No. 4
4. 张涵信等．超声速、超高声速粘性气体分离流动的显隐式差分解法．应用数学和力学，1983，Vol. 4，No. 1
5. 张涵信等．无波动、无自由参数的耗散差分格式．空气动力学报，1988，Vol. 6，No. 2
6. MacCormack R W. Curreut Status of Numerical Solutions of the NS Equations. AIAA paper, 1985, 85—32
7. 庄逢甘等．求解气体动力学方程的推进迭代方法．空气动力学学报，1987，Vol. 5，No. 3
8. Lyubimov A N, Rusanov V V. Gas Flow Around Blunt Bodies. NAUKA, Moscow, 1970
9. Peyret R, Taylor T D. Computational Methods for Fluid Flow. Springer-Verlag, 1983
10. Kellogg R B, Tsan A. Analysis of Some Difference Approxinations for a Singular Perturbation Problem Without Turning Points. Math. Comp. 1978, Vol. 32
11. Lecointe Y Q, Pignet J. Compact Finite-Difference Methods for Soluing Incompressible NS Equation Around Oscillating Bodies. VKI for Fluid Dynamik Lecture Series, 1985, 1985-04
12. 苏铭德．二维分岔槽道内非牛顿流体流动的有限元分析．应用数学和力学，1986，Vol. 7，No. 10
13. 应隆安．粘性不可压缩流体运动的有限元法．数学进展，1983 No. 2

14. Oden J T, Reddy J N. An Introduction of the Mathematical Theory of Finite Elements. New York: Wiley, 1976
15. Chung T J，张二骏等译．流体动力学中的有限元分析．水利电力出版社，1980
16. Heinrich J C. An upwind Finite Element Scheme for Two-Dimensional Convective Transport Equation. Int. J. Num. Methods Eng., 1977 No. 11 pp131—143
17. Thomasset F. Imptementation of Finite Element Methods for NS Eguations. Springe-Verlag, 1981
18. Chen C J. The Finite Analytic Method in Flows and Heat Transfer. A Course of Dept. of Mech. Eng., University of Iowa, 1987
19. 苏铭德，凌熙．用有限解析法解 NS 方程．空气动力学极
20. 苏铭德，文献波．横向流动对振荡圆柱作用的直接数值模拟．水动力学研究与进展，1989，No. 3
21. S V 帕坦卡，张政译．传热与流体流动的数值计算．科学出版社，1984
22. Jang D S. Comparison of the PISO, SIMPLER and SIMPLEC Algorithm for the Treatment of the Pressure-Velocity Coupling in Steady Flow Problems, Num. Heat Transfer, 1986, Vol. 10, 209—228
23. Havlow F H, Welsh J E. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. Physics of Fluids, 1965, Vol. 8, No. 12, 2182—2189
24. Chorin A J. Numerical Solution of Incompressible Flow Problem. in "Studies in Numerical Analysis 2". Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvamia, 1968, 64—70
25. Metha U B, Starting Vortex. Separation Bubbles and Stall—A Numerical Study of Laminar Unsteady Flow Around an Airqoil. Chicago: Ph. D. Thesis, Illinois Institute of Technology, 1972
26. Gresho P M, Sani R L. On Pressure Boundary Conditions for the Incompressible NS Equations, Int. J. for Num. Mathods in Fluids, Vol. 7, 1111—1145
27. 苏铭德等．定常不可压缩粘性流体流动 NS 方程的推进迭代法．计算物理，1989
28. 苏铭德，廖柏程．用谱方法解 NS 方程．水动力学研究与进展，1988，No. 4
29. Moser R D. A Spectral Numerical Method for the NS Equation with Application to Taylor-Couette Flow. J. of Computational Physics, 1983, Vol. 52: 524—544
30. Canuto C. Spectral Methods in Fluid Dynamics. Springer-Verlag. 1988
31. 单肖文．混合层中拟序结构的直接数值模拟．北京大学力学系硕士论文．1988
32. Kleiser L. Numerische Simulationen 2um Laminar-Lurbulemten Umschlagsprozeβ der Eqenen Poiseuille-Strömung 1982. KfK-3271

习　题

1. 试给出（附-59）和（附-60）式内各项的具体形式。

2. 试导出

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2d\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+e\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f$$

的 MacCormack 的具体形式，从而证实（C. 3. 1. 12）式的结论，并证明稳定条件为

$$\Delta t\leqslant\frac{1}{\frac{|a|}{\Delta x}+\frac{|b|}{\Delta y}+2\left(\frac{c}{\Delta x^2}+\frac{e}{\Delta y^2}\right)+\frac{2d}{\Delta x\Delta y}}$$

如用时间分裂法，则稳定条件为

$$\Delta t\leqslant\min\left\{\frac{1}{\frac{|a|}{\Delta x}+\frac{2c}{\Delta x^2}+\frac{d}{\Delta x\Delta y}},\frac{1}{\frac{|b|}{\Delta y}+\frac{2c}{\Delta y^2}+\frac{d}{\Delta x\Delta y}}\right\}$$

3. 试求 $M_{F_i r_j}$ 的特征，并给出（C. 3. 1. 18）式中的最后形式。

4. 试用通量分裂方法计算第 4 节中给出的算例，并与 MacCormack 的结果进行比较。

5. 试导出任意曲线坐标下简化 N-S 方程的推进迭代的具体公式。

6. 导出（C. 3. 5. 7，8，11）3 式在任意正交曲线坐标下的表达式。

7. 导出（C. 3. 5. 27）式。

8. 用有限解析法求解

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,t) = 1 \quad u(1,t) = 2$$

$$u(x,0) = 1 + x + \sin\pi x$$

$$\nu = 10^{-3},10^{-4},10^{-5},10^{-6}$$

9. 用有限元法求解题 8。

10. 建立轴对称流动下柱坐标的不可压缩粘性流的 N-S 方程，并写出其有限元方程的建立过程。

11. 用有限元计算方框流的流场（见图 C. 3. 75）。

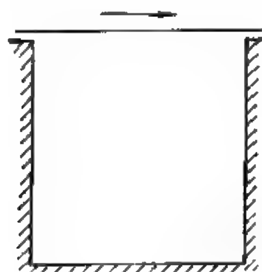


图 C. 3. 75

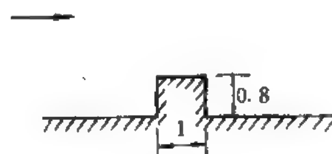


图 C. 3. 76

12. 计算图 C. 3. 76 所示的绕方块的绕流。

13. 用有限元法建立（C. 3. 6. 38）式及其稳定条件为（C. 3. 6. 39）式。

14. 试导出（C. 3. 7. 2）和（C. 3. 7. 3）两式。

15. 试导出（C. 3. 7. 54）和（C. 3. 7. 55）两式。

16. 试用有限解析法计算题 11 中的流动并与有限元方法比较。

17. 讨论（C. 3. 8. 3）式的稳定性条件（设 $\Delta x=\Delta y=\Delta$）。

18. 分析（C. 3. 8. 11）式及（C. 3. 8. 13）式的稳定条件，可以略去压力项，假定 $\Delta x=\Delta y=\Delta$，系数“冻结”化。

19. 用有限差分法求解题 11 中的流动。

20. 试导出 MAC 方法在曲线坐标下的应用格式及压力边界条件的处理。

21. 试导出（C. 3. 9. 17）式和（C. 3. 9. 18）式。

22. 参考本章末附录中关于三维的推导，导出三维情况的系数分裂在曲线坐标下的表达式。

附　　录

可压缩粘性流体流动 NS 方程在直角坐标下的守恒形式

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial (F_U+F_V)}{\partial x}+\frac{\partial (G_U+G_V)}{\partial y}+\frac{\partial (H_U+H_V)}{\partial z}=R \tag{附 -1}$$

其中

$$U=(\rho,\ \rho u,\ \rho v,\ \rho w,\ \rho E_s)^{\mathrm{T}} \tag{附 -2}$$

$$F_U=\begin{pmatrix}\rho u\\ p+\rho u^2\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (\rho E_s+p)u\end{pmatrix},\quad F_V=\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-2\mu\varepsilon_{xx}\\ -2\mu\varepsilon_{xy}\\ -2\mu\varepsilon_{xz}\\ -2\mu\left(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_x+\frac{1}{3}u(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\right)-k\frac{\partial T}{\partial x}\end{pmatrix} \tag{附 -3}$$

$$G_U=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho vu\\ p+\rho v^2\\ \rho vw\\ (\rho E_s+p)v\end{pmatrix},\quad G_V=\begin{pmatrix}0\\ -2\mu\varepsilon_{yx}\\ \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-2\mu\varepsilon_{yy}\\ -2\mu\varepsilon_{yz}\\ -2\mu\left(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_y+\frac{1}{3}v(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\right)-k\frac{\partial T}{\partial y}\end{pmatrix} \tag{附 -4}$$

$$H_U=\begin{pmatrix}\rho w\\ \rho wu\\ \rho wv\\ p+\rho w^2\\ (\rho E_s+p)w\end{pmatrix},\quad H_V=\begin{pmatrix}0\\ -2\mu\varepsilon_{zx}\\ -2\mu\varepsilon_{zy}\\ \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-2\mu\varepsilon_{zz}\\ -2\mu\left(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_z+\frac{1}{3}w(\nabla\cdot\boldsymbol{V})\right)-k\frac{\partial T}{\partial z}\end{pmatrix} \tag{附 -5}$$

$$\left.\begin{aligned}&E_s=\left(e+\frac{V^2}{2}\right),\quad \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\\ &\boldsymbol{\varepsilon}_i=\varepsilon_{i1}\boldsymbol{e}_1+\varepsilon_{i2}\boldsymbol{e}_2+\varepsilon_{i3}\boldsymbol{e}_3,\quad R=0\end{aligned}\right\} \tag{附 -6}$$

曲线坐标(ξ,η,ζ)下的表达形式为

$$\frac{\partial U'}{\partial t}+\frac{\partial F'}{\partial \xi}+\frac{\partial G'}{\partial \eta}+\frac{\partial H'}{\partial \zeta}=R' \tag{附 -7}$$

记

$$\left.\begin{aligned}&U'=JU\\ &\boldsymbol{K}=F\boldsymbol{e}_x+G\boldsymbol{e}_y+H\boldsymbol{e}_z\\ &F=F_U+F_V,\quad G=G_U+G_V,\quad H=H_U+H_V\\ &\boldsymbol{L}_{\eta\zeta}=\boldsymbol{\tau}_\eta\times\boldsymbol{\tau}_\zeta,\quad \boldsymbol{\tau}_\xi=\left(\frac{\partial x}{\partial \xi},\frac{\partial y}{\partial \xi},\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\\ &\boldsymbol{L}_{\zeta\xi}=\boldsymbol{\tau}_\zeta\times\boldsymbol{\tau}_\xi,\quad \boldsymbol{\tau}_\eta=\left(\frac{\partial x}{\partial \eta},\frac{\partial y}{\partial \eta},\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\\ &\boldsymbol{L}_{\xi\eta}=\boldsymbol{\tau}_\xi\times\boldsymbol{\tau}_\eta,\quad \boldsymbol{\tau}_\zeta=\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta},\frac{\partial y}{\partial \zeta},\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)\\ &F'=\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{L}_{\eta\zeta},\quad G'=\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{L}_{\zeta\xi},\quad H'=\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{L}_{\xi\eta}\\ &R'=JR\end{aligned}\right\} \tag{附 -8}$$

非守恒型的 N-S 方程表示为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}+B\frac{\partial U}{\partial y}+C\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial F_V}{\partial x}+\frac{\partial G_V}{\partial y}+\frac{\partial H_V}{\partial z}=R \tag{附-9}$$

$$A=\frac{\partial F_U}{\partial U},\quad B=\frac{\partial G_U}{\partial U},\quad C=\frac{\partial H_U}{\partial U}$$

其中 $U=(U_1,U_2,U_3,U_4,U_5)^T=(\rho,\rho u,\rho v,\rho w,\rho E_s)^T$ （附-10）

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2U_1^2}(U_2^2+U_3^2+U_4^2)-\frac{U_2^2}{U_1^2} & (3-\gamma)\frac{U_2}{U_1} & -(\gamma-1)\frac{U_3}{U_1} & -(\gamma-1)\frac{U_4}{U_1} & \gamma-1 \\ -\frac{U_2U_3}{U_1^2} & \frac{U_3}{U_1} & \frac{U_2}{U_1} & 0 & 0 \\ -\frac{U_2U_4}{U_1^2} & \frac{U_4}{U_1} & 0 & \frac{U_2}{U_1} & 0 \\ -\gamma\frac{U_2U_5}{U_1^2}+(\gamma-1)U_2\frac{U_2^2+U_3^2+U_4^2}{U_1^3} & \frac{1}{U_1}\left[\gamma U_5-\frac{3U_2^2+U_3^2+U_4^2}{2U_1}(\gamma-1)\right] & -\frac{U_2U_3}{U_1^2}(\gamma-1) & -\frac{U_2U_4}{U_1^2}(\gamma-1) & \gamma\frac{U_2}{U_1} \end{bmatrix} \tag{附-11}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{U_3U_2}{U_1^2} & \frac{U_3}{U_1} & \frac{U_2}{U_1} & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2U_1^2}(U_2^2+U_3^2+U_4^2)-\frac{U_3^2}{U_1^2} & -(\gamma-1)\frac{U_3}{U_1} & (3-\gamma)\frac{U_3}{U_1} & -(\gamma-1)\frac{U_4}{U_1} & \gamma-1 \\ -\frac{U_2U_4}{U_1^2} & 0 & \frac{U_4}{U_1} & \frac{U_3}{U_1} & 0 \\ -\gamma\frac{U_3U_5}{U_1^2}+(\gamma-1)U_3\frac{U_2^2+U_3^2+U_4^2}{U_1^3} & -\frac{U_2U_3}{U_1^2}(\gamma-1) & \frac{1}{U_1}\left[\gamma U_5-\frac{3U_3^2+U_2^2+U_4^2}{2U_1}(\gamma-1)\right] & -\frac{U_3U_4}{U_1^2}(\gamma-1) & \gamma\frac{U_3}{U_1} \end{bmatrix} \tag{附-12}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{U_4U_2}{U_1^2} & \dfrac{U_4}{U_1} & 0 & \dfrac{U_2}{U_1} & 0 \\ -\dfrac{U_4U_3}{U_1^2} & 0 & \dfrac{U_4}{U_1} & \dfrac{U_3}{U_1} & 0 \\ \dfrac{\gamma-1}{2U_1^2}(U_2^2+U_3^2+U_4^2)-\dfrac{U_4^2}{U_1^2} & -(\gamma-1)\dfrac{U_2}{U_1} & -(\gamma-1)\dfrac{U_3}{U_1} & -(3-\gamma)\dfrac{U_4}{U_1} & \gamma-1 \\ -\gamma\dfrac{U_4U_5}{U_1^2}+(\gamma-1)U_4\dfrac{U_2^2+U_3^2+U_4^2}{U_1^3} & -\dfrac{U_2U_4}{U_1^2}(\gamma-1) & -\dfrac{U_3U_4}{U_1^2}(\gamma-1) & \dfrac{1}{U_1}\left[\gamma U_5-\dfrac{3U_4^2+U_2^2+U_3^2}{2U_1}(\gamma-1)\right] & \gamma\dfrac{U_4}{U_1} \end{bmatrix} \tag{附-13}$$

不难通过直接验算得到

$$F_U = AU,\quad G_U = BU,\quad H_U = CU \tag{附-14}$$

矩阵 A 的特征方程为

$$|A-\lambda I| = 0$$

展开得

$$(u-\lambda)^3(\lambda^2-2u\lambda+u^2+c^2)=0$$

特征为

$$\lambda = u,\quad u,\quad u,\quad u+c,\quad u-c \tag{附-15}$$

其中

$$C^2=\gamma(\gamma-1)\left(\frac{E_s}{\rho}-\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\right)=\gamma(\gamma-1)\left[\frac{U_5}{U_1}-\frac{U_2^2+U_3^2+U_4^2}{2U_1^2}\right] \tag{附-16}$$

可写 A 式为

$$A=S^{-1}\Lambda_A S$$

类似地

$$\left.\begin{aligned} &A=S^{-1}\Lambda_A S\\ &B=T^{-1}\Lambda_B T\\ &C=Q^{-1}\Lambda_C Q \end{aligned}\right\} \tag{附-17}$$

直接验算可以知道

$$
\left.\begin{aligned}
S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2c^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2c^2} \\ u & \frac{1}{2c}\left(\frac{u}{c}+1\right) & 0 & 0 & \frac{1}{2c}\left(\frac{u}{c}-1\right) \\ v & \frac{v}{2c^2} & \rho & 0 & \frac{v}{2c^2} \\ w & \frac{w}{2c^2} & 0 & \rho & \frac{w}{2c^2} \\ \frac{1}{2}V^2 & \frac{1}{2}\left(\frac{V^2}{2c^2}+\frac{u}{c}+\frac{1}{\gamma-1}\right) & \rho v & \rho w & \frac{1}{2}\left(\frac{V^2}{2c^2}-\frac{u}{c}+\frac{1}{\gamma-1}\right) \end{bmatrix} \\
S &= \begin{bmatrix} 1-\frac{\gamma-1}{2c^2}V^2 & (\gamma-1)\frac{u}{c^2} & (\gamma-1)\frac{v}{c^2} & (\gamma-1)\frac{w}{c^2} & -(\gamma-1)\frac{1}{c^2} \\ -uc+\frac{\gamma-1}{2}V^2 & c-(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & -(\gamma-1)w & \gamma-1 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{w}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ uc+\frac{\gamma-1}{2}V^2 & -c-(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & -(\gamma-1)w & \gamma-1 \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{附-18}
$$

$$
\Lambda_A = \mathrm{diag}(u,\ u+c,\ u,\ u,\ u-c) \tag{附-19}
$$

其中 $V=(u^2+v^2+w^2)^{\frac{1}{2}}$

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2c^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2c^2} \\ u & \frac{u}{2c^2} & \rho & 0 & \frac{u}{2c^2} \\ v & \frac{1}{2c}\left(\frac{v}{c}+1\right) & 0 & 0 & \frac{1}{2c}\left(\frac{v}{c}+1\right) \\ w & \frac{w}{2c^2} & 0 & \rho & \frac{w}{2c^2} \\ \frac{1}{2}V^2 & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}+\frac{v}{c}+\frac{1}{\gamma-1}\right) & \rho u & \rho w & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}+\frac{v}{c}+\frac{1}{\gamma-1}\right) \end{pmatrix}$$

$$T=\begin{pmatrix} 1-\frac{\gamma-1}{2c^2}V^2 & (\gamma-1)\frac{u}{c^2} & (\gamma-1)\frac{v}{c^2} & (\gamma-1)\frac{w}{c^2} & -(\gamma-1)\frac{1}{c^2} \\ -vc+\frac{\gamma-1}{2}V^2 & -(\gamma-1)u & c-(\gamma-1)v & -(\gamma-1)w & \gamma-1 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{w}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ vc+\frac{\gamma-1}{2}V^2 & -(\gamma-1)u & -c-(\gamma-1)v & -(\gamma-1)w & \gamma-1 \end{pmatrix} \quad (附\text{-}20)$$

$$\Lambda_B=\mathrm{diag}(v,v+c,v,v,v-c) \quad (附\text{-}21)$$

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2c^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2c^2} \\ u & \frac{u}{2c^2} & \rho & 0 & \frac{u}{2c^2} \\ v & \frac{v}{2c^2} & 0 & \rho & \frac{v}{2c^2} \\ w & \frac{1}{2c}\left(\frac{w}{c}+1\right) & 0 & 0 & \frac{1}{2c}\left(\frac{w}{c}-1\right) \\ \frac{1}{2}V^2 & \frac{1}{2}\left(\frac{V^2}{2c^2}+\frac{w}{c}+\frac{1}{\gamma-1}\right) & \rho u & \rho v & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}-\frac{w}{c}+\frac{1}{\gamma-1}\right) \end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} 1-\frac{\gamma-1}{2c^2}V^2 & (\gamma-1)\frac{u}{c^2} & (\gamma-1)\frac{v}{c^2} & (\gamma-1)\frac{w}{c^2} & -(\gamma-1)\frac{1}{c^2} \\ -wc+\frac{\gamma-1}{2}V^2 & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & c-(\gamma-1)w & \gamma-1 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ wc+\frac{\gamma-1}{2}V^2 & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & -c-(\gamma-1)w & \gamma-1 \end{bmatrix} \quad (附\text{-}22)$$

$$\Lambda_C=\mathrm{diag}(w,w+c,w,w,w-c) \quad (附\text{-}23)$$

另外方程(附-1)式还可以改写为非守恒型

$$\frac{\partial V}{\partial t}+A_1\frac{\partial V}{\partial x}+B_1\frac{\partial V}{\partial y}+C_1\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial F_V}{\partial x}+\frac{\partial G_V}{\partial y}+\frac{\partial H_V}{\partial z}=R \quad (附\text{-}24)$$

其中

$$V=(\rho,u,v,w,p) \quad (附\text{-}25)$$

在无粘性条件下有

$$\frac{\partial V}{\partial t}+A_1\frac{\partial V}{\partial x}+B_1\frac{\partial V}{\partial y}+C_1\frac{\partial V}{\partial z}=0 \quad (附\text{-}26)$$

设 $\partial U/\partial V=D^{-1}$,则上式左边乘 D^{-1}可得

$$D^{-1}\frac{\partial V}{\partial t}+D^{-1}A_1\frac{\partial V}{\partial x}+D^{-1}B_1\frac{\partial V}{\partial y}+D^{-1}C_1\frac{\partial V}{\partial z}=0 \quad (附\text{-}27)$$

或改写为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+D^{-1}A_1D\frac{\partial U}{\partial x}+D^{-1}B_1D\frac{\partial U}{\partial y}+D^{-1}C_1D\frac{\partial U}{\partial z}=0 \quad (附\text{-}28)$$

由此得

$$\left.\begin{aligned} &A=D^{-1}A_1D, \quad B=D^{-1}B_1D, \quad C=D^{-1}C_1D \\ &A_1=DAD^{-1}, \quad B_1=DBD^{-1}, \quad C_1=DCD^{-1} \end{aligned}\right\} \quad (附\text{-}29)$$

或

直接计算可得

$$A_1 = DAD^{-1} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & \dfrac{\gamma}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad B_1 = DBD^{-1} = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & \dfrac{\gamma}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & v \end{bmatrix}, \quad C_1 = DCD^{-1} = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & \dfrac{\gamma}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & p & w \end{bmatrix} \quad \text{(附-30)}$$

A_1, B_1, C_1 又可以分解为

$$A_1 = S_1^{-1}\Lambda_{A_1}S = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\gamma}{2c^2} & 0 & 0 & \dfrac{\gamma}{2c^2} \\ 0 & \dfrac{\gamma}{2\rho c} & 0 & 0 & -\dfrac{\gamma}{2\rho c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & & & & 0 \\ & u+c & & & \\ & & u & & \\ & & & u & \\ 0 & & & & u-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\gamma}{c^2} \\ 0 & \dfrac{\rho c}{\gamma} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\rho c}{\gamma} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(附-31)}$$

$$B_1 = T_1^{-1}\Lambda_{B_1}T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\gamma}{2c^2} & 0 & \dfrac{\gamma}{2c^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\gamma}{2\rho c} & 0 & \dfrac{\gamma}{2\rho c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & & & & 0 \\ & v+c & & & \\ & & v & & \\ & & & v & \\ 0 & & & & v-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\gamma}{c^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\rho c}{\gamma} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\rho c}{\gamma} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(附-32)}$$

$$C_1 = Q^{-1}\Lambda_{C_1}Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{\gamma}{2c^2} & \dfrac{\gamma}{2c^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\gamma}{2\rho c} & -\dfrac{\gamma}{2\rho c} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & & & & 0 \\ & w+c & & & \\ & & w & & \\ & & & w & \\ 0 & & & & w-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\gamma}{c^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\rho c}{\gamma} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\rho c}{\gamma} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(附-33)}$$

由(附-8)式关于 F', K', H' 的表达式可得

$$\left.\begin{aligned} F' &= FL_{\eta\zeta,x} + GL_{\eta\zeta,y} + HL_{\eta\zeta,z} \\ G' &= FL_{\zeta\xi,x} + GL_{\zeta\xi,y} + HL_{\zeta\xi,z} \\ H' &= FL_{\xi\eta,x} + GL_{\xi\eta,y} + HL_{\xi\eta,z} \end{aligned}\right\} \tag{附-34}$$

引入 $\bar{\bar{A}} = AL_{\eta\zeta,x} + BL_{\eta\zeta,y} + CL_{\eta\zeta,z} = D^{-1}(A_1L_{\eta\zeta,x} + B_1L_{\eta\zeta,y} + C_1L_{\eta\zeta,z})D$

$$= \begin{pmatrix} u' & \rho L_{\eta\zeta,x} & \rho L_{\eta\zeta,y} & \rho L_{\eta\zeta,z} & 0 \\ 0 & u' & 0 & 0 & \dfrac{\gamma}{\rho}L_{\eta\zeta,x} \\ 0 & 0 & u' & 0 & \dfrac{\gamma}{\rho}L_{\eta\zeta,y} \\ 0 & 0 & 0 & u' & \dfrac{\gamma}{\rho}L_{\eta\zeta,z} \\ 0 & \rho L_{\eta\zeta,x} & \rho L_{\eta\zeta,y} & \rho L_{\eta\zeta,z} & u' \end{pmatrix} D \tag{附-35}$$

$$u' = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{L}_{\eta\zeta} = uL_{\eta\zeta,x} + vL_{\eta\zeta,y} + wL_{\eta\zeta,z}$$

$$u' = L_{\eta\zeta}u_1 \quad \text{其中} \quad L_{\eta\zeta} = |\boldsymbol{L}_{\eta\zeta}|$$

则

$$\bar{\bar{A}} = L_{\eta\zeta}D^{-1} \begin{pmatrix} u_1 & \rho l_{\eta\zeta,x} & \rho l_{\eta\zeta,y} & \rho l_{\eta\zeta,z} & 0 \\ & u_1 & & & \dfrac{\gamma}{\rho}l_{\eta\zeta,x} \\ & & u_1 & & \dfrac{\gamma}{\rho}l_{\eta\zeta,y} \\ & & & u_1 & \dfrac{\gamma}{\rho}l_{\eta\zeta,z} \\ & \rho l_{\eta\zeta,x} & \rho l_{\eta\zeta,y} & \rho l_{\eta\zeta,z} & u_1 \end{pmatrix} D \tag{附-36}$$

$$l_{\eta\zeta,i} = \frac{L_{\eta\zeta,i}}{L_{\eta\zeta}} \qquad (i = x, y, z) \tag{附-37}$$

直接计算可以验证

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & l_{\eta\zeta,x} & l_{\eta\zeta,y} & l_{\eta\zeta,z} & \\ & t_{\eta\zeta,x} & t_{\eta\zeta,y} & t_{\eta\zeta,z} & \\ & n_{\eta\zeta,x} & n_{\eta\zeta,y} & n_{\eta\zeta,z} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & \rho l_{\eta\zeta,x} & \rho l_{\eta\zeta,y} & \rho l_{\eta\zeta,z} & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & 0 & \dfrac{\gamma}{\rho}l_{\eta\zeta,x} \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & \dfrac{\gamma}{\rho}l_{\eta\zeta,y} \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & \dfrac{\gamma}{\rho}l_{\eta\zeta,z} \\ 0 & \rho l_{\eta\zeta,x} & \rho l_{\eta\zeta,y} & \rho l_{\eta\zeta,z} & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & l_{\eta\zeta,x} & t_{\eta\zeta,x} & n_{\eta\zeta,x} & \\ & l_{\eta\zeta,y} & t_{\eta\zeta,y} & n_{\eta\zeta,y} & \\ & l_{\eta\zeta,z} & t_{\eta\zeta,z} & n_{\eta\zeta,z} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} u_1 & \rho & & & 0 \\ & u_1 & & & \dfrac{\gamma}{\rho} \\ & & u_1 & & \\ & & & u_1 & \\ & p & & & u_1 \end{bmatrix} \tag{附-38}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
t_{\xi,x} &= \frac{-l_{\xi,y}\cos\theta - l_{\xi,z}l_{\xi,x}\sin\theta}{\sqrt{l_{\xi,x}^2 + l_{\xi,y}^2}} \\
t_{\xi,y} &= \frac{l_{\xi,x}\cos\theta - l_{\xi,y}l_{\xi,z}\sin\theta}{\sqrt{l_{\xi,x}^2 + l_{\xi,y}^2}} \\
t_{\xi,z} &= \sin\theta\sqrt{l_{\xi,x}^2 + l_{\xi,y}^2} \\
n_{\xi,x} &= \frac{l_{\xi,y}\sin\theta - l_{\xi,z}l_{\xi,x}\cos\theta}{\sqrt{l_{\xi,x}^2 + l_{\xi,y}^2}} \\
n_{\xi,y} &= \frac{-l_{\xi,x}\sin\theta - l_{\xi,z}l_{\xi,y}\cos\theta}{\sqrt{l_{\xi,x}^2 + l_{\xi,y}^2}} \\
n_{\xi,z} &= \cos\theta\sqrt{l_{\xi,x}^2 + l_{\xi,y}^2}
\end{aligned}\right\} \tag{附-39}
$$

不难看出,$\boldsymbol{l}$,$\boldsymbol{t}$,$\boldsymbol{n}$ 都是单位向量,而且互相正交,θ 值是任意的,当 $l_{\xi,z}\to 1$ 时,取

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{l_{\xi,x}}{\sqrt{l_{\xi,x}^2 + l_{\xi,y}^2}} &\to \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\frac{l_{\xi,y}}{\sqrt{l_{\xi,x}^2 + l_{\xi,y}^2}} &\to \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}\right\} \tag{附-40}
$$

则(附-38)式可以改写为

$$
R_{\xi}(A_1 L_{\xi,x} + B_1 L_{\xi,y} + C_1 L_{\xi,z})R_{\xi}^{-1} = \overline{A} \tag{附-41}
$$

而 $\overline{A}$ 可分解为

$$
\overline{A} = S_1^{-1}\Lambda_{\overline{A}}S_1 \qquad \Lambda_{\overline{A}} = \mathrm{diag}(u, u+c, u, u, u-c) \tag{附-42}
$$

由此有

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{A} &= L_{\xi}D^{-1}R_{\xi}^{-1}S_1^{-1}\Lambda_{\overline{A}}S_1R_{\xi}D \\
\Lambda_{\overline{A}} &= \mathrm{diag}(u_1, u_1+c, u_1, u_1, u_1-c)
\end{aligned}\right\} \tag{附-43}
$$

类似地有

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{B} &= L_{\zeta}D^{-1}R_{\zeta}^{-1}T_1^{-1}\Lambda_{\overline{B}}T_1R_{\zeta}D \\
\Lambda_{\overline{B}} &= \mathrm{diag}(v_1, v_1+c, v_1, v_1, v_1-c)
\end{aligned}\right\} \tag{附-44}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{C} &= L_{\eta}D^{-1}R_{\eta}^{-1}Q_1^{-1}\Lambda_{\overline{C}}Q_1R_{\eta}D \\
\Lambda_{\overline{C}} &= \mathrm{diag}(w_1, w_1+c, w_1, w_1, w_1-c)
\end{aligned}\right\} \tag{附-45}
$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{A} = AL_{\eta\zeta,x} + BL_{\eta\zeta,y} + CL_{\eta\zeta,z}\\
&\overline{A} = R_{\eta\zeta}(A_1L_{\eta\zeta,x} + B_1L_{\eta\zeta,y} + C_1L_{\eta\zeta,z})R_{\eta\zeta}^{-1} = S_1^{-1}\Lambda_AS_1\\
&\overline{B} = AL_{\zeta\xi,x} + BL_{\zeta\xi,y} + CL_{\zeta\xi,z}\\
&\overline{B} = R_{\zeta\xi}(A_1L_{\zeta\xi,x} + B_1L_{\zeta\xi,y} + C_1L_{\zeta\xi,z})R_{\zeta\xi}^{-1} = T_1^{-1}\Lambda_BT_1\\
&\overline{C} = AL_{\xi\eta,x} + BL_{\xi\eta,y} + CL_{\xi\eta,z}\\
&\overline{C} = R_{\xi\eta}(A_1L_{\xi\eta,x} + B_1L_{\xi\eta,y} + C_1L_{\xi\eta,z})R_{\xi\eta}^{-1} = Q_1^{-1}\Lambda_CQ_1
\end{aligned}\right\} \quad \text{(附 -46)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&R_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & l_{ij,x} & l_{ij,y} & l_{ij,z} \\ & t_{ij,x} & t_{ij,y} & t_{ij,z} \\ & n_{ij,x} & n_{ij,y} & n_{ij,z} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (i,j=\xi,\eta,\zeta)\\
&R_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & l_{ij,x} & t_{ij,x} & n_{ij,x} \\ & l_{ij,y} & t_{ij,y} & n_{ij,y} \\ & l_{ij,z} & t_{ij,z} & n_{ij,z} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (i,j=\xi,\eta,\zeta)\\
&u_1 = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{L}_{\eta\zeta},\ v_1 = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{L}_{\zeta\xi},\quad w_1 = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{L}_{\xi\eta}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(附 -47)}$$

t_{ij},n_{ij}表达式可由(附-39)式中ζ,η轮换得到。根据以上推导,(附-9)式可改写为

$$J\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(F'_U + F'_V)}{\partial\xi} + \frac{\partial(G'_U + G'_V)}{\partial\eta} + \frac{\partial(H'_U + H'_V)}{\partial\zeta} = R' \quad \text{(附 -48)}$$

$$\left.\begin{aligned}
F'_U &= F_UL_{\eta\zeta,x} + G_UL_{\eta\zeta,y} + H_UL_{\eta\zeta,z}\\
F'_V &= F_VL_{\eta\zeta,x} + G_VL_{\eta\zeta,y} + H_VL_{\eta\zeta,z}\\
G'_U &= F_UL_{\zeta\xi,x} + G_UL_{\zeta\xi,y} + H_UL_{\zeta\xi,z}\\
G'_V &= F_VL_{\zeta\xi,x} + G_VL_{\zeta\xi,y} + H_VL_{\zeta\xi,z}\\
H'_U &= F_UL_{\xi\eta,x} + G_UL_{\xi\eta,y} + H_UL_{\xi\eta,z}\\
H'_V &= F_VL_{\xi\eta,x} + G_VL_{\xi\eta,y} + H_VL_{\xi\eta,z}
\end{aligned}\right\} \quad \text{(附 -49)}$$

由 A、B、C 的定义、(附-47)和(附-37)式可改写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \overline{A}\frac{\partial U}{\partial\xi} + \overline{B}\frac{\partial U}{\partial\eta} + \overline{C}\frac{\partial U}{\partial\zeta} + \frac{\partial F'_V}{\partial\xi} + \frac{G'_V}{\partial\eta} + \frac{\partial H'_V}{\partial\zeta} = R' \quad \text{(附 -50)}$$

上式又可写成

$$JD^{-1}\frac{\partial V}{\partial t} + \overline{A}D^{-1}\frac{\partial V}{\partial\xi} + \overline{B}D^{-1}\frac{\partial V}{\partial\eta} + \overline{C}D^{-1}\frac{\partial V}{\partial\zeta} + \frac{\partial F'_V}{\partial\xi} + \frac{\partial G'_V}{\partial\eta} + \frac{\partial H'_V}{\partial\zeta} = R'$$

或

$$JD^{-1}\frac{\partial V}{\partial t}+L_{\eta\xi}D^{-1}R_{\eta\xi}^{-1}S_1^{-1}\Lambda_A S_1 R_{\eta\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}+L_{\zeta\xi}D^{-1}R_{\zeta\xi}^{-1}T_1^{-1}\Lambda_B T_1 R_{\zeta\xi}\frac{\partial V}{\partial \eta}$$

$$+L_{\xi\eta}D^{-1}R_{\xi\eta}^{-1}Q_1^{-1}\Lambda_C Q_1 R_{\xi\eta}\frac{\partial V}{\partial \zeta}+\frac{\partial F'_V}{\partial \xi}+\frac{\partial G'_V}{\partial \eta}+\frac{\partial H'_V}{\partial \zeta}=R'$$

二边均乘 D,则得

$$J\frac{\partial V}{\partial t}+L_{\eta\xi}R_{\eta\xi}^{-1}S_1^{-1}\Lambda_A S_1 R_{\eta\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}+L_{\zeta\xi}R_{\zeta\xi}^{-1}T_1^{-1}\Lambda_B T_1 R_{\zeta\xi}\frac{\partial V}{\partial \eta}$$

$$+L_{\xi\eta}R_{\xi\eta}^{-1}Q_1^{-1}\Lambda_C Q_1 R_{\xi\eta}\frac{\partial V}{\partial \zeta}+D\left(\frac{\partial F'_V}{\partial \xi}+\frac{\partial G'_V}{\partial \eta}+\frac{\partial H'_V}{\partial \zeta}\right)=DR' \qquad \text{(附 -51)}$$

以上就是非守恒型曲线坐标下的方程,该式的系数矩阵已经分解好了,所以便于计算。

下面对 F'_V, G'_V, H'_V 作一些简化。

$$F_V=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-\frac{4}{3}\mu&0&0&0\\0&0&-\mu&0&0\\0&0&0&-\mu&0\\\frac{kT}{\rho}&-\frac{8}{3}\mu u&-\mu v&-\mu w&-\frac{k}{R\rho}\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\rho\\u\\v\\w\\p\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&\frac{2}{3}\mu&0&0\\0&-\mu&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-\mu v&-\frac{2}{3}\mu u&0&0\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix}\rho\\u\\v\\w\\p\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&\frac{2}{3}\mu&0\\0&0&0&0&0\\0&-\mu&0&0&0\\0&-\mu w&0&-\frac{2}{3}\mu&0\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix}\rho\\u\\v\\w\\p\end{bmatrix}$$

$$=M_{F_x}\frac{\partial V}{\partial x}+M_{F_y}\frac{\partial V}{\partial y}+M_{F_z}\frac{\partial V}{\partial z} \qquad \text{(附 -52)}$$

$$G_V=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&-\mu&0&0\\0&\frac{2}{3}\mu&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-\frac{2}{3}\mu&-\mu u&0&0\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}\rho\\u\\v\\w\\p\end{bmatrix}$$

$$
+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3}\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ \frac{kT}{\rho} & -\mu u & -\frac{8}{3}\mu v & -\mu w & -\frac{k}{R\rho} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu w & -\frac{2}{3}\mu v & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix}
$$

$$
= M_{G_x} \frac{\partial V}{\partial x} + M_{G_y} \frac{\partial V}{\partial y} + M_{G_z} \frac{\partial V}{\partial z} \qquad (附-53)
$$

$$
H_V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}\mu w & 0 & -\mu u & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\mu w & -\mu v & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3}\mu & 0 \\ \frac{kT}{\rho} & -\mu u & \mu v & -\frac{8}{3}\mu w & -\frac{k}{R\rho} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix}
$$

$$
= M_{H_x} \frac{\partial V}{\partial x} + M_{H_y} \frac{\partial V}{\partial y} + M_{H_z} \frac{\partial V}{\partial z} \qquad (附-54)
$$

$$
F'_V = F_V L_{\xi,x} + G_V L_{\xi,y} + H_V L_{\xi,z}
$$

$$=(M_{F_x}L_{\eta\zeta,x}+M_{G_x}L_{\eta\zeta,y}+M_{H_x}L_{\eta\zeta,z})\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$+(M_{F_y}L_{\eta\zeta,x}+M_{G_y}L_{\eta\zeta,y}+M_{H_y}L_{\eta\zeta,z})\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$+(M_{F_z}L_{\eta\zeta,x}+M_{G_z}L_{\eta\zeta,y}+M_{H_z}L_{\eta\zeta,z})\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$=\Big[(M_{F_x}L_{\eta\zeta,x}+M_{G_x}L_{\eta\zeta,y}+M_{H_x}L_{\eta\zeta,z})\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$-(M_{F_y}L_{\eta\zeta,x}+M_{G_y}L_{\eta\zeta,y}+M_{H_y}L_{\eta\zeta,z})\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$+(M_{F_z}L_{\eta\zeta,x}+M_{G_z}L_{\eta\zeta,y}+M_{H_z}L_{\eta\zeta,z})\frac{\partial \xi}{\partial z}\Big]\frac{\partial V}{\partial \xi}$$

$$+\Big[(M_{F_x}L_{\eta\zeta,x}+M_{G_x}L_{\eta\zeta,y}+M_{H_x}L_{\eta\zeta,z})\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$+(M_{F_y}L_{\eta\zeta,x}+M_{G_y}L_{\eta\zeta,y}+M_{H_y}L_{\eta\zeta,z})\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$+(M_{F_z}L_{\eta\zeta,x}+M_{G_z}L_{\eta\zeta,y}+M_{H_z}L_{\eta\zeta,z})\frac{\partial \eta}{\partial z}\Big]\frac{\partial V}{\partial \eta}$$

$$+\Big[(M_{F_x}L_{\eta\zeta,x}+M_{G_x}L_{\eta\zeta,y}+M_{H_x}L_{\eta\zeta,z})\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$+(M_{F_y}L_{\eta\zeta,x}+M_{G_y}L_{\eta\zeta,y}+M_{H_y}L_{\eta\zeta,z})\frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$+(M_{F_z}L_{\eta\zeta,x}+M_{G_z}L_{\eta\zeta,y}+M_{H_z}L_{\eta\zeta,z})\frac{\partial \zeta}{\partial z}\Big]\frac{\partial V}{\partial \zeta}$$

$$=M_{F_V\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}-M_{F_V\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}+M_{F_V\zeta}\frac{\partial V}{\partial \zeta}$$

即

类似地

$$\left.\begin{aligned}F'_V&=M_{F_V\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}+M_{F_V\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}+M_{F_V\zeta}\frac{\partial V}{\partial \zeta}\\G'_V&=M_{G_V\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}+M_{G_V\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}+M_{G_V\zeta}\frac{\partial V}{\partial \zeta}\\H'_V&=M_{H_V\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}+M_{H_V\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}+M_{H_V\zeta}\frac{\partial V}{\partial \zeta}\end{aligned}\right\}\qquad(附\text{-}55)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}M_{F_V\xi_l}&=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}M_{F_jx_i}L_{\eta\zeta,x_j}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_i}\\M_{G_V\xi_l}&=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}M_{F_jx_i}L_{\eta\zeta,x_j}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_i}\\M_{H_V\xi_l}&-\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}M_{F_jx_i}L_{\eta\zeta,x_j}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_i}\end{aligned}\right\}\quad(l=1.2.3)\qquad(附\text{-}56)$$

其中记号为

$$\left.\begin{aligned} &F_1=F, \quad F_2=G, \quad F_3=H \\ &\xi_1=\xi, \quad \xi_2=\eta, \quad \xi_3=\zeta \\ &x_1=x, \quad x_2=y, \quad x_3=z \end{aligned}\right\} \tag{附-57}$$

最后得

$$\begin{aligned} &J\frac{\partial V}{\partial t}+L_{\eta\zeta}R_{\eta\zeta}^{-1}S_1^{-1}\Lambda_A S_1 R_{\eta\zeta}\frac{\partial V}{\partial \xi}+L_{\zeta\xi}R_{\zeta\xi}^{-1}T_1^{-1}\Lambda_B T_1 R_{\zeta\xi}\frac{\partial V}{\partial \eta} \\ &+L_{\xi\eta}R_{\xi\eta}^{-1}Q_1^{-1}\Lambda_C Q_1 R_{\xi\eta}\frac{\partial V}{\partial \zeta}+D\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(M_{F_V\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}+M_{F_V\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}+M_{F_V\zeta}\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right)\right. \\ &\left.+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(M_{G_V\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}+M_{G_V\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}+M_{G_V\zeta}\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(M_{H_V\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}+M_{H_V\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}+M_{H_V\zeta}\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right)\right]=DR' \end{aligned} \tag{附-58}$$

以上就是非守恒型方程在曲线坐标下的最后形式。

这里给出的是三维的情况，对于二维情况可简化为

$$\frac{\partial U'}{\partial t}+\frac{\partial F'}{\partial \xi}+\frac{\partial G'}{\partial \eta}=R' \tag{附-59}$$

$$\begin{aligned} &J\frac{\partial V}{\partial t}+L_{\eta}R_{\eta}^{-1}S_1^{-1}\Lambda_A S_1 R_{\eta}\frac{\partial V}{\partial \xi}+L_{\xi}R_{\xi}^{-1}T_1^{-1}\Lambda_B T_1 R_{\xi}\frac{\partial V}{\partial \eta} \\ &+D\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(M_{F_V\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}+M_{F_V\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(M_{G_V\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}+M_{G_V\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)\right]=DR' \end{aligned} \tag{附-60}$$

请读者自行写出其中各个符号的意义及具体表达式。

第4章　工程中流场的数值计算

工程中常存在许多流体力学问题，其流场往往非常复杂，千变万化，绝大多数流动都是湍流，因此它们的数值计算是非常困难的。由于计算机软硬件的迅速发展以及工业发展的需要，人们对于工程中的流场问题越来越重视，计算流体动力学在工程中的应用也日益广泛，它具有经济、省时及重复性好的特点，受到人们的青睐。目前已开始形成工业计算空气动力学这样一门重要的分支。本文限于篇幅，只介绍其中一部分例子。在下一章中还将介绍与热交换有关的流动问题，即自然对流和强迫对流的问题。

4.1　水击问题及其数值计算

在日常生活中，关闭水龙头时由于振动水管会发出强烈颤抖的声音。这是由于管道中水流突然受阻，冲击管道引起强烈振动所致。这种现象就称作水击，工程中管道比比皆是，如核反应堆中在发生意外事故或设备故障时紧急启动或关闭阀门常常会引起水击。水击的冲击力很强，有时会引起管道破裂，进而造成重大事故。所以对水击的分析及其数值计算在化工设备，核反应堆等的安全分析中有重要意义。

在 A 篇中已讨论过水击的数学模型，其形式为

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}h\\ V\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}V & c^2/g\\ g & V\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}h\\ V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\dfrac{fV|V|}{2D}\end{pmatrix} \tag{C.4.1.1}$$

它的特征方程为：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=V\pm c \tag{C.4.1.2}$$

特征相容关系或相容性方程为：

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\pm\frac{c}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\pm\frac{cfV|V|}{2gD}=0 \tag{C.4.1.3}$$

由于在工程上管道中液体的经济流速为 2～3m/s，而液体中的波速 c 约为 1000m/s，为此可认为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\pm c \tag{C.4.1.4}$$

用其代替原特征方程 (C.4.1.2) 式，其所引起的误差并不比插值计算引起的误差大。因此对波速不变的问题就可以采用等距的矩形网格，且矩形的对角线就是特征线，如图 C.4.1 所示。AP 线对应于 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=c$，$BP$ 线对应于 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-c$。由于特征线和网格的节点相交，没有必要进行插值计算。

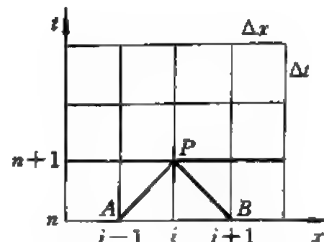


图　C.4.1

沿着两条特征线 AP 和 BP，可分别积分在其上成立的相容性方程。如果积分时对摩擦项采用一级近似，即令

$$\int_{x_A}^{x_P}\frac{fV|V|}{2gD}\mathrm{d}x=\frac{f\Delta xV_A|V_A|}{2gD}$$

则有
$$h_i^{n+1}=h_{i-1}^n-\frac{c}{g}(V_i^{n+1}-V_{i-1}^n)-\frac{f\Delta x}{2gD}V_{i-1}^n|V_{i-1}^n| \tag{C.4.1.5}$$

$$h_i^{n+1}=h_{i+1}^n+\frac{c}{g}(V_i^{n+1}-V_{i+1}^n)+\frac{f\Delta x}{2gD}V_{i+1}^n|V_{i+1}^n| \tag{C.4.1.6}$$

式中的沿程损失系数 f 按定常流动的公式求取。把定常流动的结果直接用于非定常流从理论上讲显然是不合理的，但迄今为止非定常流动中沿程损失系数 f 的求取尚未有令人满意的方法，所以不得不利用定常流动中的公式，好在误差不太大，可以满足工程上的要求。

若令

$$c_P=h_{i-1}^n+\frac{c}{g}V_{i-1}^n-\frac{f\Delta x}{2gD}V_{i-1}^n|V_{i-1}^n| \tag{C.4.1.7}$$

$$c_M=h_{i+1}^n-\frac{c}{g}V_{i+1}^n+\frac{f\Delta x}{2gD}V_{i+1}^n|V_{i+1}^n| \tag{C.4.1.8}$$

则（C.4.1.5）和 C.4.1.6）两式可简写成

$$h_i^{n+1}=c_P-\frac{c}{g}V_i^{n+1} \tag{C.4.1.9}$$

$$h_i^{n+1}=c_M+\frac{c}{g}V_i^{n+1} \tag{C.4.1.10}$$

由此可得

$$h_i^{n+1}=\frac{c_P+c_M}{2} \tag{C.4.1.11}$$

$$V_i^{n+1}=\frac{c_P-c_M}{2}\frac{g}{c} \tag{C.4.1.12}$$

显然这是一种显式算法，因为 c_P 及 c_M 均是前一时刻的已知值。这种方法适用于在微机上进行计算。

对于气体流动问题，气体流速一般较大，而波速比在液体中小，此时流速 V 不再远小于 c。用 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=\pm c$ 代替 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=V\pm c$ 就会带来较大误差，采用含有插值的计算格式是不可避免的。

为了完成计算还需给出适当的边界条件。与其它差分格式相比，特征线法在处理边界条件时要方便且精确。

边界条件所需数量，与边界上的流动情况很有关系。在 A 篇中我们曾根据特征走向来判断边界上需要多少个边界条件，在此讨论这个问题就比较容易。

首先讨论左边界。参看图 C.4.2，在边界上发出的特征线有 3 种可能性：

当 $V>c>0$ 时，两条特征线的斜率 $V+c$ 和 $V-c$ 都是正的，所以它们的走向都是由域外向域内的，因此在这种边界上要给出两个边界条件。

当 $c>V>-c$ 时，两条特征线的斜率 $V+c>0$，$V-c<0$，它们的走向一条由域外走向域内，另一条由域内走向域外，因此在这种边界上只要给出一个边界条件。

当 $V<-c<0$ 时，两条特征线的斜率 $V+c$ 和 $V-c$ 都是负的，所以它们的走向都是由域

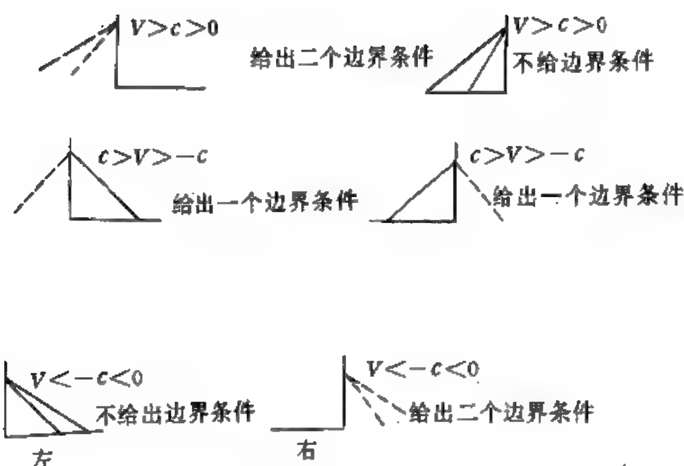


图 C.4.2

内向域外，因此在这种边界上不必给出边界条件。

对于右边界正好相反。当 $V>c>0$ 时，不用给出边界条件，$c>V>-c$ 时需要给出一个边界条件，而 $V<-c<0$ 时则需给出两个边界条件。

下面我们讨论几种工程上常遇到的"边界"。

(1) 位于上游的水库

对于容量很大的水库，当管道流量不是很大时，可以认为水库水位是不变的，即有

$$h_R = \text{常数} \tag{C.4.1.13}$$

这种情况对于大容量的输液箱也是合适的。对于随时间作周期变化的水位则有

$$h_R = h_0 + \Delta h \sin\omega t \tag{C.4.1.14}$$

以上两个条件中的任一个与(C.4.1.10)式联立就可求得管道上游端流量随时间的变化，若采用条件 (C.4.1.13)，则有

$$h_R = h_1^{n+1} = c_M + \frac{c}{g} V_1^{n+1}$$

$$V_1^{n+1} = (h_R - c_M)\frac{g}{c} \tag{C.4.1.15}$$

(2) 上游为特性曲线已知的离心泵

等速运行的离心泵，其特性曲线可以用二次曲线来近似，即

$$h = h_s + a_1 Q + a_2 Q^2 \tag{C.4.1.16}$$

其中 h_s 为断流水头，a_1，a_2 是表征特性曲线的两个常数，上式和 (C.4.1.10) 式联立可求得

$$V_1^{n+1} = \frac{1}{2a_2 A}\left[B - a_1 - \sqrt{(B-a_1)^2 + 4a_2(c_M - h_s)}\right] \tag{C.4.1.17}$$

其中 A 为管道截面积，$B=c/gA$。

(3) 管子下游为一阀门

假定在定常流动时，流体通过阀门时的压头损失为 Δh_0，则在定常流时，通过阀门的流量 Q_0 可用孔口方程表示

$$Q_0 = (c_a A_G)_0 \sqrt{2g\Delta h_0} \tag{C.4.1.18}$$

式中 c_a 为流量系数，A_G 为阀门开启面积，下标"0"表示初始定常流动时的数值。对于其它

任意开度，可写成

$$Q = c_a A_g \sqrt{2g\Delta h} \tag{C.4.1.19}$$

若定义无量纲相对开度 τ 为

$$\tau = \frac{c_a A_g}{(c_a A_g)_0} \tag{C.4.1.20}$$

那么任意开度时通过阀门的流量为

$$Q = \frac{Q_0}{\sqrt{\Delta h_0}} \tau \sqrt{\Delta h} \tag{C.4.1.21}$$

上式也是根据定常流动得来的，但在工程上仍可将其用于不定常流动，只要知道 τ 随时间的关系 $\tau = \tau(t)$ 就行了。请注意式中的 τ 是可以大于 1 的。阀门完全关闭时 $\tau = 0$。边界条件（C.4.1.21）式和（C.4.1.9）式联立就可求得任一时刻通过阀门的流量为

$$Q_{NS}^{n+1} = -Bc_V + \sqrt{(Bc_V)^2 + 2c_V c_P} \tag{C.4.1.22}$$

其中　$B = c/gA$，$c_V = Q_0^2 \tau^2 / 2\Delta h_0$

对于固定的孔口　$\tau = 1$。

（4）不同性质管道的串联连接

图 C.4.3 表示两根几何及物理性质不同的管道串联一起。连接处 K 应看作是计算的内边界点，在进行水击计算时，局部损失往往可以忽略不计，这时应有



图　C.4.3

$$\left.\begin{aligned} h_{K_1} &= h_{K_2} = h_K \\ Q_{K_1} &= Q_{K_2} = Q_K \end{aligned}\right\} \tag{C.4.1.23}$$

但结点两边的波速是不一样的，故上式和（C.4.1.10）及（C.4.1.9）两式联立时特别要注意。解的结果为

$$Q_K = \frac{c_{p1} - c_{M2}}{B_1 + B_2} \tag{C.4.1.24}$$

其中，$B_1 = c_1/gA_1$，$B_2 = c_2/gA_2$，求得 Q_K 后可以从（C.4.1.10）或（C.4.1.9）式中求得 h_K。

（5）管道的分叉连接

对于图 C.4.4 所示的分叉管道，要使用连续方程，即

$$Q_{K_1} + Q_{K_2} = Q_{K_3} + Q_{K_4} \tag{C.4.1.25}$$

而局部损失通常可以忽略不计，于是就有

$$h_{K_1} = h_{K_2} = h_{K_3} = h_{K_4} = h_K \tag{C.4.1.26}$$

每根管道均要用相容性方程，对于流体是流入结点的管道用方程（C.4.1.9）式，对于流体流出结点的管道用方程（C.4.1.10）式。因此有

$$h_K = \frac{c_{p1}/B_1 + c_{p2}/B_2 + c_{M3}/B_3 + c_{M4}/B_4}{\sum(1/B_i)} \tag{C.4.1.27}$$

至于流量则可以从相应的相容性方程中求得。

（6）空气蓄压器

空气蓄压器是管路系统中防止水击破坏，减少流体脉动的常用设备，图 C.4.5 所示的是一种简单的空气蓄压器。

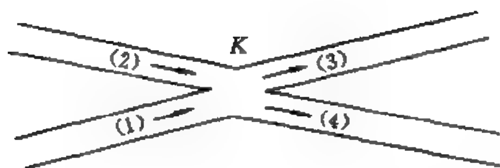


图 C.4.4

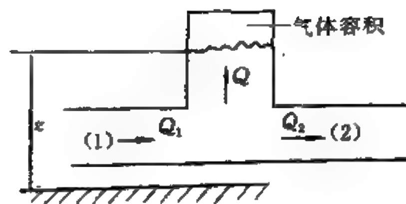


图 C.4.5

可以假设在任何瞬间，容器中各处的压力都相同，容器中液体的压缩性略去不计，容器中的气体服从可逆的多变关系

$$h_a V^K = C_1 \tag{C.4.1.28}$$

式中 K 为多变指数，V 为流体体积，h_a 为气体的绝对压头。若令 h_b 为大气压头，z 为标高，则气体的表压头与 h_a 的关系为

$$h_a = h + h_b - z$$

因为方程（C.4.1.28）对任何瞬间都适用，故在时步的终点，有

$$(h_J^{n+1} + h_b - z)\left(V^n - \Delta t\frac{Q_J^{n+1} + Q_J^n}{2}\right)^K = C_1 \tag{C.4.1.29}$$

（这里上标 $n+1$ 和 n 表示时间为 $(n+1)\Delta t$ 和 $n\Delta t$ 时的值，并不表示指数，而指数则是 K）。方程（C.4.1.29）和两个相容性方程

$$h_J^{n+1} = c_{P1} - B_1 Q_J^{n+1}$$
$$h_J^{n+1} = c_{M2} + B_2 Q_J^{n+1}$$

以及连续性方程　$Q_J^{n+1} = Q_{1J}^{n+1} - Q_{2J}^{n+1}$

联立就可求得 h_J^{n+1} 和 Q_J^{n+1}。式中 $B_1 = c_1/gA_1$，$B_2 = c/gA_2$。

（7）水冷凝器

冷凝器由若干小管及水管两头的水箱组成，如图 C.4.6 所示。相同的多根平行管可以用一根当量水管来代替，当量管的截面应等于各管截面之和，而摩擦系数应和小管的摩擦系数一样。水箱可以用集中流容来模拟，即把水箱中的压头 h_2 表示为

$$h_2^{n+1} = h_2^n + \frac{K'\Delta t}{2\forall\rho g}(Q_2^n + Q_2^{n+1}) \tag{C.4.1.30}$$

式中 K' 称为有效体积的弹性模数，它表示了流体和容器的弹性影响。若 V 为容器的体积，则 K' 与容器中压力变化有如下关系

$$K' = \frac{\Delta P}{\Delta V/V} \tag{C.4.1.31}$$

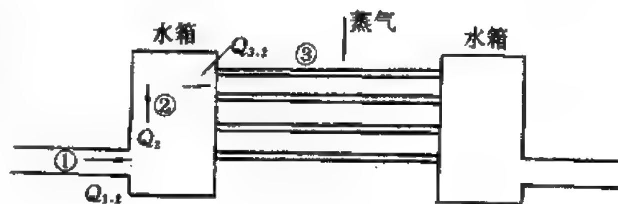


图 C.4.6

管（1）中相容性方程为

$$h_2^{n+1} = c_{p1} - B_1 Q_{1,2}^{n+1}$$

当量管中的相容性方程为

$$h_2^{n+1} = c_{M3} + B_3 Q_{3,2}^{n+1}$$

连续性方程为　$Q_2^{n+1} = Q_{1,2}^{n+1} - Q_{3,2}^{n+1}$

上述 3 个方程和（C.4.1.30）式联立即可求出 h_2^{n+1}，Q_2^{n+1}，$Q_{1,2}^{n+1}$ 及 $Q_{3,2}^{n+1}$ 等 4 个值。

（8）离心泵起动

在离心泵起动过程中，泵的特性曲线与当时的转速有关，若令 $\alpha=N/N_R$，即 α 为泵的当时转速与额定转速之比，那么特性曲线可表示为

$$h=\alpha^2 h_s+\alpha a_1 Q+a_2 Q^2 \tag{C.4.1.32}$$

通常泵起动过程中假定转速由零线性升高到 N_R，即 α 由 0 升高到 1，上升需要的时间 T_s 一般说小于从按下按钮到泵达到全速 N_R 所需的时间，可近似地假定 $T_s \doteq \frac{2}{3}T$，这样就有

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=T/T_s, \quad T\leqslant T_s\\&\alpha=1 \quad\quad\;\; T>T_s\end{aligned}\right\} \tag{C.4.1.33}$$

如果离心泵作为增压泵用在图 C.4.7 所示的管线中则有

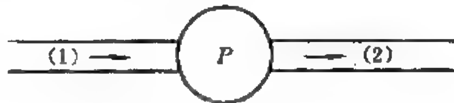


图 C.4.7

$$\left.\begin{aligned}h_{P,2}^{n+1}-h_{P,1}^{n+1}&=\alpha^2 h_s+\alpha a_1 Q_P^{n+1}+a_2 Q_P^{n+1}\\h_{P,1}^{n+1}&=c_{P1}-B_1 Q_{P,1}^{n+1}\\h_{P,2}^{n+1}&=c_{M2}+B_2 Q_{P,2}^{n+1}\\Q_{P,2}^{n+1}&=Q_{P,1}^{n+1}\end{aligned}\right\} \tag{C.4.1.34}$$

联立求解上述 4 个方程可解得流量为

$$Q_{P,2}^{n+1}=Q_{P,1}^{n+1}=\frac{B_1+B_2-a_1\alpha}{2a_2}\left\{1-\left[1-\frac{4a_2(\alpha^2 h_s+c_{P1}-c_{M2})}{(B_1+B_2-a_1\alpha)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{C.4.1.35}$$

求得流量之后可以从相应的相容性方程中求出压头 $h_{P,2}^{n+1}$和 $h_{P,1}^{n+1}$。

以上介绍了工程问题中经常遇到的几种边界条件。但实际问题要复杂得多，在此不能逐一介绍。下面介绍两个算例。

例 1　在图 C.4.8 中，上游为水位不变的水库，$h_R=150$ m，管径为 $D=0.5$ m，管长为 $L=600$ m，波速为 $a=1200$ m/s。下游为一阀门，阀门按以下规律逐步关闭：$\tau=(1-t/2.1)^{1.5}$，阀门的 $(C_dA_G)_0=0.009$，摩擦系数 f 取 0.018，且近似看作常数。

计算时把管道分成 5 段，即步长 $x=120$ m，时步长 $\Delta t=0.1$ s。

计算公式按前述应该是

内点：用 (C.4.1.11) 和 (C.4.1.12) 式。

上边界：用 (C.4.1.13) 和 (C.4.1.15) 式。

下边界：用 (C.4.1.22) 和 (C.4.1.9) 式。

图 C.4.9 给出了由于阀门关闭而引起单管中的响应，即给出了阀门处的压头和水库管子连接的流量随时间变化的情况。

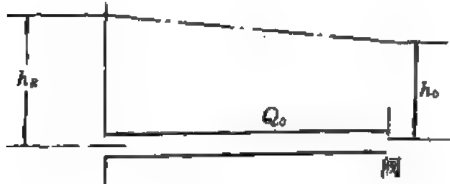


图 C.4.8

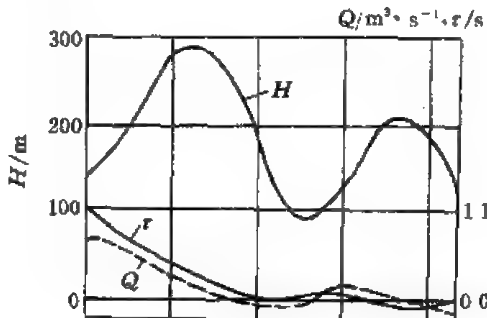


图 C.4.9

例 2 图 C.4.10 是离心泵后带有止回阀的提水系统。离心泵将水从水池（$EL_A=0$）A' 泵到水池 c 和 d 中，这两个水池的水位分别为 $EL_c=21.34$ m，$EL_d=22.86$ m。在泵启动之前水将从水池 d 流向水池 c，因为止回阀的存在，流体不可能从 A 点流向水池 A'，在定常流动时流体也不能从 B 流向 A。系统的已知数据为：

$L_1=487.68$ m，$L_2=762$ m，$L_3=914.4$ m，$D_1=0.610$ m，$D_2=0.914$ m，$D_3=0.457$ m，$c_2=1203$ m/s，$c_3=1158$ m/s，$c_1=1097$ m/s，$h_R=30.48$ m，$Q_R=0.1416$ m³/s，$f_1=0.018$，$f_2=0.021$，$f_3=0.02$，$g=9.81$ m/s²，$T_s=2$ s。

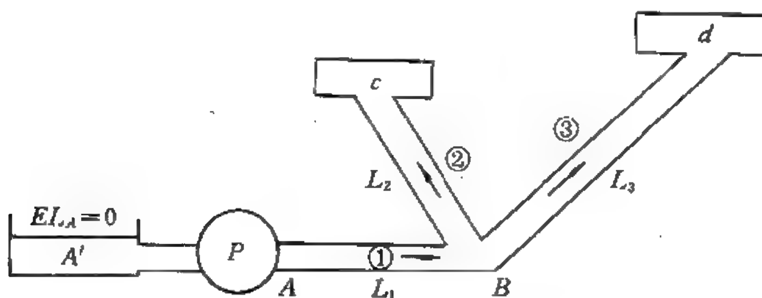


图 C.4.10

细心的读者马上会发现，为了保证计算时 3 个管道中的时间步长 Δt 相等，在给定的波速下很难将 3 个管道都分成整数段。而 $\Delta t_1=\Delta t_2=\Delta t_3$ 则是计算中必不可少的，为此只有对波速进行适当修正。考虑到波速计算本身的不精确性，这样做是允许的，但波速的修正不应超过 15%。即对本问题应该首先确定 Δt，然后适当通过调整波速 c_i 的办法，求出能得到整数分段数的距离步长 Δx_i，然后再进行水击计算。

设泵的起动特性为

$$h=1.25\alpha^2 h_R-\frac{0.05}{Q_R}\alpha Q-\frac{0.2}{Q_R^2}Q^2 \tag{C.4.1.36}$$

式中

$$\begin{cases}\alpha=T/T_s & T\leqslant T_s\\ \alpha=1 & T>T_s\end{cases}$$

泵启动之后，只有当泵在无量纲转速 α 下产生的断流水头（$h_s=1.25\alpha^2 h_R$）大于 c_{M1} 时止回阀才打开。

内点的压头和流量可根据（C.4.1.11）式和（C.4.1.12）两式计算。水池 c 和 d 可以看作是水位不变的水库，可以用（C.4.1.9）式（流体流入水池）或（C.4.1.10）式（流体流出水池）进行计算，求得两水库处的流量。

随时间的变化，内节点分岔处可用类似于（C.4.1.27）式和相应的相容性方程求得压头和流量。在 A 点当止回阀关闭时这里可以认为 $Q_A=0$，当 $1.25\alpha^2 h_R>c_{M1}$ 之后，止回阀打开，由于泵前压头为零，故可直接用（C.4.1.36）式和相容性方程 $h=hA^{n-1}=c_{M1}+B_1Q_A^{n-1}$，联立求出压头和流量。表 C.4.1 给出了计算结果。

表 C.4.1

J	Time	ALPHA	Q_A	Q_{B_1}	Q_{B_2}	Q_{B_3}	Q_C	Q_D	h_A	h_B
5	0	0	0	0	0.079 6	−0.079 6	0.079 6	−0.079 6	22.38	22.38
6	0.153	0.76	0	0	0.079 6	−0.079 6	0.079 6	−0.079 6	22.38	22.38
7	0.306	0.153	0	0	0.079 6	−0.079 6	0.079 6	−0.079 6	22.38	22.38
8	0.458	0.229	0	0	0.079 6	−0.079 6	0.079 6	−0.079 6	22.38	22.38
9	0.611	0.306	0	0	0.079 6	−0.079 6	0.079 6	−0.079 6	22.38	22.38
10	0.762	0.382	0	0	0.079 6	−0.079 6	0.079 6	−0.079 6	22.38	22.38
11	0.917	0.458	0	0	0.079 6	−0.079 6	0.079 6	−0.079 6	22.38	22.38
12	1.069	0.535	0	0	0.079 6	−0.079 6	0.079 6	−0.079 6	22.38	22.38
13	1.222	0.611	0	0	0.079 6	−0.079 6	0.079 6	−0.079 6	22.38	22.38
14	1.375	0.687	0	0	0.079 6	−0.079 6	0.079 6	−0.079 6	22.38	22.38
15	1.528	0.764	0	0	0.079 6	−0.079 6	0.079 6	−0.079 6	22.38	22.38
16	1.681	0.840	0.012 4	0	0.079 6	−0.079 6	0.079 6	−0.079 6	26.75	22.38
17	1.833	0.917	0.024 0	0	0.079 6	−0.079 6	0.079 6	−0.079 6	31.60	22.38
18	1.986	0.933	0.037 4	0	0.079 6	−0.079 6	0.079 6	−0.079 6	36.74	22.38
19	2.139	1.0	0.038 7	0.010 5	0.083 8	−0.073 3	0.079 6	−0.079 6	37.22	27.08
20	2.292	1.0	0.038 7	0.022 2	0.088 5	−0.066 3	0.079 6	−0.079 6	37.22	32.29

※本节内容由叶宏开提供.

4.2 铀分离器内转子流场的计算

原子反应堆的燃料是 U^{238}，它需要从 U^{235}中分离出来。最常用的方法是用高速旋转的转子进行分离，这就是所谓铀分离器转子。由于 U^{238}的质量比 U^{235}大，所以在高速旋转的转子中 U^{238}将沿径向被分离出来。分离器的转子是一个很长的圆柱形的筒，如果在筒内附加一沿轴向的回流，分离效率将成倍增加。为了产生这个回流，在筒中心注入管上安装有一组固定的勺子，在筒旋转时它们相对筒有一很高的速度，相当于驱动筒内流体的叶栅，这是一种产生回流的重要方法。顺便说一句，这些勺子的另一个作用是用来调节气体的注入与排空量。如果在筒二侧造成温度差，也能产生轴向回流。显然为了提高分离效果，了解筒内的流动状况是十分必要的。图 C.4.11 是铀分离机的示意图。

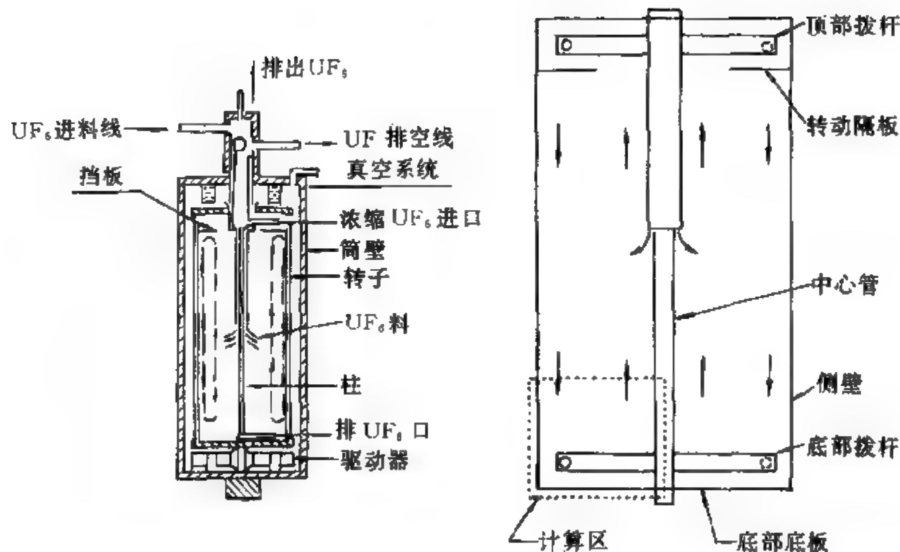


图 C.4.11

在筒内由于转速非常高，一般说气体都集中在侧壁附近，在中心处几乎是真空。在外侧壁处则集中了大量的高密度流体。流体流动可以分成如下几部分（图C.4.12）：

(1) 内核层（几乎是真空）

(2) Ekman 层

(3) Stewartson 层

(4) Ekman 处延层

(5) Stewartson 次层

(6) Ekman 外沿次层。

利用线化理论可以估计它们的厚度，也可以从直接解 NS 方程得到流场的全貌。本节介绍的是略去 Ekman 层和 Stewartson 层用解 Euler 方程的方法直接计算内部流动。此法可使实际计算大为简化。

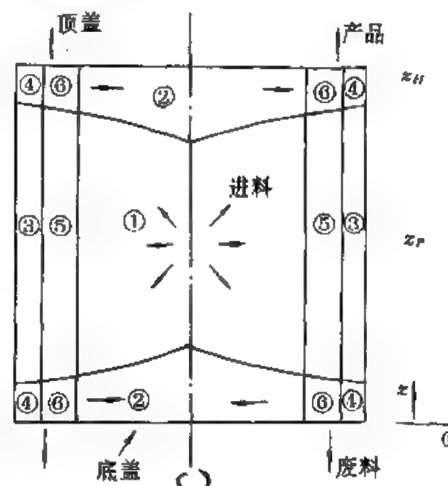


图 C.4.12

① 中心区 ②Ekman 层 ③ Stewartson 层

④ Ekman 外延层 ⑤Stewartson 次层

⑥ Ekman 外延次层

由于转子旋转速度非常高，因此筒内的流体绝大部分集中在外侧，中心部分气体密度几乎为零，所以计算域可以在 $r\approx 0.5\sim 0.7R$ 处截断。沿高度方向计算区域也不必取很多。由于固定勺离底部只有 $0.05R$，所以计算区域只要取 $0.1R$ 高度处即可以了。计算区见图 C.4.12，网格划分如图 C.4.13 所示。

这里采用的基本方程为

$$U_t + F_x + G_y + H_z = 0 \tag{C.4.2.1}$$

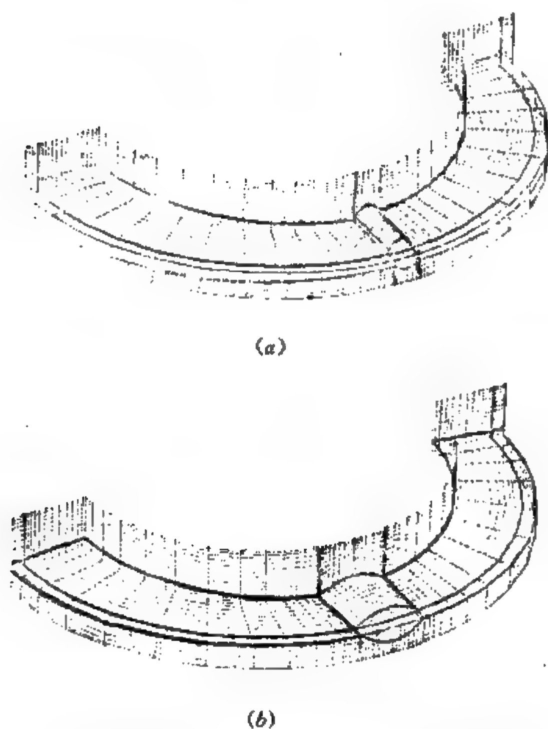
其中

$$U=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ e\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (p+e)\ u\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho vu\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ (p+e)\ v\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}\rho w\\ \rho wu\\ \rho wv\\ \rho w^2+p\\ (p+e)\ w\end{pmatrix} \tag{C.4.2.2}$$

e 为单位体积总能，p 为压力，状态方程为

$$p=(\gamma-1)\left[e-\frac{1}{2}\rho(u^2+v^2+w^2)\right] \tag{C.4.2.3}$$

对于 UF_6，取 $\gamma=1.065$。边界条件的取法如图 C.4.14 所示。



(a)

(b)

图 C.4.13

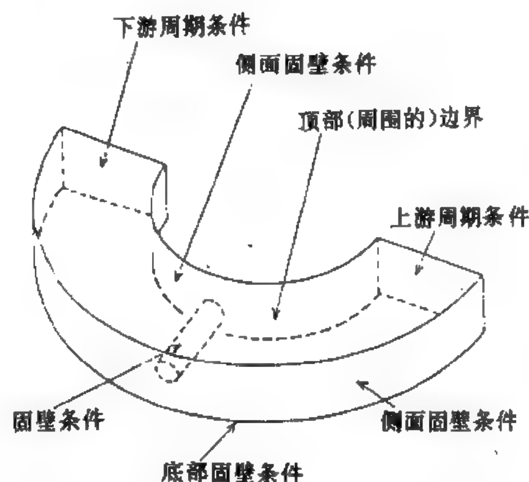


图 C.4.14

需要说明的是上表面，其上的物理参数（如压力差度等）取绝热气体作刚性转动时所具有的值，而质量通量则由 Riemann 问题确定。由于采用上风格式，故不需附加其它条件。需要指出的是，这里并没有假定流动趋向刚性转动，但只假定在外缘，当 z 比较大时（在求解区的上部）速度为 Ω_0R，其中 Ω_0 为转子转速。在图中可以看出，周向采用周期条件。

下面简要地讨论所采用的计算方法。这里采用的是近似的 Riemann 方法，其基本思想是：设求解的为一维方程

$$U_t+F_x=0 \tag{C.4.2.4}$$

起始条件为

$$U(x,0)=u_0(x)$$

若

$$u_0(x)=\begin{cases}u_L & x<0\\ u_R & x>0\end{cases} \tag{C.4.2.5}$$

这就是一个典型的 Riemann 问题。若 $F_x=AU_x$ 又用常系数 $\widetilde{A}U_x$ 代替，其中 $\widetilde{A}$ 可以取作

$$\widetilde{A}=\int_0^1 A(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{C.4.2.6}$$

这是因为

$$U(\theta)=U_L+\theta(U_R-U_L)$$

$$\mathrm{d}U=(U_R-U_L)\mathrm{d}\theta$$

$$\begin{aligned}F(U_R)-F(U_L)&=\int_0^1\frac{\partial F}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^1 A(\theta)\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^1 A(\theta)\mathrm{d}\theta(U_R-U_L)=\widetilde{A}(U_R-U_L)\end{aligned} \tag{C.4.2.7}$$

注意到 U，F 都是向量，故

$$F_j(U_R) - F_j(U_L) = \sum_i \tilde{a}_{ij}[(U_R)_i - (U_L)_i] \tag{C.4.2.8}$$

当 $F(U_R)$,$F(U_L)$,U_R,U_L 已知时 $\tilde{a}_{ij}$ 就确定了,反之当 $\tilde{a}_{ij}$ 已知时,F 就确定了。

不难看出,当 $U_R=U_L=U$ 时,$\tilde{A}=A(U)$。也可以证明,当 A 的特征向量均线性无关时,$\tilde{A}$ 的特征向量也将是线性无关的。

由于 A 的线性化处理,所以本方法又称作近似的特征线法。

现在用上述方法来求解(C.4.2.1)式。首先引入

$$W = \rho^{1/2}(1,u,v,w,h) \tag{C.4.2.9}$$

其中 $h=\frac{1}{\rho}(e+p)$ 为单位质量总焓。此时 U,F,G,H 各项为 W 各分量的二次齐次函数,比如

$$U_1 = W_1^2, \quad G_4 = W_3W_4$$

$$U_5 = \frac{1}{\gamma}W_1W_5 + \frac{\gamma-1}{2\gamma}(W_2^2+W_3^2+W_4^2)$$

$$F_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma}W_1W_3 + \frac{\gamma+1}{2\gamma}W_2^2 - \frac{\gamma-1}{2\gamma}(W_3^2+W_4^2)$$

等等,于是可以写出

$$U = U(W), \quad F = F(W), \quad G = G(W), \quad H = H(W) \tag{C.4.2.10}$$

(它们的具体形式请读者自行列出),于是有

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial W}\Delta W, \quad \Delta F = \frac{\partial F}{\partial W}\Delta W, \quad \Delta G = \frac{\partial G}{\partial W}\Delta W, \quad \Delta H = \frac{\partial H}{\partial W}\Delta W \tag{C.4.2.11}$$

引入记号

$$\frac{\partial U}{\partial W} = B, \quad \frac{\partial F}{\partial W} = C, \quad \frac{\partial G}{\partial W} = D, \quad \frac{\partial H}{\partial W} = E \tag{C.4.2.12}$$

则可得

$$\left.\begin{aligned} U_L - U_R &= \tilde{B}(W_L - W_R) \\ F_L - F_R &= \tilde{C}(W_L - W_R) \\ G_L - G_R &= \tilde{D}(W_L - W_R) \\ H_L - H_R &= \tilde{E}(W_L - W_R) \end{aligned}\right\} \tag{C.4.2.13}$$

其中～表示平均值,L,R 表示间断左右值。

现在讨论用以上记号表示的欧拉方程的特征及特征向量。由于

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x} = CB^{-1}\frac{\partial U}{\partial x}$$

故与 F 相关的矩阵 $\frac{\partial F}{\partial U}=A=CB^{-1}$,其特征方程为

$$\det|CB^{-1} - \lambda I| = 0 \tag{C.4.2.14}$$

对应特征向量为 ΔU,故

$$(CB^{-1} - \lambda I)\Delta U = 0$$

或利用(C.4.2.11)式有

$$(CB^{-1}-\lambda I)B\Delta W=0$$

或

$$(C-\lambda B)\Delta W=0$$

或

$$\det|C-\lambda B|=0 \tag{C.4.2.15}$$

C,B 的具体形式为

$$
\left.\begin{array}{l}
C=\begin{bmatrix} W_2 & W_1 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\gamma-1}{\gamma}W_5 & \dfrac{\gamma+1}{\gamma}W_2 & \dfrac{-\gamma-1}{\gamma}W_3 & \dfrac{-\gamma-1}{\gamma}W_4 & \dfrac{\gamma-1}{\gamma}W_1 \\ 0 & W_3 & W_2 & 0 & 0 \\ 0 & W_4 & 0 & W_2 & 0 \\ 0 & W_5 & 0 & 0 & W_2 \end{bmatrix} \\
B=\begin{bmatrix} 2W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W_2 & W_1 & 0 & 0 & 0 \\ W_3 & 0 & W_1 & 0 & 0 \\ W_4 & 0 & 0 & W_1 & 0 \\ \dfrac{1}{\gamma}W_5 & \dfrac{\gamma-1}{\gamma}W_2 & \dfrac{\gamma-1}{\gamma}W_3 & \dfrac{\gamma-1}{\gamma}W_4 & \dfrac{W_1}{\gamma} \end{bmatrix}
\end{array}\right\} \tag{C.4.2.16}
$$

将它们代入(C.4.2.15),展开整理后得

$$
(\lambda-u)^3\left[(\lambda-u)^2-(\gamma-1)\left\{h-\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\right\}\right]=0 \tag{C.4.2.17}
$$

特征值为

$$
\lambda_1=u-a,\ \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=u,\ \lambda_5=u+a \tag{C.4.2.18}
$$

其中

$$
a^2=(\gamma-1)\left(h-\frac{1}{2}q^2\right),\ q^2=u^2+v^2+w^2 \tag{C.4.2.19}
$$

特征向量为

$$
\left.\begin{array}{l}
\Delta U_{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ u-a \\ v \\ w \\ h-ua \end{pmatrix},\quad \Delta U_{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \\ 0 \\ v^2 \end{pmatrix},\quad \Delta U_{(3)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \\ w^2 \end{pmatrix} \\
\Delta U_{(4)}=\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \\ \frac{1}{2}q^2 \end{pmatrix},\quad \Delta U_{(5)}=\begin{pmatrix} 1 \\ u+a \\ v \\ w \\ h+wa \end{pmatrix}
\end{array}\right\} \tag{C.4.2.20}
$$

故

$$
\Delta U=\sum_{i=1}^{5}\sigma_i\Delta U_{(i)} \tag{C.4.2.21}
$$

在给出 ΔU 时即可确定 σ_i。

对于 G,H 也有类似的关系,利用这些关系再借助于近似特征线法就可确定相邻单元交接面上流体的通量。结合 TVD 法(见本篇第六章)即可求解本问题。

利用以上方法对圆柱形拨管的情况进行了数值模拟。计算 2000 步后相对误差达 10^{-2}。在 $\gamma=0.94$,$\gamma=0.9$ 及 $\gamma=0.86$ 处圆柱附近流体的压力分布如图 C.4.15 所示。其中拨管中部运动(转动)线速度与当地声速之比为 7(即 $M=7$)。图中 Q 表示无量纲的压力值。

可以看出外缘处圆柱附近的激波很强,而向内移动时激波强度变弱。

图 C.4.16 表示 r-θ 平面上流体速度分布及压力分布。可以看出在拨管附近有很强的朝里的流动,而且在上游方向形成一个漩涡。从压力分布图可以看出,拨管表面压力变化很快。

图 C.4.17 表示 r-z 平面内流体流动的情况,其中

(a)为拨管前;(b)为拨管中心处;(c)为拨管后。

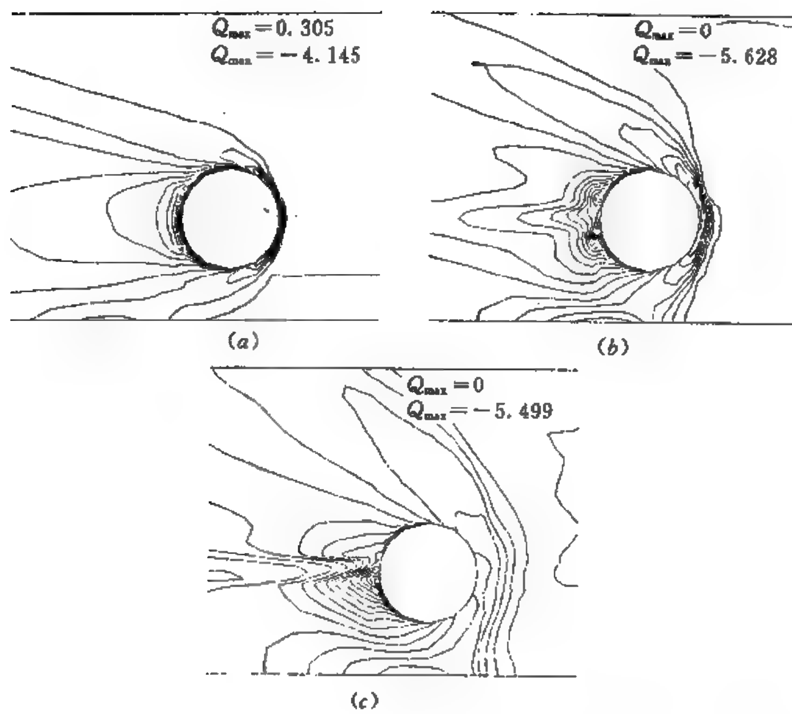


图 C.4.15

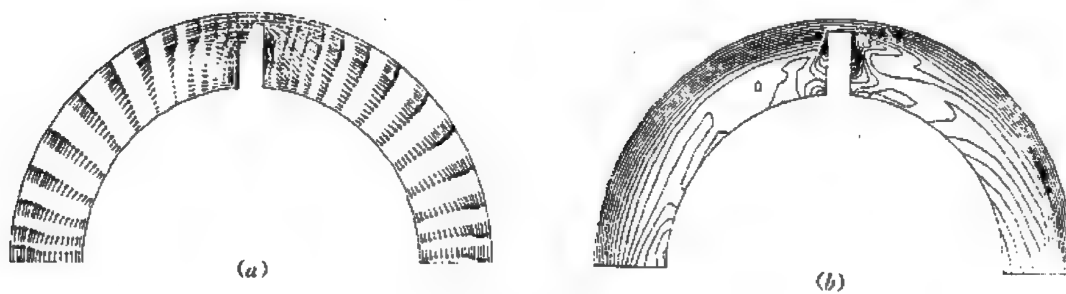
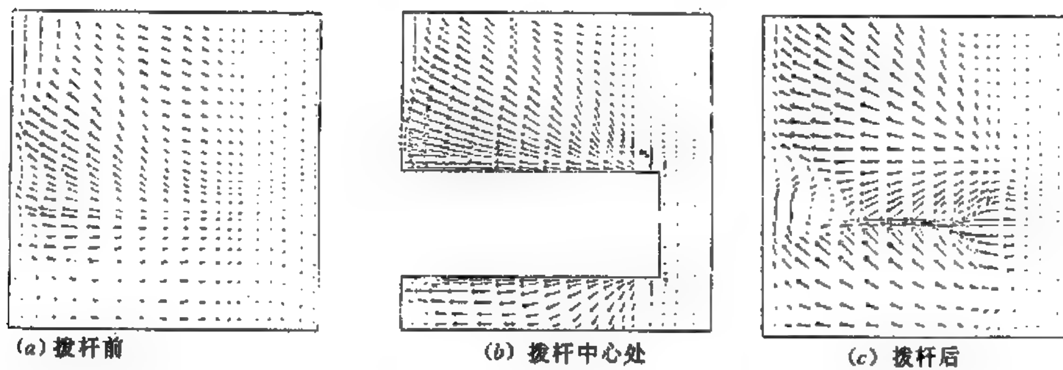


图 C.4.16

(a)速度分布 (b)压力等值线 $p_{max}=0.076$ $p_{min}=-4.682$



(a) 拨杆前 (b) 拨杆中心处 (c) 拨杆后

图 C.4.17

从图中可以看到很强的径向向内的流动，这与拨管生成回流的作用相吻合。

图 C.4.18 表示 r-θ 平面内 z 向速度分量的等值线。实线是正值，虚线是负值。可见这里靠近外侧的流动向下(向筒的端部)，而内侧则是向筒的中间部位流动的。

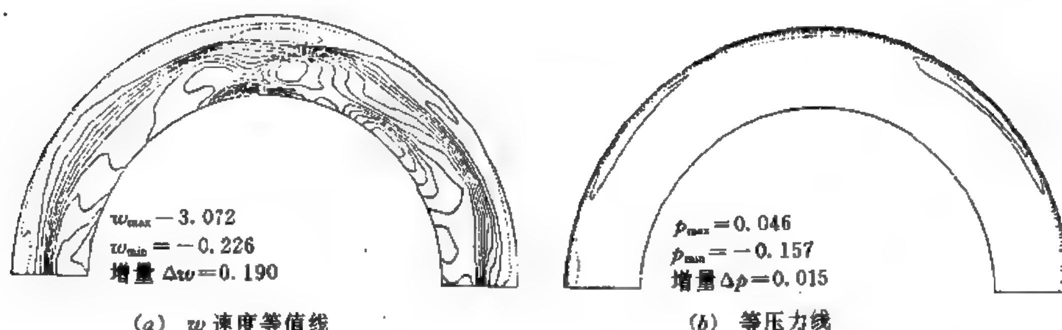


图 C.4.18

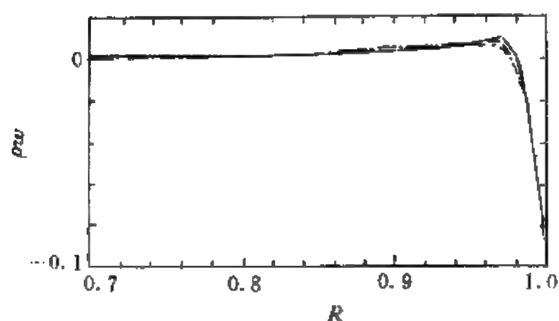


图 C.4.19

图 C.4.19 表示沿径向的轴向流量分布情况。

关于翼型拨管的情况此处不再细述。

以上的计算表明至少在中心区(即远离 Ekman 层和 Stewartson 层处)是定性地符合实际情况的。可以预计，如果直接求解 N-S 方程将会得到更准确的结果，当然计算更加复杂，耗时更多。

4.3 管道内流场的计算

管道是工业设备中最常见的部件，无论是化工设备、动力装置还是运输机械中都有大量管道系统。它们实现流体的输送和热交换。在核动力中也不例外。管道系统的研究不仅有重要的实际意义，还有重要的理论意义。早在 1927 年 Dean 通过理论分析，指出弯曲管道流动中存在二次流。随后几十年中人们对二次流问题进行了深入研究，但由于问题较复杂，主要限于实验研究。由于二次流的强度较小，不易准确测量。近年来由于数值模拟的发展，管道流动的数值计算也得到发展，目前计算主要集中在层流和工程模型的湍流计算。最近还出现了采用大涡模拟方法的数值计算，也有人尝试用直接求解 N-S 方程进行数值模拟，但由于计算机速度和容量的限制，仍限于较低雷诺数的情况。

为了研究管道的传热和传质问题，首先应当研究管道内流场的特点和速度分布。本节将介绍管道内层流计算和用模式理论对湍流进行数值计算。下一节介绍用大涡模拟对湍流运动进行数值计算。

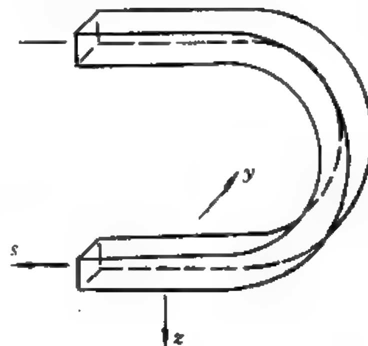


图 C.4.20

工程中常用的管道有两种:圆形截面和矩形截面。大部分管道有平直段和弯曲段,这里重点介绍有平直进出口段的矩形截面的弯曲管道内流动的数值计算。对于圆形截面管道的计算其方法则是类似的。图 C.4.20 给出了上述流场的几何图形和坐标系。

对于管道系统内的流场,其方程为

连续方程
$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_2h_3v_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(h_1h_3v_2)}{\partial x_2}+\frac{\partial(h_1h_2v_3)}{\partial x_3}\right]=0 \tag{C.4.3.1}$$

动力学方程

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_i}{\partial t}h_jh_k+\frac{\partial(v_iv_ih_jh_k)}{h_i\partial x_i}+\frac{v_iv_jh_jh_k}{h_ih_j}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}+\frac{v_iv_kh_jh_k}{h_ih_k}\frac{\partial h_i}{\partial x_k}+\frac{\partial(v_iv_jh_ih_k)}{h_i\partial x_j}\\
&\quad-\frac{v_jv_jh_jh_k}{h_jh_i}\frac{\partial h_j}{\partial x_i}+\frac{\partial(v_iv_kh_ih_j)}{h_i\partial x_k}-\frac{v_kv_kh_ih_j}{h_kh_i}\frac{\partial h_k}{\partial x_i}+\frac{\partial(ph_jh_k)}{h_i\partial x_i}-\frac{ph_ih_k}{h_ih_j}\frac{\partial h_j}{\partial x_i}-\frac{ph_ih_j}{h_ih_k}\frac{\partial h_k}{\partial x_i}\\
&=\frac{\partial(\tau_{ii}h_jh_k)}{h_i\partial x_i}+\frac{\tau_{ij}h_jh_k}{h_ih_j}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}+\frac{\tau_{ik}h_jh_k}{h_ih_k}\frac{\partial h_i}{\partial q_k}\\
&\quad+\frac{\partial(\tau_{ji}h_ih_k)}{h_i\partial x_j}-\frac{\tau_{jj}h_k}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial x_i}+\frac{\partial(\tau_{ki}h_ih_j)}{h_i\partial x_k}-\frac{\tau_{kk}h_j}{h_i}\frac{\partial h_k}{\partial q_i}
\end{aligned}$$

$(i=1,2,3)$,i,j,k 以 $1\to2\to3\to1$ 即 $i\to j\to k\to i$ 方式轮换,

其中
$$\tau_{ij}=\frac{1}{Re}S_{ij}, \tag{C.4.3.2}$$

S_{ij}为变形速率张量,这里设流体是不可压缩的和牛顿型的。由于温度场可以单独进行计算,它对流场的计算没有影响,因此能量方程没有列出。

在矩形截面管道中,在弯曲段,设中心线是一圆弧,内外壁均为同心圆弧,其方程为连续方程

$$\frac{1}{h}\frac{\partial v_s}{\partial s}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{v_z}{hR}=0 \tag{C.4.3.3}$$

动力学方程

s 方向
$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_s}{\partial t}+\frac{v_s}{h}\frac{\partial v_s}{\partial s}+v_z\frac{\partial v_s}{\partial z}+v_y\frac{\partial v_s}{\partial y}+\frac{v_sv_z}{hR}\\&=-\frac{1}{\rho h}\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}(2\nu S_{ss})+\frac{\partial}{\partial z}(2\nu S_{sz})+\frac{\partial}{\partial y}(2\nu S_{sy})+\frac{2}{hR}\cdot 2\nu S_{sz}\end{aligned} \tag{C.4.3.4-1}$$

z 方向
$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{v_s}{h}\frac{\partial v_z}{\partial s}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{v_sv_s}{hR}\\&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}(2\nu S_{zs})+\frac{\partial}{\partial z}(2\nu S_{zz})+\frac{\partial}{\partial y}(2\nu S_{zy})+\frac{2\nu(S_{zz}-S_{ss})}{hR}\end{aligned} \tag{C.4.3.4-2}$$

y 方向
$$\begin{aligned}&\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{v_s}{h}\frac{\partial v_y}{\partial s}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\\&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}(2\nu S_{ys})+\frac{\partial}{\partial z}(2\nu S_{zy})+\frac{\partial}{\partial y}(2\nu S_{yy})+\frac{2\nu S_{zy}}{hR}\end{aligned} \tag{C.4.3.4-3}$$

其中 $h=1+\frac{z}{R}$为 s 方向的拉梅系数。

由于主流方向是沿中心线的,在中心线方向的变化要比沿侧向及径向的变化小,所以可略去其二阶导数项,这样就得到抛物化方程,给计算带来方便。

为计算定常情况下的流场,一般直接采用定常流动的方程,也就是将上述动力学方程中的关于时间的导数项略去,这时方程可以采用 Spalding-Patanker 推荐的 SIMPLER 方法计算。在这种方法中压力的修正要进行迭代和反复多次计算,而压力修正的计算并无多大物理意义,计算时间也比较长。另一种方法直接采用不定常的 NS 方程,利用时间推进方法进行计算。当

流场达到稳定后，即为定常流动的结果。这种方法的优点在于定常问题和不定常问题可以采用同一个程序，在研究湍流计算时，实际上只需要将相应的模型加入，即可进行湍流运动的计算，显得非常方便。如果人们希望模拟湍流运动，则必须直接解不定常流动方程以显示每一时刻湍流的瞬态情况。因此采用不定常方程可以兼顾层流和湍流的数值计算。

不可压缩不定常流动的数值计算本篇第三章第 8 节中已作了介绍。这里同样采用交错网格，速度定义在网格相应侧面的中心处，压力值定义在网格中心处。由于压力值不易直接计算，于是仍可采用先略去压力项而计算虚拟速度 $\widetilde{V}$，即

$$\frac{\widetilde{V} - V^n}{\Delta t} = P^n + D^{n+1} \qquad \text{(C. 4. 3. 5)}$$

其中 P 为对流项，D 为耗散项。在空间方向均采用中心差分。由于格式是显式的，所以计算比较方便，由于

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + P^n + D^{n+1} \qquad \text{(C. 4. 3. 6)}$$

将它与(C. 4. 3. 5)式相减，再取散度，计及 $\nabla \cdot V^{n+1}=0$，可得

$$\nabla \cdot \widetilde{V} = \nabla^2\left(\frac{p}{\rho}\right) \qquad \text{(C. 4. 3. 7)}$$

这是一个关于压力的泊松方程。由于是三维的，计算比较困难，可以采用 Gauss-Chebyshev 变换，即设

$$p_j = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{p}_k \cos\frac{\pi(2j+1)k}{2N} \quad (j = 1, 2, \cdots, N) \qquad \text{(C. 4. 3. 8)}$$

将它代入(C. 4. 3. 7)式，并将 $q \equiv \nabla \cdot \widetilde{V}$ 也作同样变换，可得方程

$$\left[(c_{i,j-1,k} + c_{i,j+1,k})\cos\frac{\pi n}{2N} + c_{i,j,k}\right]\hat{p}_{i,j,k} + c_{i+1,j,k}\,\hat{p}_{i-1,n,k}$$
$$+ c_{i-1,j,k-1}\,\hat{p}_{i-1,n,k-1} + c_{i-1,j,k-1}\,\hat{p}_{i-1,n,k-1} + c_{i,j,k-1}\,\hat{p}_{i,n,k-1} = \hat{q}_{i,n,k}$$
$$(i, k = 1, 2, \cdots, {N_I \atop N_k})(n = 1, 2, \cdots, N_J) \qquad \text{(C. 4. 3. 9)}$$

这是 N_J 个二维的泊松方程，可以利用 SOR(超松弛迭代)方法求解，也可以采用多重网格法，以加速收敛。所得的解再作逆 Gauss-Chebyshev 变换而得到压力分布。应当指出的是，G-C 变换可以通过快速富氏变换来实现，这样计算速度可以大大加快。

利用上述方法对几个层流例子进行了计算，选其中一例介绍如下：

定义最大进口速度 U_m 为参考速度，$Re=\frac{U_m H}{\nu}$，其中 H 为管截面的高度，管截面为正方形。弯曲部分管道中心的半径 R 为 $6.7H$，Dean 数 $De=Re\sqrt{\frac{H}{R}}=818.67$，$Re=2119.1$。

进口速度剖面给定，即充分发展直方管的层流速度剖面。出口的边界条件为速度变化率为零。压力边界条件应与此相适应。所取管道剖面的位置如图 C. 4. 21 所示。其中剖面 1 为进口，21 为弯曲部分进口，31 为 56. 25°，37 为 90°

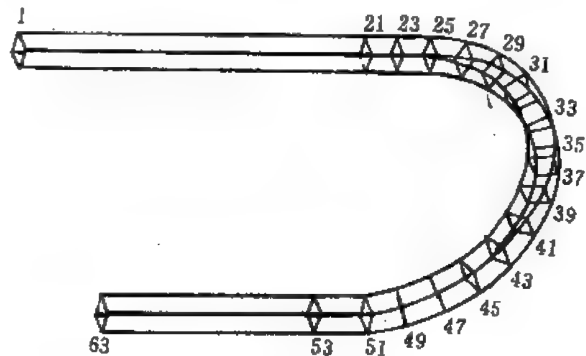


图 C. 4. 21

处，45 为 135°处，53 为 180° 处，63 为出口处。图 C. 4. 22 和图 C. 4. 23 为各剖面处的速度剖面及二次流的情况。

从图中可以看出，在进口处是没有二次流的，在弯曲管道进口处流场由于不对称性已出现二次流，在 45° 附近处在内侧进一步出现第 2 个二次环流，该环流不断扩大；在弯管出口处，两个环流大小已接近。在直管出口处二次流型式不变，只是外侧进一步得到加强。

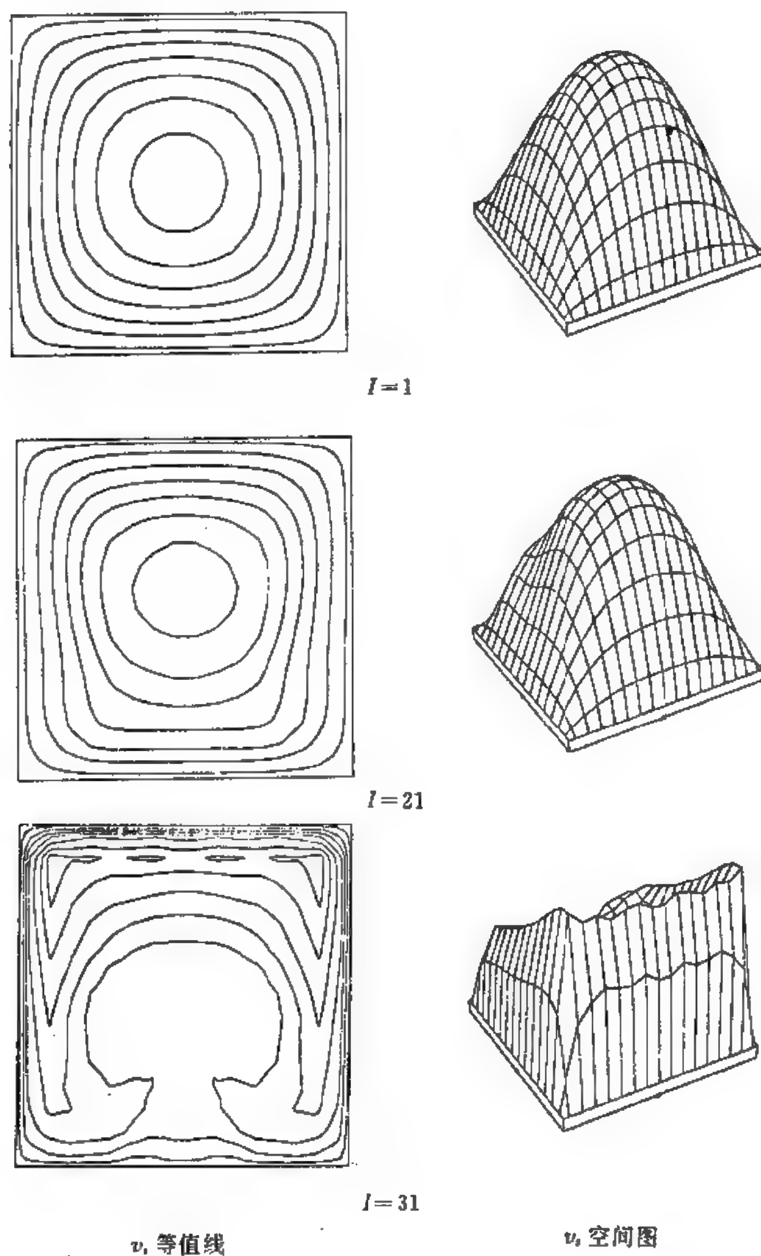
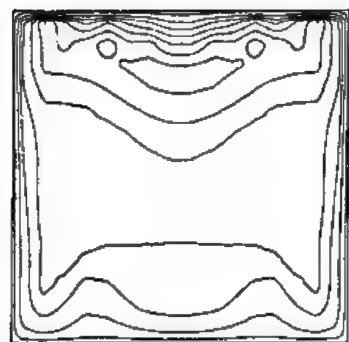
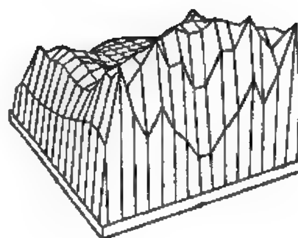
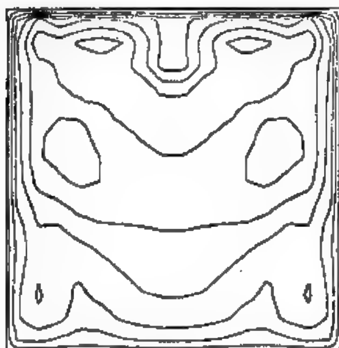
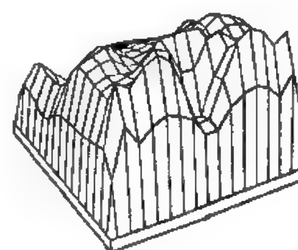


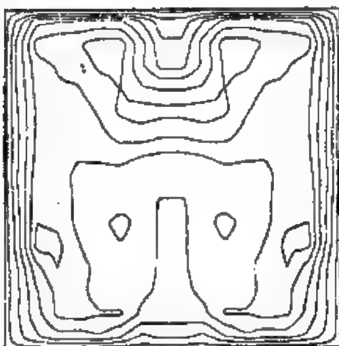
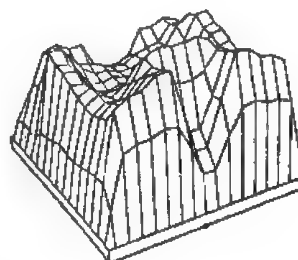
图 C. 4. 22(a)

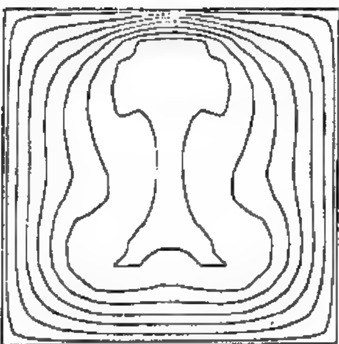
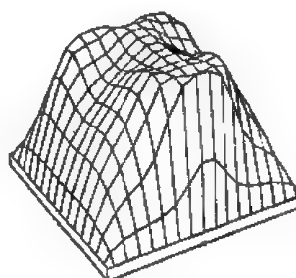
$I=37$

$I=45$

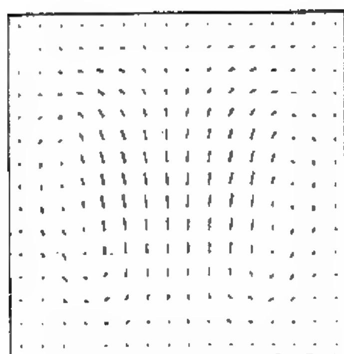
$I=53$

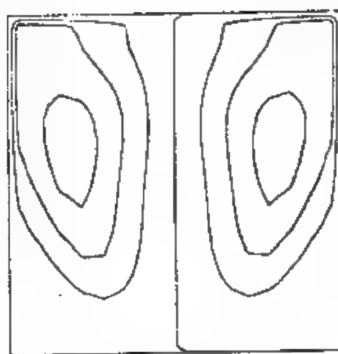



$I=63$

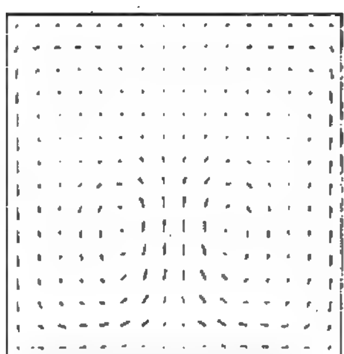
v_z 等值线　　　　v_z 空间图

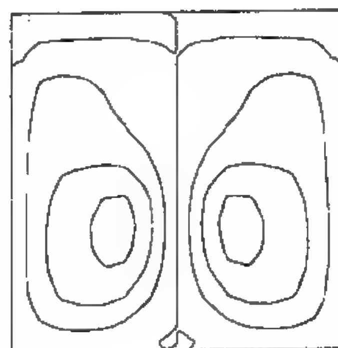
图　C.4.22(b)



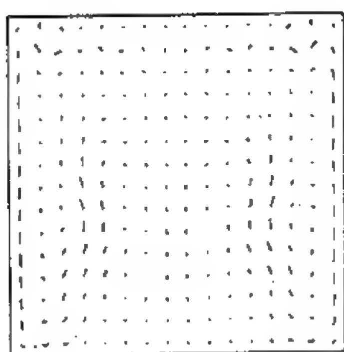


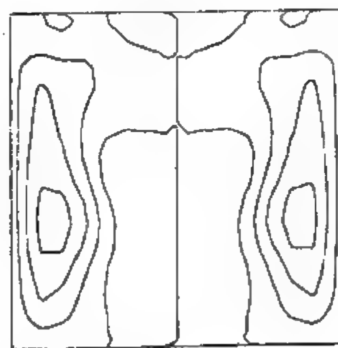
$I=21$





$I=31$





$I=37$

二次流速度向量图　　　　二次流流线图

图　C.4.23(*a*)

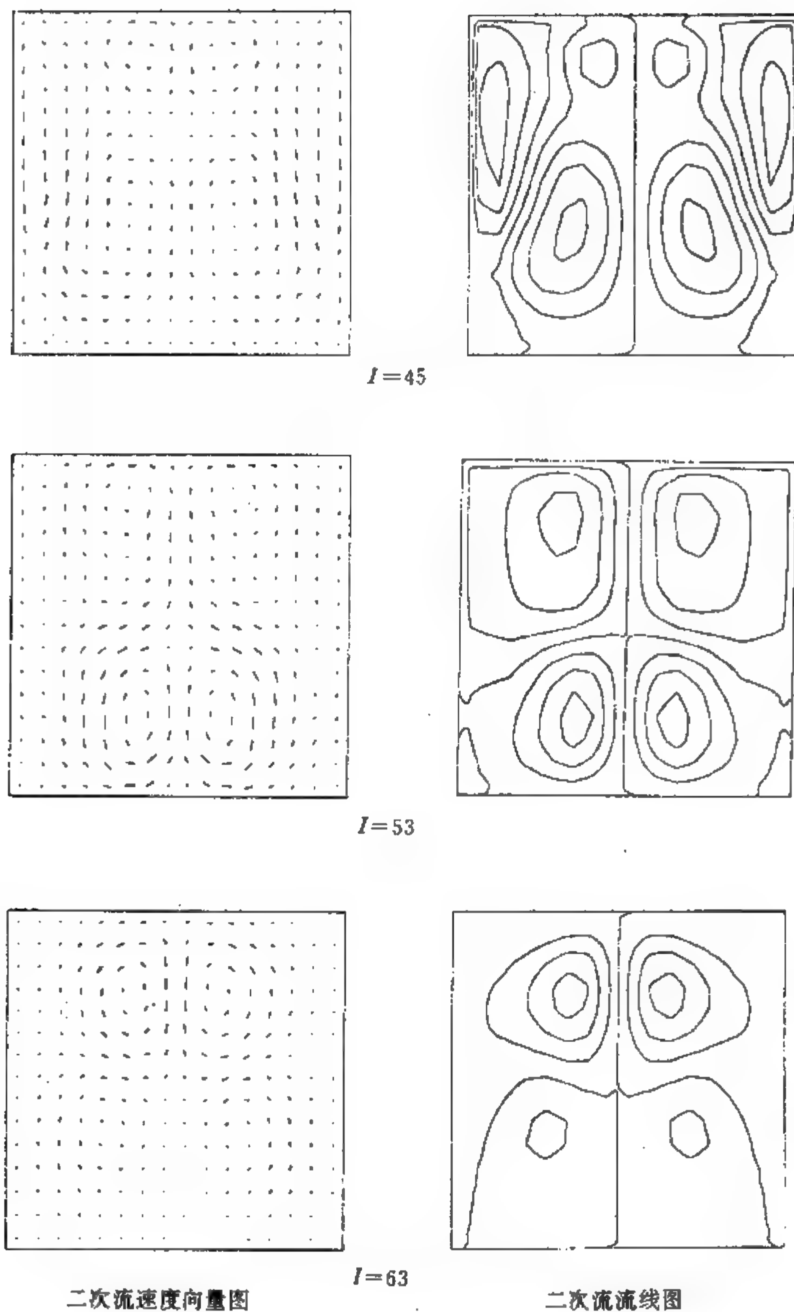


图 C.4.23(b)

如果弯管是螺旋形的，则在很多圈以后，层流是充分发展的，这时的流型如图 C.4.24 所示，最终流型不只与 Re 有关还与 Dean 数有关。

下面讨论用模式理论来计算湍流的情况。

这里采用 k-ε 模型，其梗概如下：

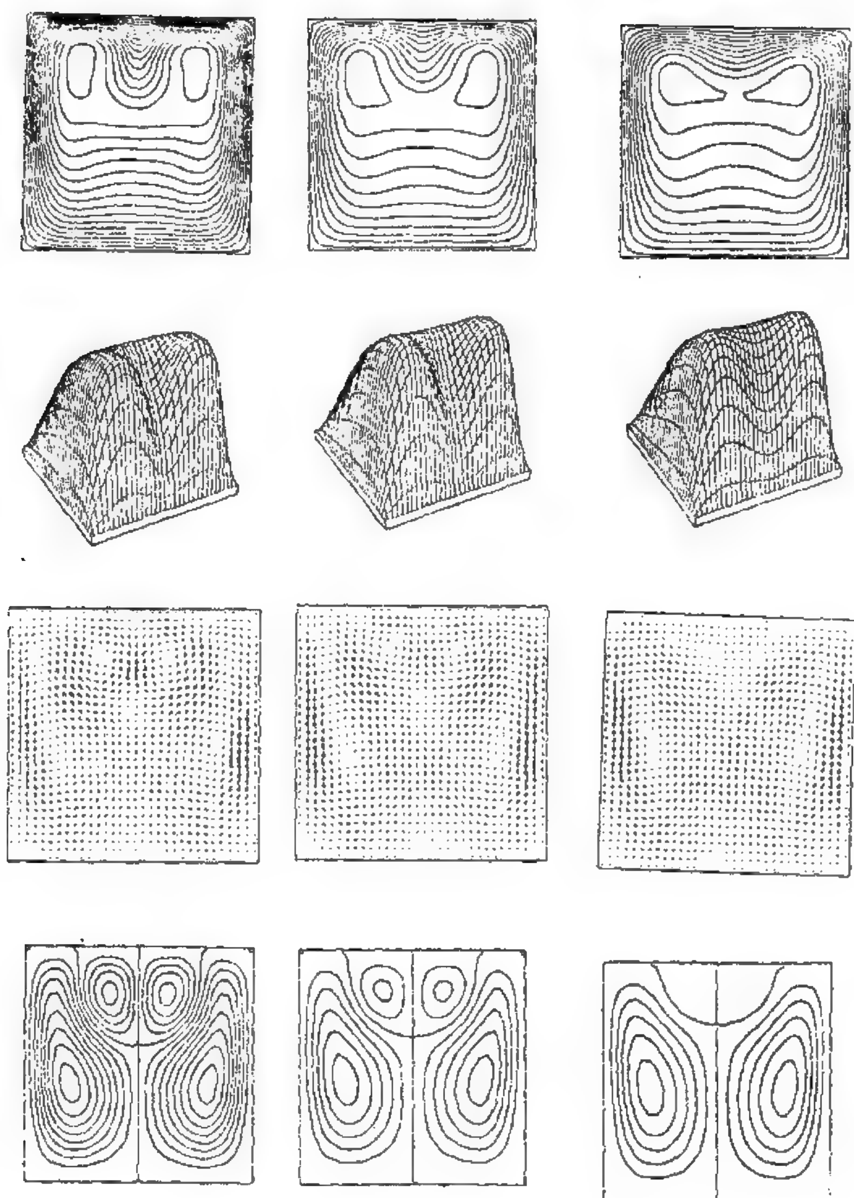


图 C.4.24

湍流应力项为$-\rho\,\overline{v_i'v_j'}=\mu^*\langle S_{ij}\rangle-\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}$，其中$\langle S\rangle$为平均速度的变形速率张量，$\delta_{ij}$为Kroneker记号，$k=\frac{1}{2}\overline{v_1'v_1'+v_2'v_2'+v_3'v_3'}$为湍流脉动动能。而$\mu^*\propto\rho u_c l_c$，这里$u_c$为某一特征速度，在远离壁面处，$u_c\sim\sqrt{k}$，$l_c$为某一特征长度，一般选为$k^{3/2}/\varepsilon$，此处$\varepsilon$为湍流动能的耗散速率。Launder-Spalding(1974)和Rodi(1980)建立了关于k-ε的方程，在矩形弯管坐标系中，它们为

k方程：

$$\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial z}(\rho hV_z k)+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}(\rho V_s k)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y k)=\rho P_k-\rho\varepsilon+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)h\frac{\partial k}{\partial z}\right]$$

$$+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{1}{h}\frac{\partial k}{\partial s}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial y}\right]$$

ε 方程：

$$\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial z}(\rho h V_z \varepsilon)+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}(\rho V_s \varepsilon)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y \varepsilon)=C_{\varepsilon_1}\rho\frac{\varepsilon}{k}P_k-C_{\varepsilon_2}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$+\frac{1}{h}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)h\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right]+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{1}{h}\frac{\partial \varepsilon}{\partial s}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right]$$

$\mu_e=\mu_t+\mu$，　$\mu_t=\rho c_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}$，　$c_\mu=0.09$，　$c_{\varepsilon_1}=1.44$，　$c_{\varepsilon_2}=1.92$

$\sigma_k=1.0$，　$\sigma_\varepsilon=1.3$，　$p_t=p+\frac{2}{3}\rho k$

V_z, V_s, V_y 是 v_z, v_s, v_y 的时均值

$$P_k=\frac{\mu_t}{\rho}\left\{2\left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{1}{h}\frac{\partial V_s}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2-\frac{V_s}{R+z}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial V_z}{\partial s}+\frac{\partial V_s}{\partial z}\right)\right.\right.$$

$$\left.+\frac{V_z}{R+z}\left(\frac{V_z}{R+z}+\frac{2}{h}\frac{\partial V_s}{\partial s}\right)+\left(\frac{1}{h}\frac{\partial V_z}{\partial s}\frac{\partial V_s}{\partial z}+\frac{1}{h}\frac{\partial V_y}{\partial s}\frac{\partial V_s}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\right]$$

$$\left.+\left(\frac{V_s}{R+z}\right)^2+\left(\frac{\partial V_s}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V_s}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{1}{h}\frac{\partial V_z}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{1}{h}\frac{\partial V_y}{\partial s}\right)^2\right\}$$

动力学方程和 k,ε 方程一起可以写作如下形式：

$$\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial z}(\rho h V_z \phi)+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}(\rho V_s \phi)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y \phi)$$

$$=\frac{\Gamma}{h}\frac{\partial}{\partial z}\left(h\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)+\frac{\Gamma}{h^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)-\Gamma\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+S_\phi$$

其中 ϕ,Γ,S_ϕ见表 C. 4. 2。

表　C. 4. 2

方　程	ϕ	Γ	S_ϕ
连续方程	1	0	0
z 方向动力学方程	V_z	μ_e	$\frac{\rho V_s^2}{R+z}-\frac{\partial p_t}{\partial z}-\frac{\mu_e}{R+z}\left(\frac{V_z}{R+z}+\frac{2}{h}\frac{\partial V_s}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_t\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_t h\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$ $+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}\left(\mu_t\frac{\partial V_s}{\partial z}\right)-\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mu_t\frac{V_s}{R+z}\right)-\mu_t\frac{V_z}{(R+z)^2}$
s 方向动力学方程	V_s	μ_e	$-\frac{\rho V_z V_s}{R+z}-\frac{1}{h}\frac{\partial p_t}{\partial s}-\frac{\mu_e}{R+z}\left(\frac{V_s}{R+z}-\frac{2}{h}\frac{\partial V_z}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_t\frac{1}{h}\frac{\partial V_y}{\partial s}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_t\frac{1}{h}\frac{\partial V_z}{\partial s}\right)$ $+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}\left(\mu_t\frac{1}{h}\frac{\partial V_s}{\partial s}\right)+\frac{2}{h}\frac{\partial}{\partial s}\left(\mu_t\frac{V_z}{R+z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_t\frac{V_s}{R+z}\right)+\frac{\mu_t}{R+z}\left(\frac{\partial V_s}{\partial y}-\frac{V_s}{R+z}\right)$
y 方向动力学方程	V_y	μ_e	$\frac{-\partial p_t}{\partial y}+\frac{1}{R+z}\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu_t(R+z)\frac{\partial V_z}{\partial y}\right]+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}\left(\mu_t\frac{\partial V_s}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_t\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)$
k 方程	k	$\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}$	$\rho P_k-\rho\varepsilon$
ε 方程	ε	$\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}$	$c_{\varepsilon_1}\rho\frac{\varepsilon}{k}P_k-c_{\varepsilon_2}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}$

需要说明的是 k-ε 方程只有在湍流核心处才是正确的，在近壁处则不适用，此时需要采用

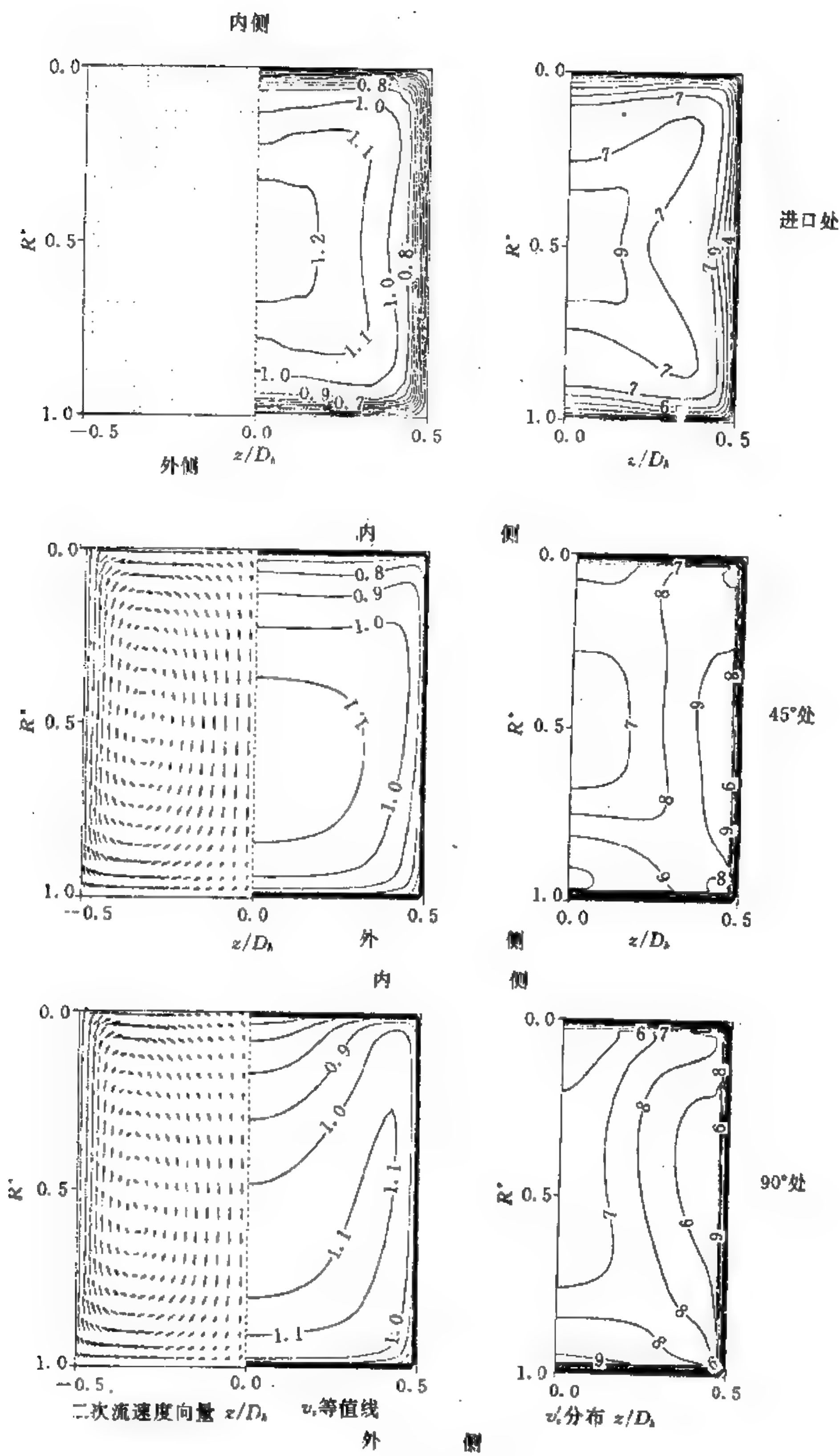

内侧
0.0
0.8
1.0
1.1
1.2
0.5
R^*
1.0
0.9
0.7
1.0
−0.5
0.0
0.5
外侧
z/D_h
7
9
6
进口处
内
侧
45°处
外
侧
90°处
二次流速度向量 z/D_h
v_t等值线
v_t分布 z/D_h

图 C.4.25(a)

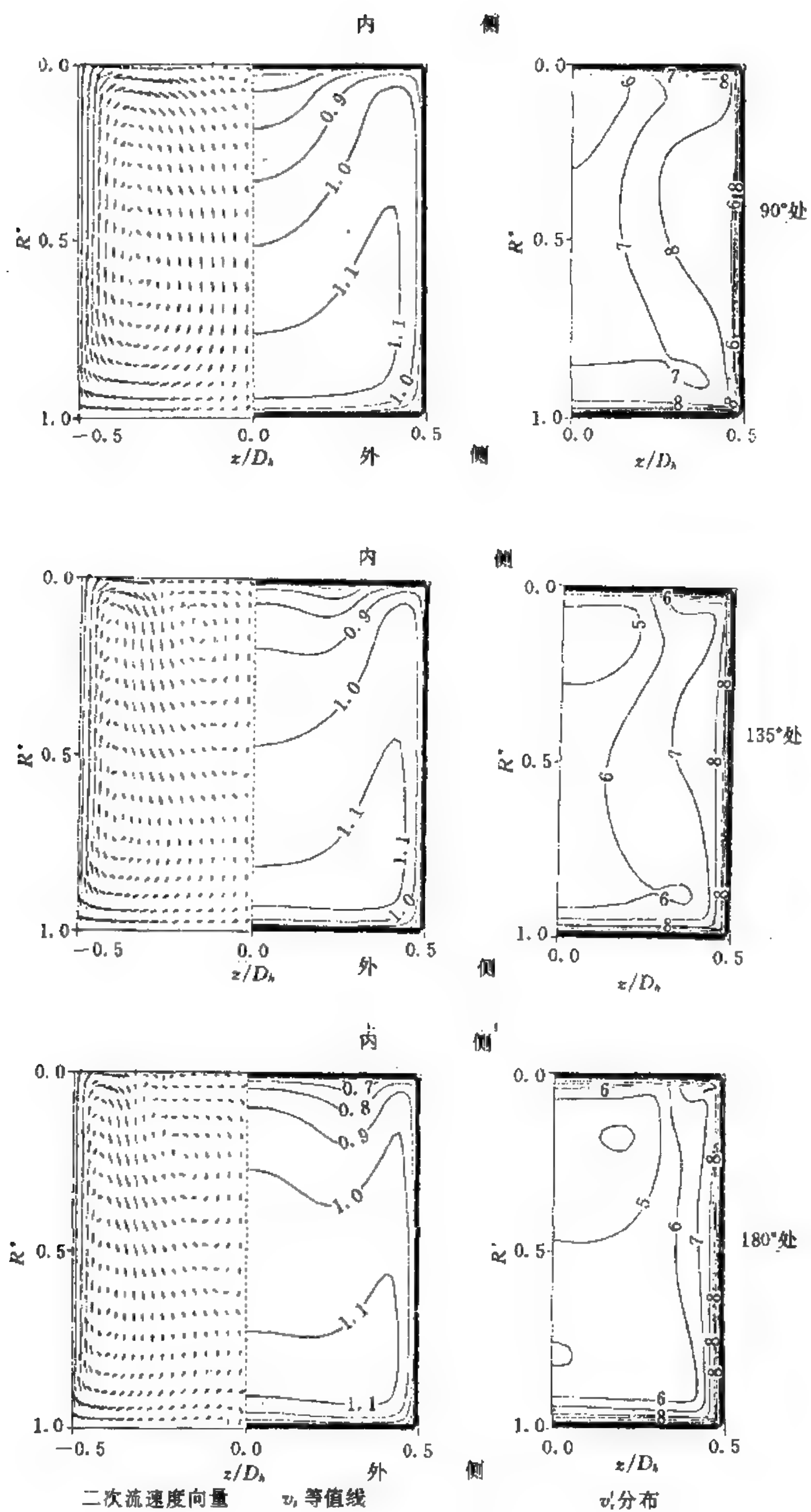


图 C.4.25(b)

壁面函数。一般与壁面法向垂直方向采用速度分布为对数规律，这样就可以将壁面区与核心区相联接起来。对数规律取

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{k}\ln\left[E\frac{yu_\tau}{\nu}\right]$$

其中 u_τ 为壁面处的摩擦速度，$k=0.4187$，$E=9.793$。

解方程的方法与层流相同，只是现在加入了两个 k-ε 方程而已。

这里采用 Spalding 和 Patankar 推荐 的 SIMPER 方法计算，对弯曲管道内的湍流运动计算结果如图 C.4.25 所示。该结果是 Arnal 在 1988 年完成的，其中 $Re=40000$，$\frac{D_H}{R}=0.3$，为一直角弯管；$Re=28400$，$\frac{D_H}{R}=0.3$ 为 180°弯管，图中显示的为时间平均的二次流及速度分布图。可以看出与层流情况有很大的差别。

上述方法也可以应用于圆管内流场的计算。曲线坐标的建立是这样的：剖面上为 γ-θ 极座标，沿管中心线为 s 坐标。由于求解的点在网格中心，加上采用非交错网格，可以避免中心点的非物理奇点，从而得到满意的结果。

4.4 湍流边界层的数值计算

一般说自然界和工程问题中的流体运动大多为湍流，由于其不稳定，变化急剧，又是三维运动，所以一个多世纪来尽管人们花费了大量的精力，但仍未最终解决问题，今后仍有一段漫长的道路要走。为此本节拟简单介绍一些有关的情况。

湍流计算作为工程应用一般采用模型计算，所以模型计算是这里要讨论的一个重要内容。另外由于计算机的迅速发展，直接求解 NS 方程或大涡模拟的方法也开始成为湍流研究的一个重要方面，为此本节也将介绍大涡模拟的基本思想。

目前在工程中使用最广泛的是 k-ε 模型。具体形式如下：

关于统计平均量的方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} v_i\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \sum_{j=1}^{3}\tau_{ij} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\,\overline{v'_i v'_j}}{\partial x_j}\\
&\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = -\left[\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \overline{T}\bar{v}_j}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\,\overline{T' v'_j}}{\partial x_j}\right] + \frac{R}{\rho c_V}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_j^2} + \frac{8}{C_v} + \frac{1}{\rho c_V}\overline{\Phi}\\
&\qquad \approx -\sum_{j=1}^{3}\left[\bar{v}_j\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{c_\mu}{pr_t}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}\right)\right] + \frac{R}{\rho c_V}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_j^2}\\
&k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\overline{v'_i v'_i}\\
&\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\bar{v}_j\frac{\partial k}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_l}\left[c_k\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial k}{\partial x_l} + \nu\frac{\partial k}{\partial x_l}\right] - \sum_{i,l=1}^{3}\overline{v'_i v'_l}\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_l} - \varepsilon\\
&\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\bar{v}_j\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_l}\left[c_\varepsilon\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} + \nu\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l}\right] - c_{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon}{k}\overline{v'_i v'_l}\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_l} - c_{\varepsilon_2}\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)\varepsilon
\end{aligned}\right\}$$

(C.4.4.1)

显然上述方程仍然比较复杂。因为人们感兴趣的是定常情况的计算，所以起始条件影响不大，计算时可以这样进行：对前 3 式可以按一般关于 $\bar{v}$、$\bar{T}$ 的方法求解，而其中用到 k、ε 时可用最后两式得到，当时间足够长以后，只要解稳定，定常状态的解就找到了。

另一种工程中广泛应用的方法是边界层方法。因为人们感兴趣的是物体受力的大小，物体表面的热交换，对远流场的兴趣不大，因此边界层方程的求解就特别有意义。边界层方程是用于描述薄剪切层的方程，对二维平面不可压定常流动的湍流边界层方程可以简单地写成

$$\left.\begin{aligned}&\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\varepsilon_m)\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right]\\&\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}=0\\&\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{C.4.4.2}$$

内层 $0\leqslant y\leqslant y_c$

$$\varepsilon_m=l^2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\gamma_{tr}$$ （γ_{tr} 为间歇因子，由经验公式计算，不计时，取值 1）

$$\left.\begin{aligned}&l=ky[1-\exp(-y/A)]\\&k=0.41,\ A=A^{-}\frac{\nu}{N}u_{\tau}^{-1},\ A^{-}=26\\&N=\left\{\frac{p_{i}^{-}}{v_{w}^{-}}[1-\exp(11.8v_{w}^{-})]+\exp(11.8v_{w}^{-})\right\}^{1/2}\\&p^{-}=\frac{\nu u_e}{u_\tau^3}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x}\quad\text{（压力梯度系数）}\\&v_{w}^{-}=v_w/u_\tau\\&v_w=0\text{ 时}\qquad N=(1-11.8p^{-})^{1/2}\\&\text{外层 }\delta\geqslant y\geqslant y_c\qquad \varepsilon_m=\alpha\left|\int_0^{\infty}(u_e-\bar{u})\mathrm{d}y\right|\gamma_{tr}\\&Re_\theta\geqslant 5000\text{ 时},\ \varepsilon_m=0.0168u_e\delta^*\\&Re_\theta<5000\text{ 时},\ \alpha=0.168\frac{1.55}{1+\Pi}\\&\Pi=0.55[1-\exp(-0.243z_1^{1/2}-0.298z_1)]\\&z_1=Re_\theta/425-1\end{aligned}\right\}\tag{C.4.4.3}$$

由内外层的 ε_m 相等来确定 y_c。

另外，为讨论传热问题，需要有热边界层方程

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{R}{\rho c_V}+\varepsilon_T\right)\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}\right]+(\nu+\varepsilon_m)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2\tag{C.4.4.4}$$

其形式与动力学方程相似，其中

$$\varepsilon_T=\frac{\varepsilon_m}{Pr_t}\tag{C.4.4.5}$$

Pr_t 为湍流的 Prandtl 数，它与 Pr 的关系如下表

Pr	0.001	0.003	0.01	0.03	0.1	0.7	1.0	10.0
Pr_t	36.0	12.0	3.95	2.08	1.46	1.15	1.12	1.03

上表对液态金属比较正确。对于气体取 $Pr_t \widetilde{<} 1$，可近似取 $Pr_t \sim 1$。

如果考虑对流换热情况，还应把对流部分(由于温差引起的)加入。这里不详加讨论。

现在所得的方程由于简化而变成抛物型，计算可以沿 x 方向推进。可以用过去介绍的差分格式，只需将 x 看作时间方向就行。这里介绍另一种效率比较高的 Keller 提出的 Box 方法。这一方法的要点如下。

首先将方程化为一阶方程组，用中心差分法写出差分方程，对于非线性部分加以线性化并写成矩阵形式，最后用消去法解方程组。为了说明 Box 方法的具体作法，先以热传导方程为例。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv u'' \tag{C.4.4.6}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= a \\ u(x,L) &= b \end{aligned}\right\} \tag{C.4.4.7}$$

首先将(C.4.4.6)式化成两个一阶方程

$$\left.\begin{aligned} u' &= g \\ g' &= \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{C.4.4.8}$$

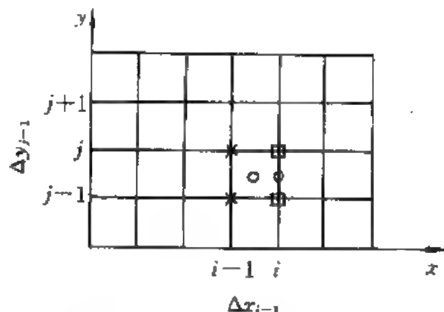


图 C.4.26

用中心差分写出差分方程

$$(u')_{i,j-\frac{1}{2}} = g_{i,j-\frac{1}{2}}$$

或

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y_{j-1}} = \frac{1}{2}(g_{i,j} + g_{i,j-1}) \tag{C.4.4.9}$$

以及

$$(g')_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$$

参看图 C.4.26，可以写出

$$\frac{1}{2}(g'_{i,j-\frac{1}{2}} + g'_{i-1,j-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j-1}\right]$$

它的中心差分格式为

$$\frac{g_{i,j} - g_{i,j-1}}{\Delta y_{j-1}} + \frac{g_{i-1,j} - g_{i-1,j-1}}{\Delta y_{j-1}} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1}} + \frac{u_{i,j-1} - u_{i-1,j-1}}{\Delta x_{i-1}}$$

经整理可得

$$g_{i,j} - g_{i,j-1} - \frac{\Delta y_{j-1}}{\Delta x_{i-1}}(u_{i,j} + u_{i,j-1}) = -(g_{i-1,j} - g_{i-1,j-1}) - \frac{\Delta y_{j-1}}{\Delta x_{i-1}}(u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1}) \tag{C.4.4.10}$$

(C.4.4.9)式可以改写为

$$u_{i,j} - u_{i,j-1} - \frac{\Delta y_{j-1}}{2}(g_{i,j} + g_{i,j-1}) = 0 \tag{C.4.4.11}$$

或移 j 到 $j+1$ 点得

$$u_{i,j-1} - u_{i,j} - \frac{\Delta y_j}{2}(g_{i,j-1} + g_{i,j}) = 0 \tag{C.4.4.12}$$

将(C.4.4.10)与(C.4.4.12)两式合在一起，写成矩阵形式得到

$$
\begin{pmatrix} -\dfrac{\Delta y_{j-1}}{\Delta x_{i-1}} & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ g \end{pmatrix}_{i,j-1} + \begin{pmatrix} -\dfrac{\Delta y_{j-1}}{\Delta x_{i-1}} & 1 \\ -1 & -\dfrac{\Delta y_j}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ g \end{pmatrix}_{i,j} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\dfrac{\Delta y_j}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ g \end{pmatrix}_{i,j+1} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}_{i,j}
$$

$$
(j = 2,3,\cdots,J-1) \tag{C.4.4.13}
$$

其中
$$
r_{i,j} = -(g_{i-1,j} - g_{i-1,j-1}) - \frac{\Delta y_{j-1}}{\Delta x_{i-1}}(u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1}) \tag{C.4.4.14}
$$

(C.4.4.13)可进一步简写为

$$
B_j^{(i)} V_{j-1}^{(i)} + A_j^{(i)} V_j^{(i)} + C_j^{(i)} V_{j-1}^{(i)} = R_j^{(i)} \tag{C.4.4.15}
$$

这里(i)为第i列，应当注意对每一个i列都有一个这样的方程，现在我们将同一列的方程合在一起得到一组3对角块矩阵：

$$
\begin{bmatrix}
A_1 & C_1 & & & & & & \\
B_2 & A_2 & C_2 & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & B_{j-1} & A_{j-1} & C_{j-1} & & & \\
 & & & B_j & A_j & C_j & & \\
 & & & & B_{j+1} & A_{j+1} & C_{j+1} & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & & & B_{J-1} & A_{J-1} & C_{J-1} \\
 & & & & & & B_J & A_J
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{j-1} \\ V_j \\ V_{j+1} \\ \vdots \\ V_{J-1} \\ V_J \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{j-1} \\ R_j \\ R_{j+1} \\ \vdots \\ R_{J-1} \\ R_J \end{bmatrix}
\tag{C.4.4.16}
$$

其中

$$
\left.
\begin{aligned}
& A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -\dfrac{\Delta y_1}{2} \end{pmatrix}, \qquad A_J = \begin{pmatrix} -\dfrac{\Delta y_{J-1}}{\Delta x_{i-1}} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
& A_j = \begin{pmatrix} -\dfrac{\Delta y_{j-1}}{\Delta x_{i-1}} & 1 \\ -1 & -\dfrac{\Delta y_j}{2} \end{pmatrix} \qquad j = 1,2,\cdots,J-1 \\
& B_j = \begin{pmatrix} -\dfrac{\Delta y_{j-1}}{\Delta x_{i-1}} & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad j = 1,2,\cdots,J \\
& C_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\dfrac{\Delta y_j}{2} \end{pmatrix} \qquad j = 1,2,\cdots,J-1 \\
& R_j = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}_j \quad r_{1,1} = a \\
& \qquad r_{1,j} = -(g_{i-1,j} - g_{i-1,j-1}) - \frac{\Delta y_{j-1}}{\Delta x_{i-1}}(u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1}) \quad j = 2,3,\cdots,J \\
& \qquad r_{2,j} = 0, \quad j = 1,2,\cdots,J-1 \\
& \qquad r_{2,J} = b
\end{aligned}
\right\}
\tag{C.4.4.17}
$$

(C.4.4.16)式可进一步简写为

$$AV = R \tag{C.4.4.18}$$

可以用追赶法来求解,但用 LU 分解法更合适。即将 A 分解为

$$A = LU \tag{C.4.4.19}$$

使

$$L = \begin{pmatrix} I & & & 0 \\ \Gamma_2 & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \Gamma_J & I \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \Delta_1 & C_1 & & 0 \\ & \Delta_2 & C_2 & \\ & & \ddots & C_{J-1} \\ 0 & & & \Delta_J \end{pmatrix} \tag{C.4.4.20}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad & \Delta_1 = A_1 \\ \Gamma_j \Delta_{j-1} = B_j \quad & j = 2,3,\cdots,J \\ \Delta_j = A_j - \Gamma_j C_{j-1} \quad & j = 2,3,\cdots,J \end{aligned}\right\} \tag{C.4.4.21}$$

于是(C.4.4.18)式可以改写为

$$LUV = R$$

或

$$V = U^{-1}L^{-1}R \tag{C.4.4.22}$$

由于该式的计算过程很方便,所以 V 的计算就很容易了。

以上我们已将 Box 方法的基本步骤介绍了,由于方程是线性的,所以没有线性化的过程。

下面我们讨论边界层方程的 Box 方法。由于这里有两个变量 u,v,所以人们引入 Falkner—Skan 变换:

$$\eta = \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}}\,y, \quad \xi = x \tag{C.4.4.23}$$

定义流函数 ψ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \tag{C.4.4.24}$$

并设

$$\psi = \sqrt{u_e \nu x}\, f(\xi, \eta) \tag{C.4.4.25}$$

故有

$$\left.\begin{aligned} u &= u_e f' \\ v &= -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\sqrt{u_e \nu \xi}\, f\right] + \frac{\eta}{2}\left(\frac{u_e \nu}{x}\right)^{1/2} f' \end{aligned}\right\} \tag{C.4.4.26}$$

其中 f' 为 $\partial f/\partial \eta$,代入边界层方程(C.4.4.2)式,对于层流 $\varepsilon_m = 0$,可得方程

$$(bf'')' + \frac{m+1}{2} f f'' + m[1 - (f')^2] = \xi\left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi}\right) \tag{C.4.4.27}$$

其中 $b = 1 + \varepsilon_m/\nu$,$m$ 为无量纲压力梯度参数,定义为

$$m = \frac{x}{u_e}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}x} \tag{C.4.4.28}$$

u_e 为边界层外缘的速度。

采用 Falkner-Skan 变换的主要优点是能使层流边界层变换后的厚度沿流向基本不变。湍流边界层的厚度变化也不大,从而有可能沿流向采用较大的步长。

对于层流边界层,当然 $y = 0$ 处 $u = v = 0$,但对于湍流边界层一般不取 $y = 0$ 处的边界条件,而取粘性底层外缘,如 $y^+ = yu_\tau/\nu = 50$ 处,这时边界条件为

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&u|_{y^+=50} = u_\tau\left[\frac{1}{k}\ln\frac{y_0 u_\tau}{\nu} + 5.2\right] \\
&v|_{y^+=50} = -\frac{u|_{y^+=50}\,y}{u_\tau}\frac{\mathrm{d}u_\tau}{\mathrm{d}x} \\
&\frac{\tau}{\rho} = \frac{\tau_w}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}y + \frac{a^*}{\rho}\frac{\mathrm{d}\tau_w}{\mathrm{d}x}y \quad (y^+ = 50\text{处}) \\
&\tau_w = \rho u_\tau^2 \\
&a^* = \frac{1}{2}\left[k_1(\ln y_0^+)^2 + k_2 y_0^+ + k_3 + \frac{k_4}{y_0^+}\right] \quad (y_0^+ = 50) \\
&k = 0.41,\ k_1 = 5.95,\ k_2 = 13.5,\ k_3 = 15.6,\ k_4 = -6.98\times 10^2
\end{aligned}\right\}
\tag{C.4.4.29}
$$

为求解还要给出起始条件。

层流时，由 $u_e = cx^m$ 时的相似性解的分布曲线给出初值。

湍流时，u 剖面：

$$
\frac{u}{u_e} = \gamma_s\left(\frac{u}{u_e}\right)_{\text{内层}} + (1-\gamma_s)
\tag{C.4.4.30}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{u}{u_e}\right)_{\text{内层}}: y^+ < 4,\ \frac{u}{u_\tau} = \frac{y u_\tau}{\nu} \\
&4 < y^+ < 30,\quad \frac{u}{u_\tau} = c_1 + c_2\ln y^+ + c_3(\ln y^+)^2 + c_4(\ln y^+)^3 \\
&c_1 = 4.19,\ c_2 = -5.75,\ c_3 = 5.11,\ c_4 = -0.767 \\
&y^+ > 30\quad \frac{u}{u_\tau} = 5.50\ln y^+ + 5.45
\end{aligned}\right\}
\tag{C.4.4.31}
$$

γ_s 为间歇因子：

$$
\left.\begin{aligned}
&0 \leqslant \frac{y}{\delta_0} \leqslant 0.05,\ \gamma_s = 1 \\
&0.05 \leqslant \frac{y}{\delta_0} \leqslant 0.3,\ \gamma_s = 1 - 2.64\left(\frac{y}{\delta_0} - 0.05\right)^2 \\
&0.3 \leqslant \frac{y}{\delta_0} \leqslant 0.7,\ \gamma_s = 4.4\left(\frac{y}{\delta_0} - 0.5\right)^3 - 1.85\left(\frac{y}{\delta_0} - 0.5\right) + 0.5 \\
&0.7 \leqslant \frac{y}{\delta_0} \leqslant 0.95,\ \gamma_s = 2.64\left(\frac{y}{\delta_0} - 0.05\right)^2 \\
&\frac{y}{\delta_0} > 0.95,\ \gamma_s = 0.0
\end{aligned}\right\}
\tag{C.4.4.32}
$$

其中 δ_0 是一个随 θ、c_f 和 H 变化的参数，其中 θ 为动量厚度，δ^* 为位移厚度，它们之间的关系为

$$
\frac{\delta^*}{\delta_0}\left(1 - \frac{A_1}{Re_{\delta^*}}\right) = 0.5 + \sqrt{\frac{c_f}{2}}\left[A_4\ln\frac{\delta^*}{\delta_0} - A_3 - A_2\ln\left(Re_{\delta^*}\sqrt{\frac{c_f}{2}}\right)\right]
$$

$$
A_1 = 50.68,\ A_2 = 1.194,\ A_3 = 0.794,\ A_4 = 1.195
\tag{C.4.4.33}
$$

现在有了起始条件，就可以研究 Box 方法的具体作法。首先化为一阶方程，引入

$$\left.\begin{aligned} f' &= u \\ u' &= v \\ (bv)' + \frac{m+1}{2}fv + m(1-u^2) &= \xi\left(u\frac{\partial u}{\partial \xi} - v\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{(C. 4. 4. 34)}$$

边界条件

$$\left.\begin{aligned} f(\xi,0) &= f_w(\xi) \\ u(\xi,0) &= 0 \\ u(\xi,\eta_\infty) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{(C. 4. 4. 35)}$$

所取网格如图 C. 4. 27。设 $\xi_0=0, \xi_i=\xi_{i-1}+\Delta\xi_{i-1}, i=1,2,\cdots,I, \eta_0=0, \eta_j=\eta_{j-1}+\Delta\eta_{j-1}, u, v, f$

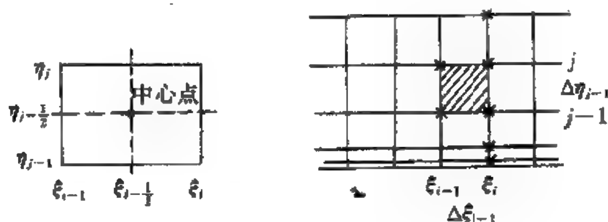


图 C. 4. 27

在 i, j 点的值用 $u_{i,j}, v_{i,j}, f_{i,j}$ 等表示，利用中心差分方法(C. 4. 4. 34)式写为

$$\frac{f_{i,j}-f_{i,j-1}}{\Delta\eta_{j-1}} = u_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{i,j-1}) \quad \text{(C. 4. 4. 36-1)}$$

$$\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\Delta\eta_{j-1}} = v_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{i,j-1}) \quad \text{(C. 4. 4. 36-2)}$$

第 3 式是关于图 C. 4. 27 的中心点写出的

$$\frac{1}{2}(L_i+L_{i-1})_{j-\frac{1}{2}} = \left\{\xi_{i-1}\left[u_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta\xi_{i-1}} - v_{i-\frac{1}{2}}\frac{f_i-f_{i-1}}{\Delta\xi_{i-1}}\right]\right\}_{j-\frac{1}{2}} \quad \text{(C. 4. 4. 36-3)}$$

其中

$$L_{i,j-\frac{1}{2}} = \left\{\left[\frac{(bv)_j-(bv)_{j-1}}{\Delta\eta_{j-1}}\right]_i + \left[\frac{m+1}{2}(fv)_i + m(1-u^2)_i\right]_{j-\frac{1}{2}}\right\} \quad \text{(C. 4. 4. 37)}$$

或将(C. 4. 4. 36)式改写为

$$f_{i,j} - f_{i,j-1} - \frac{\Delta\eta_{j-1}}{2}(u_{i,j}+u_{i,j-1}) = 0 \quad \text{(C. 4. 4. 38)}$$

$$u_{i,j} - u_{i,j-1} - \frac{\Delta\eta_{j-1}}{2}(v_{i,j}+v_{i,j-1}) = 0 \quad \text{(C. 4. 4. 39)}$$

$$(bv)_{i,j} - (bv)_{i,j-1} + \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2}\{(fv)_{i,j}+(fv)_{i,j-1}\} + m\{(1-u^2)_{i,j}+(1-u^2)_{i,j-1}\}\right]$$

$$\Delta\eta_{j-1} \quad \frac{1}{2}\xi_{i-1}\frac{\Delta\eta_{j-1}}{\Delta\xi_{i-1}}(u^2_{i,j}+u^2_{i,j-1}) + \frac{1}{2}\xi_{i-1}\frac{\Delta\eta_{j-1}}{\Delta\xi_{i-1}}\{v_{i,j}f_{i,j} + v_{i-1,j}f_{i,j} - v_{i,j}f_{i-1,j}\}$$

$$+\{v_{i,j-1}f_{i,j}+v_{i-1,j-1}f_{i,j-1}-v_{i,j-1}f_{i-1,j-1}\}]=-L_{i-1,j-\frac{1}{2}}\Delta\eta_{j-1}$$

$$-\xi_{i-1}\frac{\Delta\eta_{j-1}}{\Delta\xi_{i-1}}\frac{u_{i-1}^2+u_{i-1,j-1}^2}{2}+\xi_i\frac{\Delta\eta_{j-1}}{\Delta\xi_{i-1}}\frac{v_{i-1,j-1}f_{i-1,j-1}+v_{i-1,j}f_{i-1,j}}{2} \quad (C.4.4.40)$$

由于方程非线性，用牛顿法求解。由于 $i-1$ 列已知，所以要解的是 i 列，设 i 列的 f,u,v 的 k 次值为 $f^{(k)},u^{(k)},v^{(k)}$，又设

$$f^{(k+1)}=f^{(k)}+\delta f^{(k)},\quad u^{(k+1)}=u^{(k)}+\delta u^{(k)},\quad v^{(k+1)}=v^{(k)}+\delta v^{(k)} \quad (C.4.4.41)$$

将它们代入(C.4.4.38—40)式，并略去 $\delta f,\delta u,\delta v$ 的高阶量，可以得到

$$\delta f_{i,j}^{(k)}-\delta f_{i,j-1}^{(k)}-\frac{\Delta\eta_{j-1}}{2}(\delta u_{i,j}^{(k)}+\delta u_{i,j-1}^{(k)})$$

$$=-(f_{i,j}^{(k)}-f_{i,j-1}^{(k)})+\frac{\Delta\eta_{j-1}}{2}(u_{i,j}^{(k)}+u_{i,j-1}^{(k)})\overset{\text{记作}}{=\!=}(r_1)_{i,j}^{(k)} \quad (C.4.4.42\text{-}1)$$

$$b\delta v_{i,j}^{(k)}-b\delta v_{i,j-1}^{(k)}+\frac{1}{2}\Big[\frac{m+1}{2}(f_{i,j}^{(k)}\delta v_{i,j}^{(k)}+v_{i,j}^{(k)}\delta f_{i,j}^{(k)}+f_{i,j-1}^{(k)}\delta v_{i,j-1}^{(k)}$$

$$+v_{i,j-1}^{(k)}\delta f_{i,j-1}^{(k)})-2m(u_{i,j}^{(k)}\delta u_{i,j}^{(k)}+u_{i,j-1}^{(k)}\delta u_{i,j-1}^{(k)})\Big]\Delta\eta_{j-1}-\xi_{i-1}\frac{\Delta\eta_{j-1}}{\Delta\xi_{i-1}}(u_{i,j}^{(k)}\delta u_{i,j}^{(k)}$$

$$+u_{i,j-1}^{(k)}\delta u_{i,j-1}^{(k)})+\frac{\xi_{i-1}}{2}\frac{\Delta\eta_{j-1}}{\Delta\xi_{i-1}}[v_{i,j}^{(k)}\delta f_{i,j}^{(k)}+f_{i,j}^{(k)}\delta v_{i,j}^{(k)}+v_{i-1,j}\delta f_{i,j}^{(k)}-f_{i-1,j}\delta v_{i,j}^{(k)}$$

$$+v_{i,j-1}^{(k)}\delta f_{i,j-1}^{(k)}+f_{i,j-1}^{(k)}\delta v_{i,j-1}^{(k)}+v_{i-1,j-1}\delta f_{i,j-1}^{(k)}-f_{i-1,j}\delta v_{i,j-1}^{(k)}]$$

$$=-L_{i-1,j-\frac{1}{2}}\Delta\eta_{j-1}-\xi_{i-1}\frac{\Delta\eta_{j-1}}{\Delta\xi_{i-1}}\frac{u_{i-1,j}^2+u_{i-1,j-1}^2}{2}+\xi_i\frac{\Delta\eta_{i-1}}{\Delta\xi_{i-1}}\frac{v_{i-1,j-1}^{(k)}f_{i-1,j-1}+v_{i-1,j}f_{i-1,j}}{2}$$

$$-\Big\{(bv)_{i,j}^{(k)}-(bv)_{i,j-1}^{(k)}+\frac{1}{2}\Big[\frac{m+1}{2}\{(fv)_{i,j}^{(k)}+(fv)_{i,j-1}^{(k)}\}$$

$$+m\{(1-u^2)_{i,j}^{(k)}+(1-u^2)_{i,j-1}^{(k)}\}\Big]\Delta\eta_{j-1}-\frac{1}{2}\xi_{i-1}\frac{\Delta\eta_{j-1}}{\Delta\xi_{i-1}}(u_{i,j}^{(k)^2}+u_{i,j-1}^{(k)^2})$$

$$+\frac{1}{2}\xi_{i-1}\frac{\Delta\eta_{j-1}}{\Delta\xi_{i-1}}[(v_{i,j}^{(k)}f_{i,j}^{(k)}+v_{i-1,j}f_{i,j}^{(k)}-v_{i,j}^{(k)}f_{i-1,j})+(v_{i,j-1}^{(k)}f_{i,j-1}^{(k)}+v_{i-1,j-1}^{(k)}f_{i,j-1}^{(k)}$$

$$-v_{i,j-1}^{(k)}f_{i-1,j-1})]\overset{\text{记作}}{=\!=}(r_2)_{i,j}^{(k)} \quad (C.4.4.42\text{-}2)$$

(C.4.4.39)式的 j 下标加1，有

$$\delta u_{i,j+1}-\delta u_{i,j}-\frac{\Delta\eta_j}{2}(\delta v_{i,j+1}+\delta v_{i,j})$$

$$=-(u_{i,j+1}^{(k)}-u_{i,j}^{(k)})+\frac{\Delta\eta_j}{2}(v_{i,j+1}^{(k)}+v_{i,j}^{(k)})\overset{\text{记作}}{=\!=}(r_3)_{i,j}^{(k)} \quad (C.4.4.42\text{-}3)$$

将(C.4.4.42)写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2}\Delta\eta_{j-1} & 0 \\ \frac{m+1}{4}v_{i,j-1}^{(k)}\Delta\eta_{j-1}+\frac{\xi_{i-1}}{2}\frac{\Delta\eta_{j-1}}{\Delta\xi_{i-1}}(v_{i,j-1}^{(k)}+v_{i-1,j-1}) & -mu_{i,j-1}^{(k)}\Delta\eta_{j-1}-\xi_{i-1}\frac{\Delta\eta_{j-1}}{\Delta\xi_{i-1}}u_{i,j-1}^{(k)} & -b+\frac{m+1}{4}f_{i,j-1}^{(k)}+\frac{\xi_{i-1}}{2}\frac{\Delta\eta_{j-1}}{\Delta\xi_{i-1}}(f_{i,j-1}^{(k)}-f_{i-1,j}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta f_i \\ \delta u_i \\ \delta v_i\end{Bmatrix}_{j-1}$$

$$+\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\Delta\eta_{j-1} & 0 \\ \frac{m+1}{4}v_{i,j}^{(k)}\Delta\eta_{j-1}+\frac{\xi_{i-1}}{2}\frac{\Delta\eta_{j-1}}{\Delta\xi_{i-1}}(v_{i,j}^{(k)}+v_{i-1,j}) & -mu_{i,j}^{(k)}\Delta\eta_{j-1}-\xi_{i-1}\frac{\Delta\eta_{j-1}}{\Delta\xi_{i-1}}u_{i,j}^{(k)} & b+\frac{m+1}{4}f_{i,j}^{(k)}\Delta\eta_{i-1}+\frac{\xi_{i-1}}{2}\frac{\Delta\eta_{j-1}}{\Delta\xi_{i-1}}(f_{i,j}^{(k)}-f_{i-1,j}) \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2}\Delta\eta_{j-1} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta f_i \\ \delta u_i \\ \delta v_i\end{Bmatrix}_{j}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-\Delta\eta_j}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta f_i \\ \delta u_i \\ \delta v_i\end{Bmatrix}_{j+1}=\begin{Bmatrix}r_1 \\ r_2 \\ r_3\end{Bmatrix}_{i,j}^{(k)} \tag{C.4.4.43}$$

或进一步简写为

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2}\Delta\eta_{j-1} & 0 \\ S_{i,j,1}^{(k)} & S_{i,j,2}^{(k)} & S_{i,j,3}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta f_i \\ \delta u_i \\ \delta v_i\end{Bmatrix}_{j-1}+\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\Delta\eta_{j-1} & 0 \\ S_{i,j,4}^{(k)} & S_{i,j,5}^{(k)} & S_{i,j,6}^{(k)} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2}\Delta\eta_{j-1} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta f_i \\ \delta u_i \\ \delta v_i\end{Bmatrix}_{j}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\Delta\eta_{j-1} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta f_i \\ \delta u_i \\ \delta v_i\end{Bmatrix}_{j+1}=\begin{Bmatrix}r_1 \\ r_2 \\ r_3\end{Bmatrix}_{i,j}^{(k)} \tag{C.4.4.44}$$

或

$$B_j^{(k)}\delta V_{j-1}+A_j^{(k)}\delta V_j+C_j^{(k)}\delta V_{j+1}=\delta R_j \quad (j=2,3,\cdots,J-1) \tag{C.4.4.45}$$

其中

$$\delta V_j=\{\delta f_i, \quad \delta u_i, \quad \delta v_i\}_j^{\mathrm{T}} \tag{C.4.4.46}$$

计及边界条件(C.4.4.35)式则有

$$\left.\begin{aligned}
&A_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -\frac{1}{2}\Delta\eta_{J-1}\end{bmatrix},\quad C_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\Delta\eta_{J-1}\end{bmatrix}\\
&B_J=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\Delta\eta_{J-1} & 0\\ S_{i,J,1}^{(k)} & S_{i,J,2}^{(k)} & S_{i,J,3}^{(k)}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad A_J=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\Delta\eta_{J-1} & 0\\ S_{i,J,4}^{(k)} & S_{i,J,5}^{(k)} & S_{i,J,6}^{(k)}\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\\
&\delta R_1=\begin{pmatrix}f_w\\ 0\\ r_3\end{pmatrix}_{i,1},\qquad \delta R_J=\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\\ 1\end{pmatrix}_{i,J}^{(k)}
\end{aligned}\right\}\tag{C.4.4.47}$$

最后 $j=1,2,\cdots,J$ 的方程(C.4.4.45)合在一起便得到一个三对角块矩阵。

$$\begin{bmatrix}A_1 & C_1 & & & \\ B_2 & A_2 & C_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & B_{J-1} & A_{J-1} & C_{J-1}\\ & & & B_J & A_J\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta V_1\\ \delta V_2\\ \vdots\\ \delta V_{J-1}\\ \delta V_J\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_{J-1}\\ R_J\end{bmatrix},\tag{C.4.4.48}$$

或

$$A\delta V=R\tag{C.4.4.49}$$

其解法与前相同，不再详述。该方程得到 $\delta V^{(k)}$后，

$$V^{(k+1)}=V^{(k)}+\delta V^{(k)}$$

然后再重新计算 A_j,B_j,C_j 直到 $\delta V^{(k)}$足够小为止，这个过程对于不同的 i 向前推进计算就可以了。

对于能量方程，基本方程是(C.4.4.4)式，这里 u,v 都是已知的，所以是一个关于 T 的线性方程，其求解过程读者易于通过前面的讨论而自行得到，这里不再赘述。

用上述方法对圆柱表面边界层进行计算，并计算了表面摩擦系数。考虑间歇因子，可以看出计算和实验还是吻合得很好的(参看图 C.4.28)。图

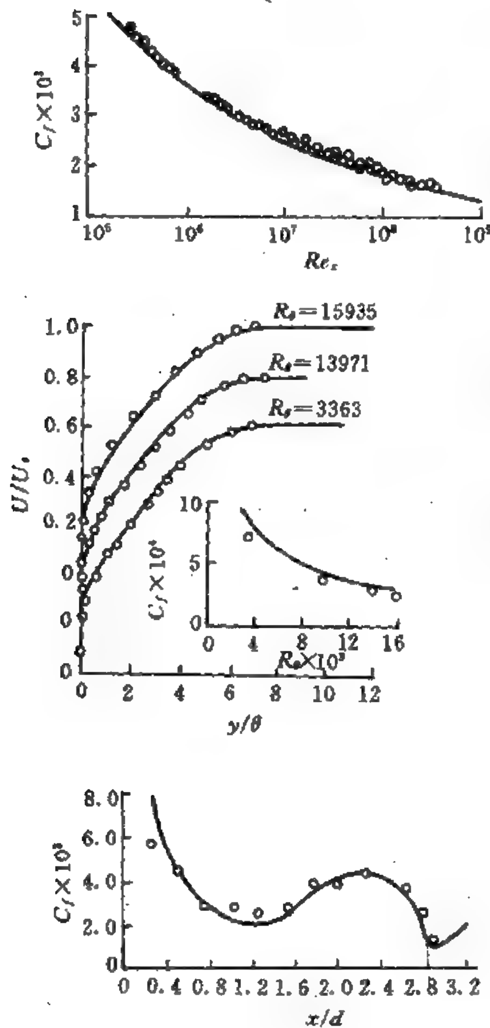


图 C.4.28

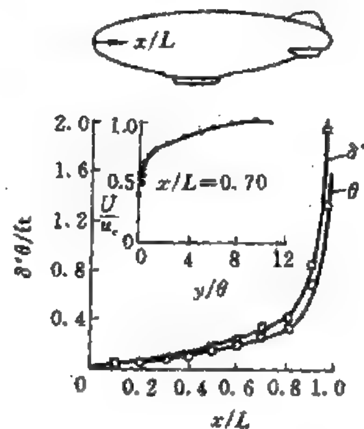


图 C.4.29

C.4.29 显示了这一方法的计算结果。

4.5 湍流运动的大涡模拟

上节介绍的边界层计算是工程上常用的方法，本节将介绍的是湍流运动的高级数值模拟——大涡模拟。这是一种近十几年发展起来的具有一定应用前景的研究湍流的数值计算方法。

众所周知，湍流研究的最好数值模拟方法是直接求解 NS 方程。但为了细致地描写湍流的时间和空间变化、计算的节点数和时间步数之乘积为 $Re^{11/4}$，计算机的容量也需要 $Re^{9/4}$ 的量级。对于中等大小的 $Re(\sim10^4)$，计算量和占用内存已经十分可观，目前的计算机已难已承受。因此用直接求解 NS 方程的方法来研究湍流实际上还不可能，为此大涡模拟应运而生。

大涡模拟的基本思想是，湍流运动是由许多大小不同的漩涡组成的，那些大漩涡对平均流动有比较明显的影响，而那些小漩涡则通过非线性的作用对大尺度运动产生影响。大量的质量、动量、热量、能量交换是通过大涡实现的。小涡的作用表现为耗散。流场的形状、障碍物的存在，对大涡有比较大的影响，使它具有明显的各向不均匀性。小涡则不然，它们有更多的共性和更接近各向同性，因而较易于建立有普遍意义的模型。基于上述物理分析，人们形成了大涡模拟的思想，即把湍流运动分成大尺度运动和小尺度运动。小尺度量通过模型建立与大尺度量的关系。大尺度量通过数值计算得到。很明显，只要尺度足够小，小尺度模型将会具有更多的普遍性，大涡模拟将更加有效。

所谓大尺度量就是通过滤波的方法得到的量，该量与原来量之差即为小尺度量。设 f 为一物理量，G 为滤波函数，大尺度量记作 $\bar{f}$，则

$$\bar{f}(\boldsymbol{r}) = \int G(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|) f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{C.4.5.1}$$

小尺度量为 f'，则有

$$f' = f - \bar{f} \text{ 或 } f = \bar{f} + f' \tag{C.4.5.2}$$

最常见的滤波函数有 3 种：

(1) 高斯滤波函数

$$G(x) = \sqrt{\frac{6}{\pi\Delta}}\mathrm{e}^{-6x^2/\Delta^2} \tag{C.4.5.3}$$

Δ 为滤波尺度，一般与网格尺度相等。

(2) 白噪声滤波函数

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta} & -\dfrac{\Delta}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\Delta}{2} \\ 0 & |x| > \dfrac{\Delta}{2} \end{cases} \tag{C.4.5.4}$$

(3) 富氏截断滤波器

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \tag{C.4.5.5}$$

$$\tilde{G}(R) = \begin{cases} 1 & |k| \leqslant k_c \\ 0 & |k| > k_c \end{cases}$$

目前较多使用的是前两种滤波。不难看出，白噪声滤波实质上就是物理量 f 在 Δ 区间上取平均，高斯滤波的高斯变换仍为自身，对于处理各向同性的量更加方便。上述滤波函数满足归一化条件，且 $x\to\infty$ 时，$G(x)\to0$。

现在我们讨论不可压缩粘性流体的大涡模拟。该流体流动的基本方程为

连续方程
$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{C.4.5.6}$$

动力学方程
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{V} \tag{C.4.5.7}$$

如果采用求和约定，即相同下标是从 1 到 3 求和，则上述基本方程可以写作

连续方程
$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{C.4.5.8}$$

动力学方程
$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (i = 1,2,3) \tag{C.4.5.9}$$

或利用连续性方程，上式可改写为

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (i = 1,2,3) \tag{C.4.5.10}$$

对(C.4.5.8)和(C.4.5.10)进行滤波，可以得到滤波后的方程

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{C.4.5.11}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\bar{v}_i\bar{v}_j}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \nu\frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad \frac{\partial}{\partial x_j}R_{ij} \tag{C.4.5.12}$$

其中

$$R_{ij} = \overline{\bar{v}_i v'_j} + \overline{v'_i \bar{v}_j} + \overline{v'_i v'_j} \tag{C.4.5.13}$$

对于白噪声滤波，则有

$$\bar{v}'_j = \bar{v}'_i = 0, \quad R_{ij} = \overline{v'_i v'_j}, \qquad \overline{\bar{v}_i \bar{v}_j} = \bar{v}_i \bar{v}_j \tag{C.4.5.14}$$

否则记
$$\lambda_{ij} = \overline{\bar{v}_i \bar{v}_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j \tag{C.4.5.15}$$

称它为 Leonard 应力，于是(C.4.5.12)式可改写为

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \nu\frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x_j} \tag{C.4.5.16}$$

对于足够高的 Re 数，湍流存在惯性子区，所以选用的滤波宽度 Δ 应足够小，使 π/Δ 在惯性子区内，同时计算域本身又应大于最大涡的尺度，这样的大涡模拟才是有效的。不过这样会导致网格过多而使计算无法实现，所以 Δ 只能尽可能地小不是无条件的。对于小 Re 数(如处于转换区)不存在惯性区，情况还会复杂一些。

上述方程中 R_{ij}是未知的，λ_{ij}可由$\bar{v}_i\bar{v}_j$ 再作一次高斯滤波得到。R_{ij}又叫拟雷诺应力，它反映了小尺度量对大尺度量的影响。

这样问题就归结为确定小网格模型，即拟雷诺应力与大尺度量之间的关系。

下面介绍小网格模型。

拟雷诺应力反映了小涡和大涡之间的相互作用，总体上说，在大小涡之间存在能量交换，但大涡传给小涡的能量要比小涡给大涡的能量多，所以能量交换属耗散型。

首先将雷诺应力分成各向同性和非均匀两部分

$$R_{ij} = \underset{\text{各向同性}}{(R_{ij})_{\text{iso}}} + \underset{\text{非均匀}}{(R_{ij})_{\text{inhom}}} \tag{C.4.5.17}$$

根据 Bousinesque 假定有

$$(R_{ij})_{\text{iso}} = -\nu_T\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{3}\delta_{ij}(R_{kk})_{\text{iso}} \tag{C.4.5.18}$$

根据 Smagorinsky 作法，对于局部各向同性湍流，如果假定湍流的产生和耗散达到平衡，则有

$$2c_1 q\Delta S_{ij}S_{ij} = q^3/\Delta \qquad q \text{ 为脉动动能}$$

或

$$q = c_3\Delta\sqrt{2S_{ij}\cdot S_{ij}}$$

因而 Smagorinsky 设

$$\nu_T = (c\Delta)^2|S| \tag{C. 4. 5. 19}$$

$$|S| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \qquad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}\right) \tag{C. 4. 5. 20}$$

关于 c 值的选取应当用实验的方法，事实上这很困难，几乎做不到。最常用的方法是用数值计算，即用谱方法直接解各向同性湍流的 N-S 方程，将所得的值来确定 c 值；另一种方法是用统计理论来确定 c 值。

还有一种方法是直接将大涡模拟的方法应用于某些湍流问题，根据计算的结果调整这个 c 值。实际上用解 N-S 方程来得到 c 值时，发现 c 值很分散，相关性只有 0. ，利用统计理论所得的结果与实际情况又相差比较大。计算表明 $c=0.2$ 是较合适的值。

应当指出，ν_T 模型并不是唯一的，如 Schumann 的模型是

$$\nu_T = c(\overline{E}')^{1/2}\Delta \tag{C. 4. 5. 21}$$

而 $\overline{E}'$ 值由关于 $\overline{E}'$ 的方程确定，称之为一个方程模型；Friedrich 和 Schmidt 则用 k-ε 模型来确定 $\overline{E}'$，故叫做两个方程模型。苏铭德又用代数模型来确定 $\overline{E}'$，叫做代数模型。以上几种方法是从不同角度来改进的，事实表明，各向同性部分的模型虽有差别，但不是很敏感的，因此大涡模型的应用将会有比较广阔的前景。

另外还有非均匀部分，这是目前问题比较多的部分，一般利用类似混合长度的模型。Moin 方法是设

$$(R_{ij})_{\text{inhom}} = -2\nu_T^*\langle S_{ij}\rangle \tag{C. 4. 5. 22}$$

$\langle\cdot\rangle$表示时均值。

$$\left.\begin{aligned} &\nu_T^* = c(D\Delta)^2(2\langle S_{ij}\rangle\langle S_{ij}\rangle)^{1/2}, \quad c = 0.065 \\ &D = 1 - \exp\left(-\frac{y^{+2}}{A^{-2}}\right), \quad A^+ = 26, y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \end{aligned}\right\} \tag{C. 4. 5. 23}$$

将以上模型代入(C. 4. 5. 11)和(C. 4. 5. 16)两式得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ &\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \beta_i^*\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2^2} + \frac{1}{Re_\tau}\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}\right) + H_i \\ &\beta^* = (1+\delta_{i2})\langle\nu_T\rangle + \delta_{i1}\nu_T^* + \frac{1}{Re_\tau} \\ &H_i = \delta_{i1} - \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i} - \frac{\partial\,\overline{v_i v_j}}{\partial x_j} - [(1+\delta_{i2})\langle\nu_T\rangle + \delta_{i1}\nu_T^*]\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2^2} \end{aligned}\right\} \tag{C. 4. 5. 24}$$

其中 x_1 和 x_3 沿直槽道的纵向和横向，x_2 为与壁面垂直的方向，上式中 v_i 代替了 $\bar{v}_i$，p 实际是

$$p - \left\langle\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right\rangle x, \left\langle\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right\rangle = \left\langle\frac{2\tau_w}{T}\right\rangle = 2\frac{\rho}{T}u_\tau^2$$

$Re_\tau = \dfrac{u_\tau T}{\nu}$。(C. 4. 5. 24)式用谱方法求解，但在 x_2 方向仍用有限差分法(几何形状及坐标见图 C. 4. 30)。这一方程的求解需要大型计算机，作者在 IBM-4341 机上计算花了 400 小时，在 Cyber-170 机上则要 21 小时，在 ELXSI 机上用了 50 小时。所得结果见图 C. 4. 31 至图 C. 4. 43。关于这些计算的详细讨论可以参考有关文献。

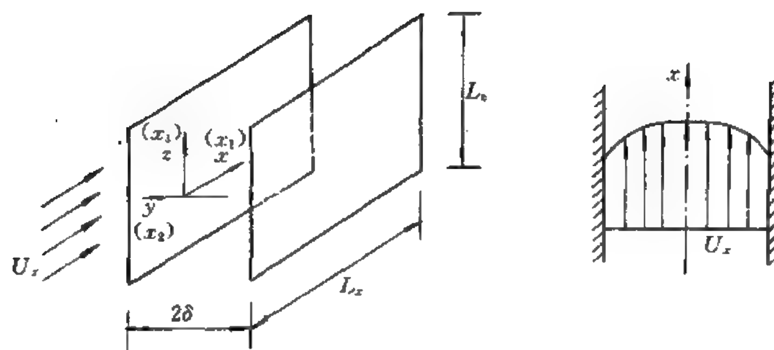


图 C.4.30

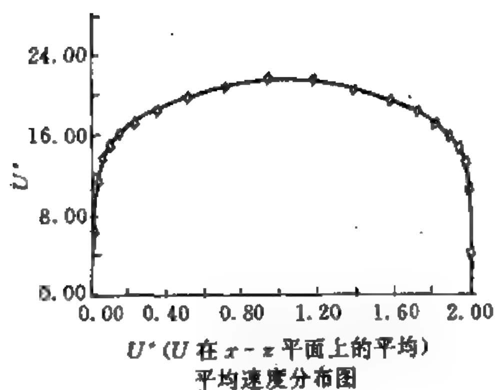


图 C.4.31
平均速度分布图

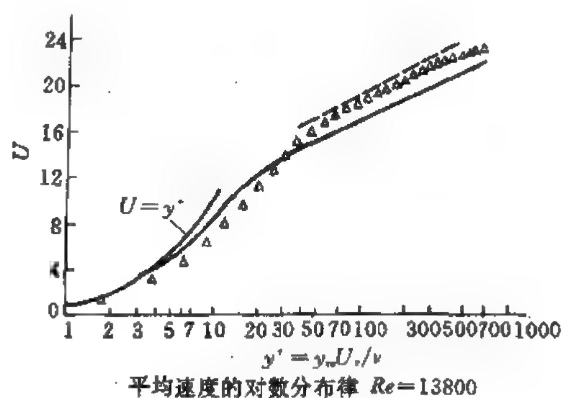


图 C.4.32
平均速度的对数分布

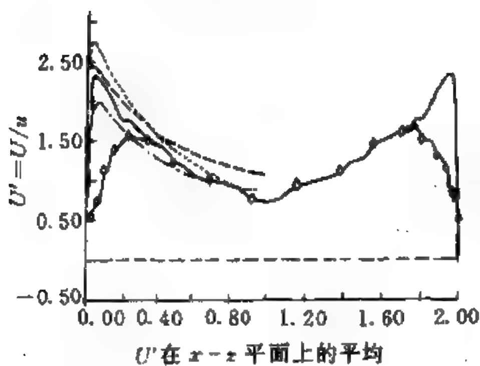


图 C.4.33

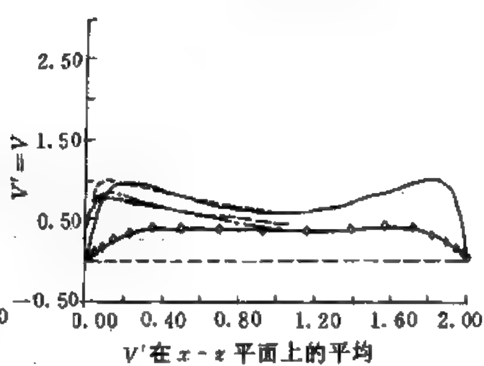


图 C.4.34

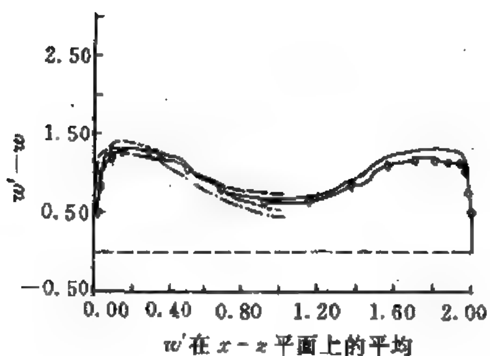


图 C.4.35

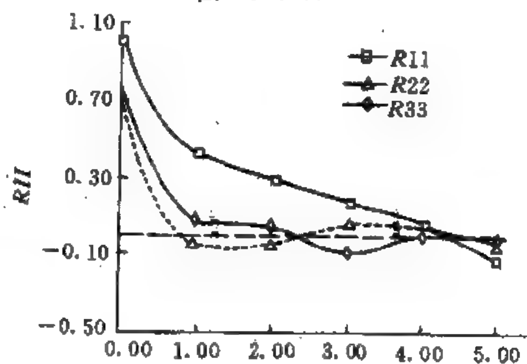


图 C.4.36

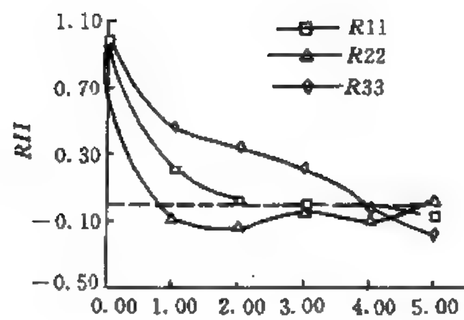
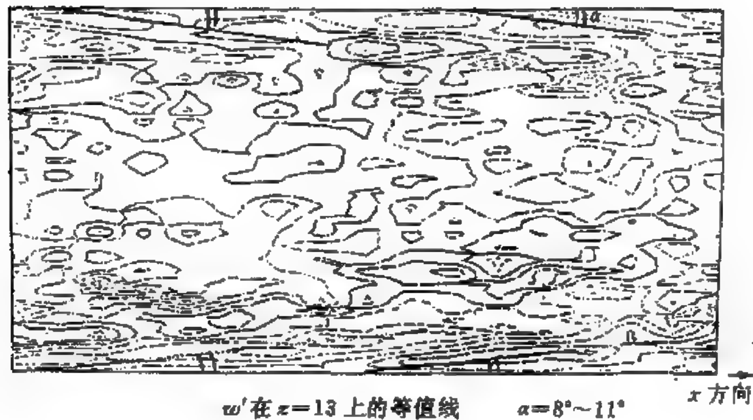


图 C.4.37



w'在 $z=13$ 上的等值线　　$\alpha=8°\sim11°$

13°左右的向前结构

图 C.4.38

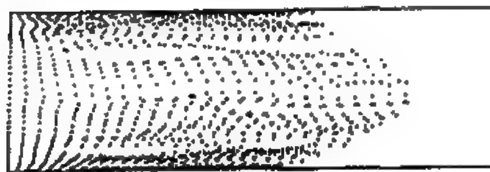


图 C.4.39

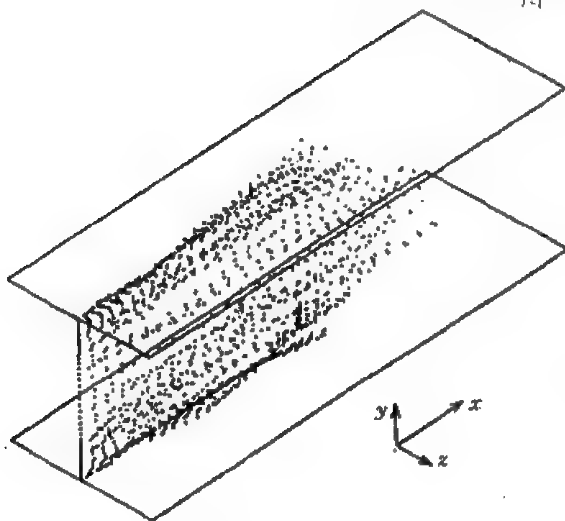


图 C.4.40

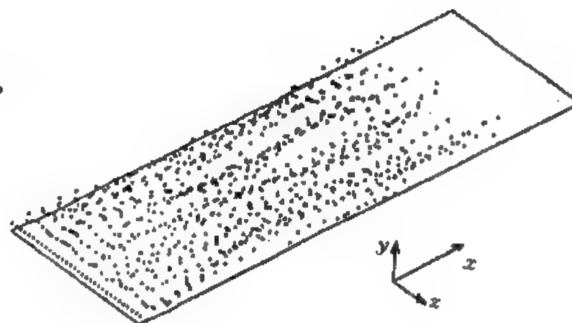
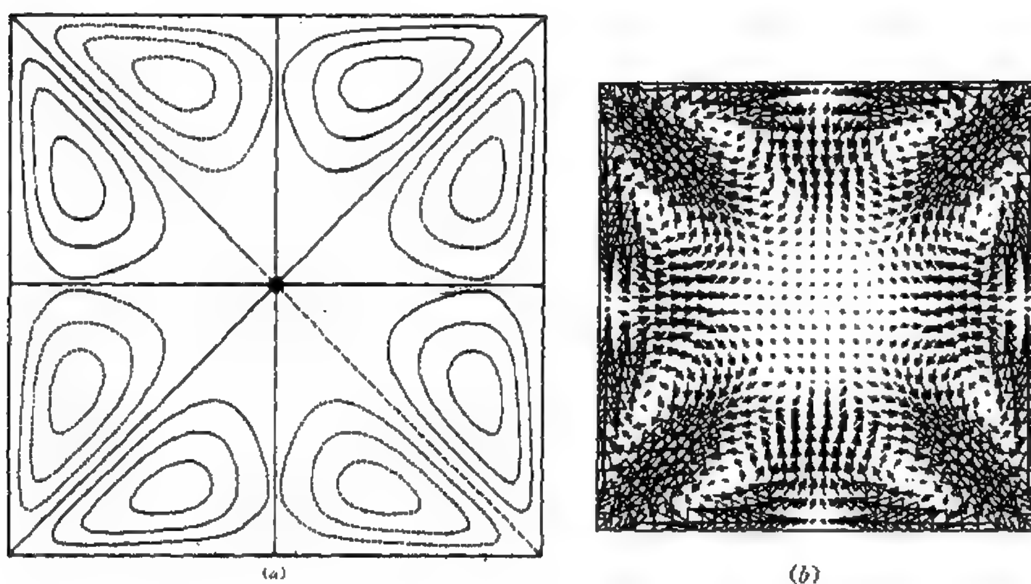


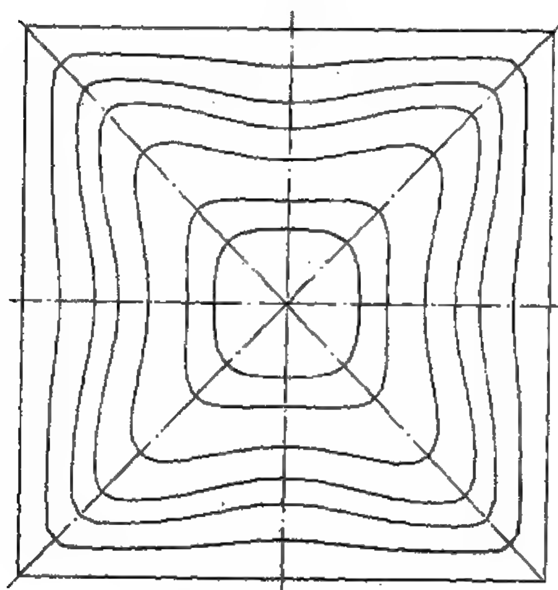
图 C.4.41



(a) (b)

直方管内的时均二次流(a)流线图 (b)速度向量图

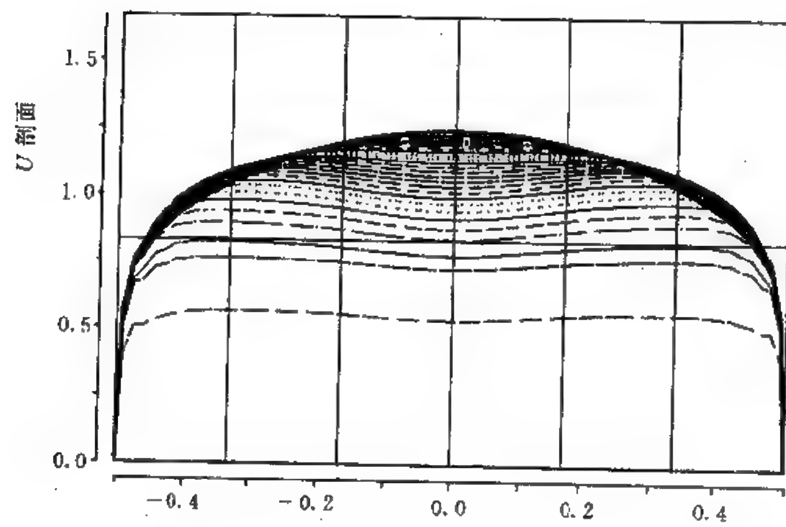
图 C.4.42



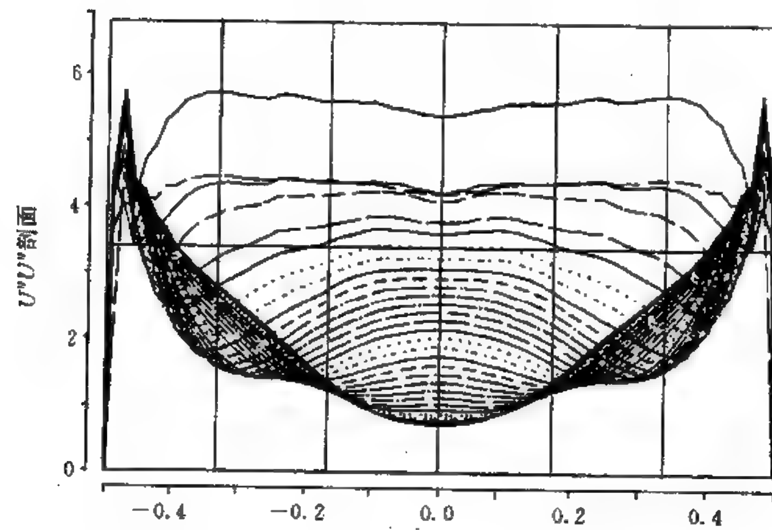
直方管内时均速度<u>等值线图

图 C.4.43

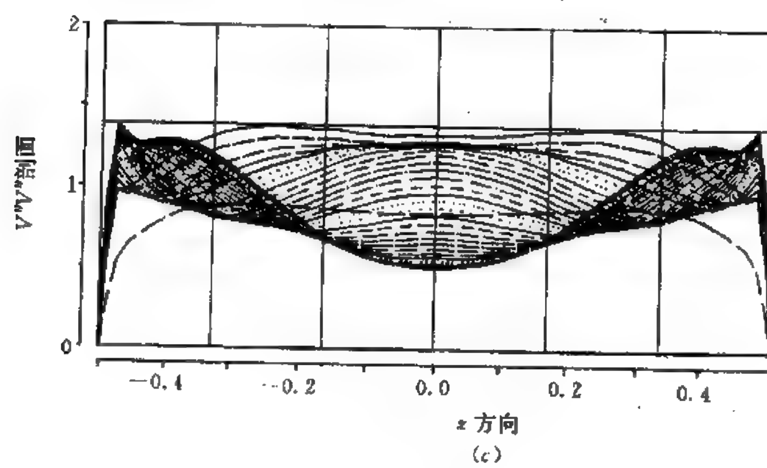
将 Schumann 模型应用于直方管的充分发展湍流的数值模拟得到了很好的结果。对于 Re =69000 的情况进行了长时间的运算，得到平均流动的二次流图形和有关量的分布(见图 C.4.42 至图 C.4.45)。它们与实验吻合得很好。



(a)．y 方向



(b) z 方向



z 方向

(c)

图 C.4.44

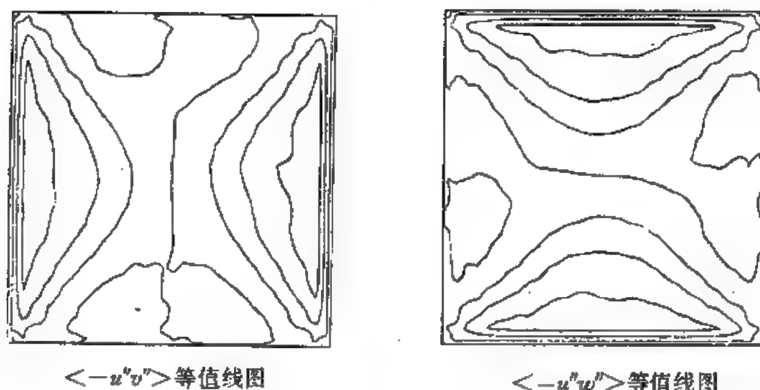


图 C.4.45

4.6 圆柱绕流计算及高 *Re* 数问题

在许多工业设备，如热交换器，核反应堆的蒸汽发生器内等，由于流体流动的不稳定性会激发管道的振动，这种振动对热交换器或蒸汽发生器可能有强烈的破坏作用，因此研究和解决这一问题有非常重要的意义。由于问题的复杂性，目前仍停留在实验研究阶段。近年来人们也开始探索计算机的直接模拟。

作为数值模拟的第1步，就是要模拟单圆柱的绕流，计算其阻力、升力的变化，进而分析圆柱振荡情况下的流场及升力、阻力的变化。此外还有高 *Re* 数问题，湍流问题等。再进一步，则需考虑问题的三维性并与固体的弹性耦合起来。当然这些工作都有待进一步发展。

这里仅介绍单圆柱的高 *Re* 数的绕流问题。并着重介绍高 *Re* 数的处理方法。

坐标系的选用：将不可压无粘性位势流的绕流流线和位势线作为坐标线，显然这是一种贴体坐标，记作 (ξ,η)

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_1 \pm \sqrt[4]{(\xi_1^2-\eta_1^2-a^2)^2+4\xi_1^2\eta_1^2}\cos\theta \\ \eta_1 &= \eta_1 \pm \sqrt[4]{(\xi_1^2-\eta_1^2-a^2)^2+4\xi_1^2\eta_1^2}\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{C.4.6.1}$$

其中 a 为圆柱半径，取 $a=1$，且

$$\theta=\begin{cases}\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{2\xi_1\eta_1}{\xi_1^2-\eta_1^2-a^2} & (\xi_1^2-\eta_1^2-a^2>0)\\[2ex] \dfrac{\pi}{2}+\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{2\xi_1\eta_1}{\xi_1^2-\eta_1^2-a^2} & (\xi_1^2-\eta_1^2-a^2<0)\end{cases} \tag{C.4.6.2}$$

为使物面附近的网格得以加密，引入以下变换

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \mathrm{sign}(\xi)+\mathrm{sh}[\xi-c_1\mathrm{sign}(\xi)]\cdot c_2 \\ \eta_1 &= c\,\mathrm{sign}(\eta)(\mathrm{e}^{\eta}-1)\end{aligned} \tag{C.4.6.3}$$

可取 $c=0.1212728$，$c_1=3.94$，$c_2=\dfrac{1}{\mathrm{sh}(c_1)}=0.0389111$，所得的网格如图 C.4.46 所示。

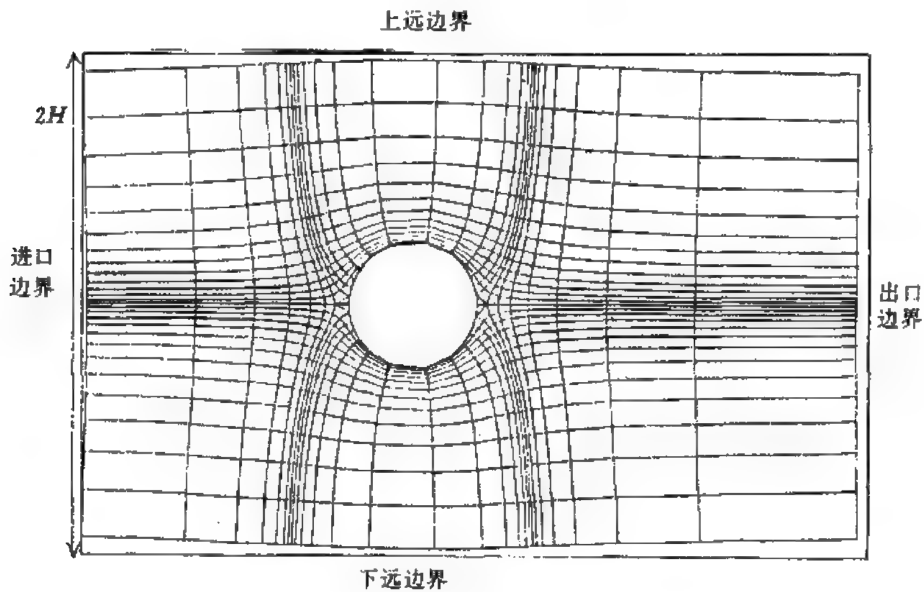


图 C.4.46

出发方程

这里采用流函数—旋度方程，在上述曲线坐标下，方程可以写为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\left[\frac{V_\xi}{H_\xi}-\frac{2}{H_\xi H_\eta}\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{H_\eta}{H_\xi}\right)\right]\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}+\left[\frac{V_\eta}{H_\eta}-\frac{2}{H_\xi H_\eta}\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{H_\xi}{H_\eta}\right)\right]\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$$

$$=\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{2}{Re}\left[\left(\frac{H_\eta}{H_\xi}\right)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2}+\left(\frac{H_\xi}{H_\eta}\right)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}\right] \tag{C.4.6.4}$$

其中
$$H_\xi=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2-\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2},\qquad H_\eta=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} \tag{C.4.6.5}$$

$$V_\xi=\frac{1}{H_\eta}\frac{\partial \psi}{\partial \eta},\qquad V_\eta=-\frac{1}{H_\xi}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \tag{C.4.6.6}$$

$$\frac{1}{H_\xi H_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{H_\eta}{H_\xi}\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{H_\xi}{H_\eta}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)\right]=-\zeta \tag{C.4.6.7}$$

差分格式

由于高 Re 数一般二阶差分格式不能用，因为它的误差可能会大于粘性项本身，为此，计算表明采用三阶和四阶的混合格式比较好。设 L 为差分格式，则

$$L=\lambda L_3+(1-\lambda)L_4 \tag{C.4.6.8}$$

其中
$$\lambda=1-\frac{1}{\exp|V|} \tag{C.4.6.9}$$

三阶迎风格式

$$U_\eta \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \begin{cases} U_{\eta ij} \dfrac{2\zeta_{i-1,j} + 3\zeta_{ij} - 6\zeta_{i-1,j} + \zeta_{i-2,j}}{6\Delta\eta} & U_{\eta ij} > 0 \\ U_{\eta ij} \dfrac{-\zeta_{i+2,j} + 6\zeta_{i+1,j} - 3\zeta_{ij} - 2\zeta_{i-1,j}}{6\Delta\eta} & U_{\eta ij} < 0 \end{cases} \tag{C.4.6.10}$$

$$U_\xi \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \begin{cases} U_{\xi ij} \dfrac{2\zeta_{i,j+1} + 3\zeta_{ij} - 6\zeta_{i,j-1} + \zeta_{i,j-2}}{6\Delta\xi} & U_{\xi ij} > 0 \\ U_{\xi ij} \dfrac{-\zeta_{i,j+2} + 6\zeta_{i,j+1} - 3\zeta_{ij} - 2\zeta_{i,j-1}}{6\Delta\xi} & U_{\xi ij} < 0 \end{cases} \tag{C.4.6.11}$$

其中ξ方向标号为j,η方向标号为i。

或令记为

$$U_\eta \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \frac{U_{\eta ij} + |U_{\eta ij}|}{2} \frac{2\zeta_{i+1,j} + 3\zeta_{ij} - 6\zeta_{i-1,j} + \zeta_{i-2,j}}{6\Delta\eta}$$

$$+ \frac{U_{\eta ij} - |U_{\eta ij}|}{2} \frac{-\zeta_{i+2,j} - 6\zeta_{i+1,j} - 3\zeta_{ij} - 2\zeta_{i-1,j}}{6\Delta\eta} \tag{C.4.6.12}$$

$$U_\xi \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{U_{\xi ij} + |U_{\xi ij}|}{2} \frac{2\zeta_{ij+1} + 3\zeta_{ij} - 6\zeta_{i,j-1} + \zeta_{i,j-2}}{6\Delta\xi}$$

$$+ \frac{U_{\xi ij} - |U_{\xi ij}|}{2} \frac{-\zeta_{i,j+2} + 6\zeta_{i,j-1} - 3\zeta_{ij} - 2\zeta_{i,j-1}}{6\Delta\xi} \tag{C.4.6.13}$$

四阶中心格式为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \frac{-\zeta_{i+2,j} + 8\zeta_{i+1,j} - 8\zeta_{i-1,j} + \zeta_{i-2,j}}{12\Delta\eta} \tag{C.4.6.14}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{-\zeta_{i,j+2} + 8\zeta_{i,j+1} - 8\zeta_{i,j-1} + \zeta_{i,j-2}}{12\Delta\xi} \tag{C.4.6.15}$$

λ中的V分别以U_η和U_ξ代替,所得的λ分别记作λ_ξ和λ_η,而U_η和U_ξ分别为(C.4.6.4)式左端$\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$及$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$的系数。

对于二阶导数项采用中心差分格式

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} = \frac{\zeta_{i+1,j} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i-1,j}}{\Delta\eta^2} \tag{C.4.6.16}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} = \frac{\zeta_{i,j+1} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j-1}}{\Delta\xi^2} \tag{C.4.6.17}$$

时间方向的差分用如下近似

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^n}{\Delta t} \tag{C.4.6.18}$$

空间方向的差分项取在$n+\frac{1}{2}$时间层上。代入动力学方程经整理后可得差分方程

$$c_1\zeta_{i,j}^{n+1} = c_2\zeta_{ij}^n + c_3(\zeta_{i,j+2}^{n+1} + \zeta_{i,j+2}^n) + c_4(\zeta_{i,j+1}^{n+1} + \zeta_{i,j+1}^n) + c_5(\zeta_{i,j-1}^{n+1} - \zeta_{i,j-1}^n)$$

$$+c_6(\zeta_{i,j-2}^{n+1}+\zeta_{i,j-2}^{n})+c_7(\zeta_{i+2,j}^{n+1}+\zeta_{i+2,j}^{n})+c_8(\zeta_{i+1,j}^{n+1}-\zeta_{i+1,j}^{n})$$

$$+c_9(\zeta_{i-1,j}^{n+1}+\zeta_{i-1,j}^{n})+c_{10}(\zeta_{i-2,j}^{n+1}-\zeta_{i-2,j}^{n}) \tag{C.4.6.19}$$

对于边界点则分别只取域内点，域外点略去。上述方程用迭代方法计算。

关于 ψ 方程用中心差分，超松弛迭代，即

$$g_1\frac{\psi_{i,j+1}-2\psi_{i,j}+\psi_{i,j-1}}{\Delta\xi^2}+g_2\frac{\psi_{i+1,j}-2\psi_{i,j}-\psi_{i-1,j}}{\Delta\eta^2}$$

$$+g_3\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2\Delta\xi}+g_4\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2\Delta\eta}=-\zeta_{ij} \tag{C.4.6.20}$$

或改写为

$$\psi_{ij}^{n+1}=(cc1\cdot\psi_{i,j+1}+cc2\cdot\psi_{i,j-1}+cc3\cdot\psi_{i+1,j}+cc4\cdot\psi_{i-1,j}+\zeta_{ij})/cca \tag{C.4.6.21}$$

其中 g_1,g_2,g_3,g_4 分别为(C.4.6.7)式展开后的 $\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2},\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2},\frac{\partial\psi}{\partial\xi},\frac{\partial\psi}{\partial\eta}$ 的系数

边界条件

进口 $\zeta=0 \quad \psi=y+\dot{\delta}x$

上，下边界 $\psi=y+\dot{\delta}x$

物面边界条件

$$\zeta=-g_2\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=\begin{cases}\dfrac{85\psi_{i,j}-108\psi_{i+1,j}+27\psi_{i+2,j}-4\psi_{i+3,j}}{\Delta\eta^2} & \text{上半圆}\\[2ex] \dfrac{85\psi_{i,j}-108\psi_{i-1,j}+27\psi_{i-2,j}-4\psi_{i-3,j}}{\Delta\eta^2} & \text{下半圆}\end{cases} \tag{C.4.6.22}$$

$\psi=0$(采用固定在物面上的坐标系)

上下及出口用边界条件

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{V_\xi}{H_\xi}\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}+\frac{V_\eta}{H_\eta}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}=0 \tag{C.4.6.23}$$

在上远边界
- $V_\eta>0$ 时，$\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$用后向差分(二阶)
- $V_\eta<0$ 时，$\zeta_{上远边界}^{n+1}=\zeta_{上远边界}^{n}$

下远边界
- $V_\eta<0$ 时，$\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$用前向差分(二阶)
- $V_\eta>0$ 时，$\zeta_{下远边界}^{n+1}=\zeta_{下远边界}^{n}$

（以上）$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$用迎风格式(二阶)

出口边界
- $V_\xi>0$ 时，$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}$用后向差分(二阶)
- $V_\xi<0$ 时，$\zeta_{出口}^{n+1}=\zeta_{出口}^{n}$

（以上）$\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$用迎风格式

载负计算

应当注意，这里采用的是固定在圆柱上的动坐标。计算合力时应注意惯性力。表面压力计算为

$$p=p_{\xi=0}+\int_0^\xi H_\xi\left\{f_\xi-\frac{4}{Re}\frac{1}{H_\xi H_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}(H_\xi\zeta)\right\}d\xi \tag{C.4.6.24}$$

其中
$$f_\xi = -\ddot{\delta}\sin\theta \tag{C.4.6.25}$$

物面上
$$\frac{\partial(\ )}{\partial\eta} = \begin{cases} \dfrac{-25(\ )_{i,j} + 48(\ )_{i-1,j} - 36(\ )_{i+2,j} + 16(\ )_{i+3,j} - 3(\ )_{i+4,j}}{16\Delta\eta} & \text{上表面} \\ \dfrac{25(\ )_{ij} - 48(\ )_{i-1,j} + 36(\ )_{i-2,j} - 16(\ )_{i-3,j} + 3(\ )_{i-4,j}}{16\Delta\eta} & \text{下表面} \end{cases} \tag{C.4.6.26}$$

表面切应力

$$\tau_w = 2\mu\left[\frac{H_\eta}{H_\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{V_\eta}{H_\eta}\right) + \frac{H_\xi}{H_\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{V_\xi}{H_\xi}\right)\right] = 2\mu\frac{1}{H_\eta}\frac{\partial V_\xi}{\partial\eta} \tag{C.4.6.27}$$

无量纲化后得

$$\tau_w = -\frac{4}{Re}\zeta \tag{C.4.6.28}$$

升力系数
$$c_D = \frac{F_D}{\rho DU_\infty^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p\cos\theta - \tau_w\sin\theta)\mathrm{d}\theta \tag{C.4.6.29}$$

阻力系数
$$c_L = \frac{F_L}{\rho DU_\infty^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-p\sin\theta - \tau_w\cos\theta)\mathrm{d}\theta \tag{C.4.6.30}$$

由加速度引起的惯性力与圆柱本身质量有关，这里考虑的是流体作用力，所以略而不计。

圆柱起动规律

当 $T<15$ 时，圆柱不振荡，而只是突然启动。

$T>15$ 时，$\delta=0.05a\,\mathrm{th}(0.1\bar{t})\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\dfrac{U_\infty}{a}\bar{t}\right)$

其中 $\bar{t}=T-15$。

图 C.4.47 表示圆柱横向振动的规律。

图 C.4.48 至图 C.4.49 表示圆柱振荡时流线变化的情况。计算条件为：$H=21.63a$，$L_1=5.22a$，$L_2=72.34a$，ξ 方向（沿流动方向）取 91 个网格点，η 方向（垂直主流方向）取 92 个网格点。$\Delta t=0.01$。在 Cray 机上运行，每一时间步长约 3CPU 秒，计算显然是很费时间的。

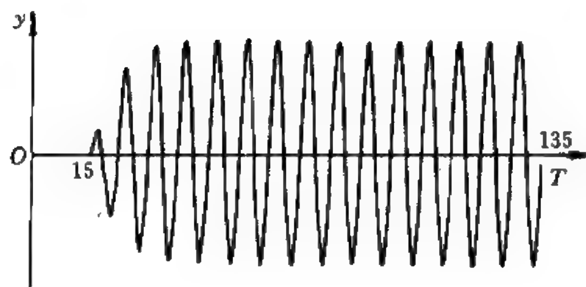


图 C.4.47

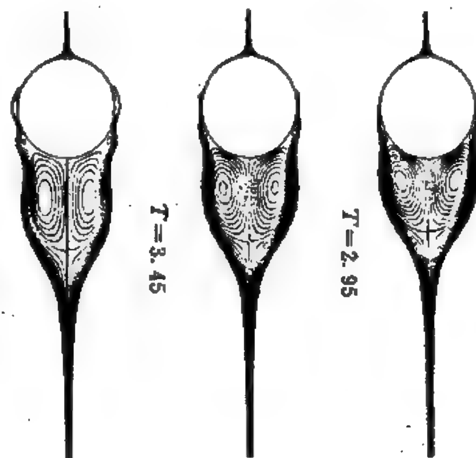
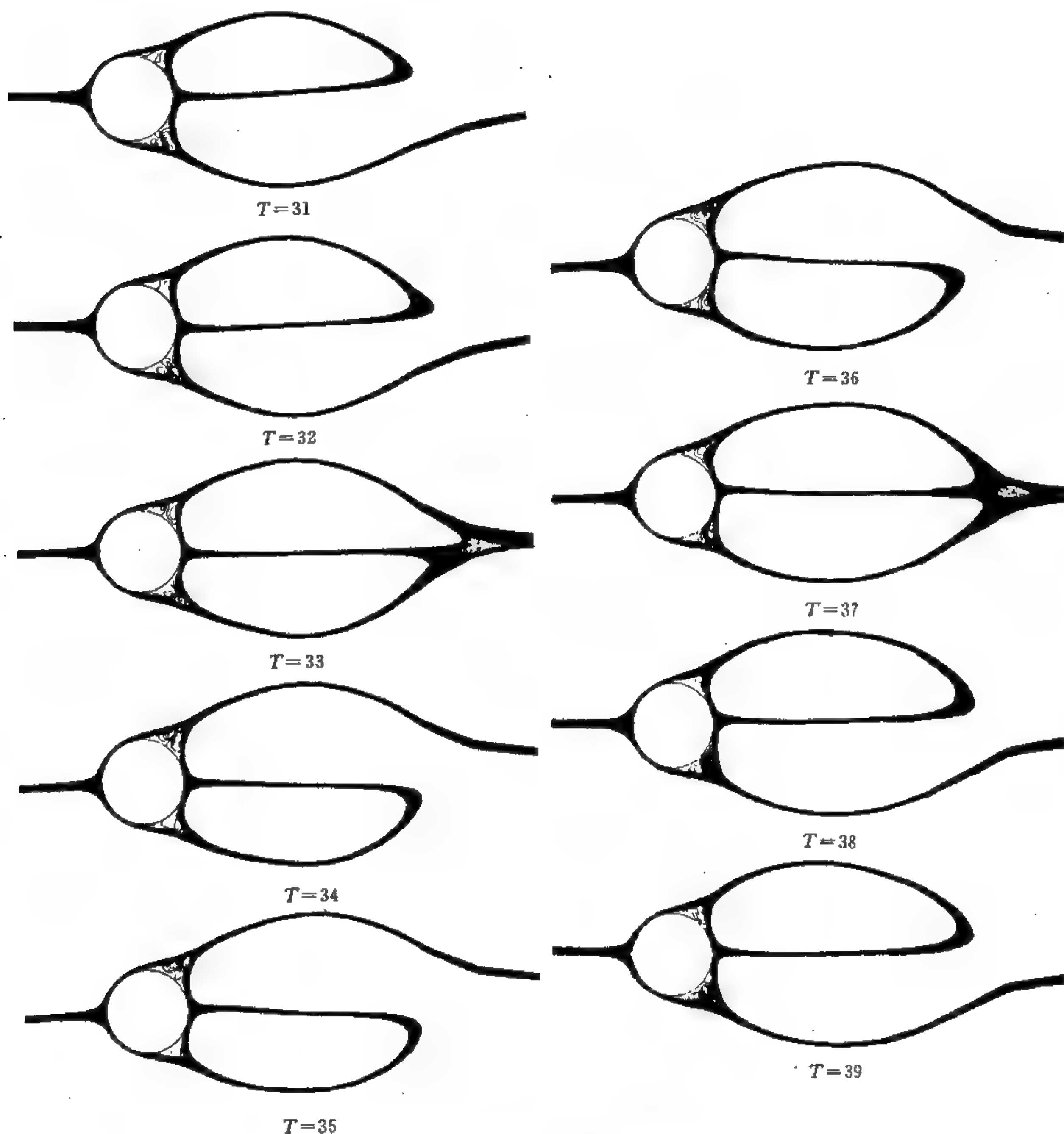


图 C.4.48 启动过程



在 $T=31-39$ 一个周期内的振荡情况

图 C.4.49

4.7 风对结构作用的数值计算

随着科学技术的日益发展以及大量现代材料、施工技术的涌现，出现许多新的结构，其中特别引人注目的是高层建筑、大跨度桥梁，近海结构等，在设计特点上，常常是非常具有柔性、阻尼小且重量轻，因而对于风的作用更加敏感，也就有必要发展出相应的研究手段，以便设计者能更加准确地估计风的影响。另一方面，交通运输也正在酝酿着一场革命，汽车、火

车的速度越来越高，每小时的速度开始向每小时几百公里的水平进军，由此产生的一系列空气动力学问题也日益变得重要起来，比如它们运行时的阻力，外形设计的优化，在并行或交叉运行时引起的特殊空气动力学问题等等，都是亟待解决的问题。上述问题的研究，实验手段无疑是最重要、最有效的，但由于试验费用昂贵，周期长而受到限制。随着计算机的迅速发展，数值模拟的手段也被引入上述领域的研究工作中来，和实验手段相辅相成，成为研究的重要手段，并且形成了一门新兴的学科——风工程。风工程的研究对象一般具有以下几个特点：

1）在建筑和桥梁工程中，受风作用的建筑物、桥梁都不是流线型的，不具有良好的空气动力学特性，而往往是钝头体形状，所以相关的问题还被称作钝体绕流，因而不可避免地伴随着分离流动、涡的脱落、涡的振荡，并由此引起结构和流体的耦合振荡。

2）由于结构物的尺度都很大，所以流场的雷诺数是很高的，对于建筑物、桥梁而言，雷诺数一般在 10^5 以上，所以都是湍流运动，流场是很复杂的紊流，给研究带来巨大的困难。而且风向是不定的，建筑物周围的环境也是千变万化的，要完全准确地模拟流场，无论用实验手段还是数值模拟的手段，都是非常困难的。

3）对于高速汽车、火车而言，由于地面和车辆是相对运动的，所以地面效应很重要，给实验带来很大的困难。至于列车的交汇，进出隧道等，更是难以模拟。

这些都给空气动力学提出了一系列新的问题，也推动了空气动力学的进一步发展。本节的目的只是介绍这个领域计算方面的发展，而且主要针对具有复杂形状的湍流运动。当然这里只能假定流场是定常的，流体是不可压缩的，并且着重讨论计算方法方面的问题，然后介绍部分计算结果，也将讨论不定常流的计算问题，由于湍流问题的复杂性，这里采用标准的 k-ε 模型。应该指出，这一模型有很大的局限性，特别是在三维问题中并不是很适用的，应当采用更加复杂的模型（如非线性 k-ε 模型，二阶矩模型等），这些将是今后进一步研究的课题。

为了讨论的方便，也考虑到实用上的需要，这里采用非正交的斜交网格系统，这避免了正交网格生成这一复杂而又困难的任务，另外本节采用非交错网格，这对程序编制有很大的好处，而由此产生的压力分布可能造成的“锯齿”分布，用相应的动力插值法加以解决。其次，为了使计算结果便于处理，原始变量仍采用直角坐标系下的速度分量，从而避免了由于采用协变分量引起的一系列不必要的复杂问题。

设选用的非正交曲线坐标系为（ξ，η，ζ），且与（x，y，z）之间的关系是已知的（它们之间的关系可以是离散型的，也可以是解析型的）。利用复合导数的关系，不难得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{J}\left[(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta)f_\xi + (y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta)f_\eta + (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)f_\zeta\right] \\ &= \frac{1}{J}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\{f(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta)\} + \frac{\partial}{\partial \eta}\{f(y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta)\} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\{f(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)\}\right]\end{aligned} \tag{C.4.7.1}$$

对于 $\partial f/\partial y$ 及 $\partial f/\partial z$ 有类似的关系，其中 f 为 (x,y,z,t) 的函数，（如可以是 u,v,w,p）。此外将连续方程、动力学方程以及 k,ε 方程均写为散度形式如下：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{C.4.7.2-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu + \nu_T)\frac{\partial u}{\partial x}\right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu + \nu_T)\frac{\partial u}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(\nu + \nu_T)\frac{\partial u}{\partial z}\right]\end{aligned} \tag{C.4.7.2-2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial vu}{\partial x}+\frac{\partial vv}{\partial y}+\frac{\partial vw}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial v}{\partial z}\right] \tag{C.4.7.2-3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial wu}{\partial x}+\frac{\partial wv}{\partial y}+\frac{\partial ww}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial w}{\partial x}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial w}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[(\nu+\nu_T)\frac{\partial w}{\partial z}\right] \tag{C.4.7.2-4}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial ku}{\partial x}+\frac{\partial kv}{\partial y}+\frac{\partial kw}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial z}\right]+P_k-\varepsilon \tag{C.4.7.2-5}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon u}{\partial x}+\frac{\partial \varepsilon v}{\partial y}+\frac{\partial \varepsilon w}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right]+c_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}P_k-c_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k} \tag{C.4.7.2-6}$$

其中 $k=\frac{1}{2}(\overline{u'u'}+\overline{v'v'}+\overline{w'w'})$，$\varepsilon=\nu\left[2\,\overline{\frac{\partial u'}{\partial x}\frac{\partial u'}{\partial x}}+2\,\overline{\frac{\partial v'}{\partial y}\frac{\partial v'}{\partial y}}+2\,\overline{\frac{\partial w'}{\partial z}\frac{\partial w'}{\partial z}}+\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)^2}+\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2}+\overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial y}\right)^2}\right]$，$\nu_T=c_\mu\frac{k^2}{\varepsilon}$，$P_k=\nu_T\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$，所选用的常数为 $c_\mu=0.09$，$c_{1\varepsilon}=1.44$，$c_{2\varepsilon}=1.92$，$\sigma_k=1.0$，$\sigma_\varepsilon=1.3$。将(C.4.7.1)式代入(C.4.7.2)式可以得到如下形式的方程：

$$J\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi_i}(C_i\phi-D_i\phi)=JS_\phi \qquad (i=1,2,3) \tag{C.4.7.3}$$

其中 J 为雅可比行列式 $\det\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right|$，$\phi$ 分别为 $1,u,v,w_j,k,\varepsilon$。而 C_i,D_i 表达式可见下表

表 (C.4.7.1)

ϕ	$D_{i\phi}$	S_ϕ	ϕ	$D_{i\phi}$	S_ϕ
1	0	0	$w=v_3$	$\frac{\Gamma_4}{J}\left(B_j^i\frac{\partial v_3}{\partial \xi_j}+\beta_j\omega_3^j\right)$	$-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi_j}(\beta_3^j p)$
$u=v_1$	$\frac{\Gamma_2}{J}\left(B_j^i\frac{\partial v_1}{\partial \xi_j}+\beta_j^i\omega_1^j\right)$	$-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi_j}(\beta_1^j p)$	k	$\frac{\Gamma_5}{J}B_j^i\frac{\partial k}{\partial \xi_j}$	$P_k-\varepsilon$
$v=v_2$	$\frac{\Gamma_3}{J}\left(B_j^i\frac{\partial v_2}{\partial \xi_j}+\beta_j^i\omega_2^j\right)$	$-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi_j}(\beta_2^j p)$	ε	$\frac{\Gamma_6}{J}B_j^i\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi_j}$	$(C_{1\varepsilon}P_k-c_{2\varepsilon}\varepsilon)\frac{\varepsilon}{k}$

其中设 $\rho=1$，$\Gamma_2=\Gamma_3=\Gamma_4=\nu+\nu_T$，$\Gamma_5=\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_k}$，$\Gamma_6=\nu+\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon}$，另外

$$C_i=\beta_j^i v_j \tag{C.4.7.4}$$

β_j^i 是

$$J=\det\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}\\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3}\end{vmatrix} \tag{C.4.7.5}$$

中 $\partial x_j/\partial \xi_i$ 的代数余子式，$B_j^i = \beta_n^i \beta_n^j$，

$$P_k = \frac{\nu_T}{2J^2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi_n}\beta_j^n + \frac{\partial v_j}{\partial x_n}\beta_i^n\right)^2 \tag{C.4.7.6}$$

这样，所求解的方程具有相同的形式(C.4.7.3)

在计算中采用六面体网格，其侧面中心分别记作 e(东)，w(西)，n(北)，s(南)，t(顶)，b(底)面，与此对应的相邻网格记作 E, W, N, S, T, B 网格，而其本身记作 P 网格，其它的符号可以见图 C.4.50。在网格各顶点位置已知的情况下，可以方便地计算 β_i^j，如

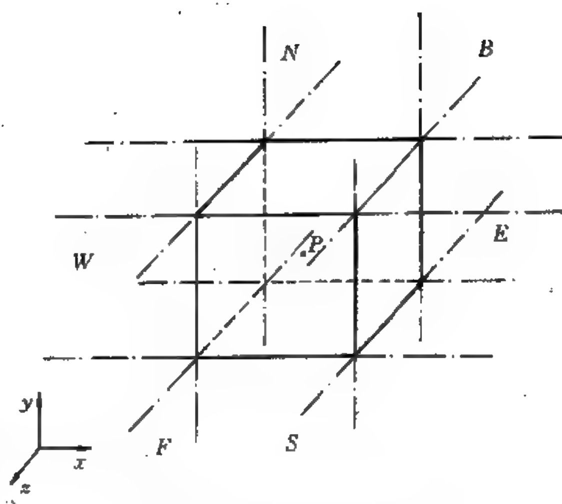


图 C.4.50　网格图及其符号

$$\left.\begin{aligned} \beta_3^2 &= \frac{b_3^2 \Delta\xi_2}{\Delta\xi_1 \Delta\xi_2 \Delta\xi_3} \\ (b_3^2)_P &= [(x_2)_e - (x_2)_w][(x_1)_t - (x_1)_b] - [(x_1)_e - (x_1)_w][(x_2)_t - (x_2)_b] \end{aligned}\right\} \tag{C.4.7.7}$$

其它的量可类似地求得，这里物理量 u, v, w, p 均定义在网格中心点 P 上，离散化方法用有限体积法具体作法是将(C.4.7.3)式关于网格元体积积分，可以得到

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathrm{d}V + I_e - I_w + I_n - I_s + I_t - I_b = \int_{\Delta V} S_\phi \mathrm{d}V \tag{C.4.7.8}$$

其中 I 为 ϕ 通过侧面向体积外流出的通量，它可以解为两个部分：对流部分 I^C 和扩散部分 I^D，对流部分

$$I^C = (b_j^{(i)} v_j)_{(i)} \phi \tag{C.4.7.9}$$

其中(i)表示 1，2；3，4；5，6 及相应的 $w, e; s, n; b, t$ 侧面。上式不对(i)从 1 到 6 求和。扩散部分进一步分解成两个部分，一个是由相同导数方向的项组成的，具体说是如$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_f}\right)\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\right]$项积分后得到的通量，记作 I^{DN}，

$$\left.\begin{aligned} I_{(i)}^{DN} &= D_{(i)}(\phi_P - \phi_{(i)}) \\ D_{(i)} &= [b_n^{(i)} b_n^{(i)} \Gamma_{(i)}/\Delta V]_{(i)} \end{aligned}\right\} \tag{C.4.7.10}$$

上式关于 n 从 1 到 3 求和，但对(i)不求和，另外一部分则是交叉导数项，这一项要移到方程(C.4.7.8)式的右端，因为在隐式格式时它的处理很困难，移到右端后可以视为显式的源项，使计算大为简化，它的计算表达式比较繁琐，如

$$I_w^{DC} = \nu_w[(b_1^2 b_1^1 + b_2^2 b_2^1 + b_3^2 b_3^1) u_{nse} + (b_1^3 b_1^1 + b_2^3 b_2^1 + b_3^3 b_3) u_{tbw}]/\Delta V \tag{C.4.7.11}$$

其它方向的通量也有相应的公式。源项的计算也要分解为两个部分，即

$$S_\phi = S_\phi^C + S_\phi^P \phi_P \tag{C.4.7.12}$$

其中 S_ϕ^P 是源项中与ϕ_P 有关部分线化后的系数，但要求 S_ϕ^P 总是小于或等于零。对于 k 和 ε 和方程来讲，若对流项中交错导数项移至方程右端后小于零，则除以相应的 k 或 ε 后置于 S_ϕ^P 中，若该项大于零，则直接置于 S^C 项之中，对于速度方程，则不论其正负号，均置于 S^C 项之中。在速度的动量方程中还存在压力及应力的交错导数项，则一律置于 S^C 之中。以上的作法是为了使 k 及 ε 方程不导致 k, ε 的负值而采取的措施。

在形成离散化方程时，关键的是数值方法的选用。高阶精度方法具有较高精度但其稳定性较低，在精度与稳定性二者应当有一个折中。对于有限体积法，精度最多是二阶的，因为用体积分形成离散方程已决定了这一点。其次由于网格是斜交的，而且对坐标线的确定，绝大多数是用离散化方式(而不是解析形式)给出的，各种导数本身的计算事实上也多是二阶精度的，再则交错导数的计算更加困难，具有高阶精度是很难的事，往往连二阶精度都难以保证，所以本节均用二阶精度的格式。为了说明格式的建立，对下列模型方程进行分析。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(C\phi)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(D\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right) \tag{C.4.7.13}$$

方程在等间距网格上求解，设求解的点为 P，相邻点为 E 和 W，它们的间距为 Δx，包含 P 点的网格界于 w 和 e 之间，利用有限体积法的概念，对方程(C.4.7.13)在 we 单元上积分可得

$$(C\phi)_e-(C\phi)_w=\left(D\frac{\mathrm{d}\phi}{\partial x}\right)_e-\left(D\frac{\mathrm{d}\phi}{\partial x}\right)_w \tag{C.4.7.14}$$



为简单起见，设 C,D 为常数。采用中心差分的方法，有

$$\left.\begin{aligned}&\phi_e=\frac{1}{2}(\phi_P+\phi_E), &&\phi_w=\frac{1}{2}(\phi_P+\phi_W)\\&\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_e=\frac{\phi_E-\phi_P}{\Delta x}, &&\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right)_w=\frac{\phi_P-\phi_W}{\Delta x}\end{aligned}\right\} \tag{C.4.7.15}$$

将它们代入(C.4.7.14)式可得

$$\frac{1}{2}C\phi_E-\frac{1}{2}C\phi_W=D\frac{\phi_E}{\Delta x}-2D\frac{\phi_P}{\Delta x}+D\frac{\phi_W}{\Delta x}$$

整理后可得

$$\phi_P=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{C\Delta x}{D}\right)\phi_E+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{C\Delta x}{D}\right)\phi_W \tag{C.4.7.16}$$

设 $\phi_W=1.0$，$\phi_E=2.0$，选用不同的 $\Delta xC/D$，使它们分别为 0，1，2 及 4，利用等间距的网格计算 ϕ_P 的值，发现当 $\frac{C\Delta x}{D}=0$ 时 $\phi_P=1.5$；$\frac{C\Delta x}{D}=1$ 时 $\phi_P=1.5$；$\frac{C\Delta x}{D}=2$ 时 $\phi_P=1.0$；$\frac{C\Delta x}{D}=4$ 时 $\phi_P=0.5$。另一方面(C.4.7.13)式的精确解为

$$\frac{\phi-\phi_W}{\phi_E-\phi_W}=\frac{\exp\left(\frac{C\Delta x}{D}\frac{x}{\Delta x}\right)-1}{\exp\left(\frac{C\Delta x}{D}\right)-1}$$

对应的精确解分别为 1.5，1.3775，1.2689 和 1.1192。可见，当 $\frac{C\Delta x}{D}$ 不断增加的情况下，误差不断上升，当 $\frac{C\Delta x}{D}$ 等于 4 时还会出现振荡的不合理情况，可见采用中心差分格式并不能真正得到具有二阶精度的解，为此可以采用迎风格式，即在 e 和 w 点上，在计算对流项时采用

$$\phi_e=\begin{cases}\phi_E & C<0\\ \phi_P & C>0\end{cases},\qquad \phi_w=\begin{cases}\phi_P & C<0\\ \phi_W & C>0\end{cases}$$

或记作

$$\left.\begin{aligned}C\phi_e&=-\phi_E\max(-C,0)+\phi_P\max(C,0)\\C\phi_w&=-\phi_P\max(-C,0)+\phi_W\max(C,0)\end{aligned}\right\} \tag{C.4.7.17}$$

将它代入(C.4.7.14)式可以得到

$$\left.\begin{aligned}&a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E\\&a_W = 1+\max\left(\frac{C\Delta x}{D},0\right),\quad a_E = 1+\max\left(-\frac{C\Delta x}{D},0\right)\\&a_P = a_W + a_E\end{aligned}\right\}\tag{C.4.7.18}$$

这样计算的结果在$\frac{C\Delta x}{D}=0,1,2,4$ 时 ϕ_P 分别为 1.5,1.33,1.25,1.167,这比中心差分计算的结果大为改善,消除了物理上不合理的振荡。从上面的讨论不难看出这一格式具有一阶精度,其误差主要来源于方程(C.4.7.17)式,一个改善的方法是用混合格式,即

$$\phi_w = \begin{cases}\phi_W & \frac{C\Delta x}{D} > 2\\[2mm] \frac{1}{2}(\phi_P+\phi_W) & -2\leqslant\frac{C\Delta x}{D}\leqslant 2\\[2mm] \phi_P & \frac{C\Delta x}{D}\leqslant -2\end{cases}$$

$$\phi_e = \begin{cases}\phi_P & \frac{C\Delta x}{D} > 2\\[2mm] \frac{1}{2}(\phi_P+\phi_E) & -2\leqslant\frac{C\Delta x}{D}\leqslant 2\\[2mm] \phi_E & \frac{C\Delta x}{D}\leqslant -2\end{cases}$$

这里取$\frac{C\Delta x}{D}=2$ 为界,这是因为计算表明,当$\left|\frac{C\Delta x}{D}\right|>2$ 时解可能发生振荡,这时需采用迎风格式,否则用中心格式。将上述表达式代入(C.4.7.14)式可以得到

$$\left.\begin{aligned}&a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E\\&a_E = D_0\max\left\{-\frac{C\Delta x}{D},1-\frac{C\Delta x}{2D},0\right\}\Big/\Delta x\\&a_W = D_0\max\left\{\frac{C\Delta x}{D},1+\frac{C\Delta x}{2D},0\right\}\Big/\Delta x\\&a_P = a_w + a_E\end{aligned}\right\}\tag{C.4.7.19}$$

这种格式最早由 Spalding 提出的,又叫做 Hybrid Scheme。显然这不是完全二阶精度的格式。后来人们又对此格式作种种改进,值得一提的是 Leonard 在 1979 年提出的对流项二次迎风插值格式(QUICK)格式,该格式的指导思想是用上风 3 点插出 ϕ_e 和 ϕ_w 的值,如

$$\phi_w = \frac{3}{8}\phi_P + \frac{3}{4}\phi_W - \frac{1}{8}\phi_{WW}$$

应该指出,该格式要求$\frac{C\Delta x}{D}<\frac{8}{3}$,否则也会产生振荡,但比中心差分格式要小。关于进一步改进的格式,在这里不作一一介绍。

利用上述差分格式,可以把(C.4.7.3)式在定常情况下($\partial/\partial t=0$)离散为

$$A_P\phi_P = \sum A_{nb}\phi_{nb} + S^U \tag{C.4.7.20}$$

其中

$$A_P = \sum A_{nb} - S^P$$

这里 nb 为 E,W,N,S,T,B。对于不定常情况,则需计及不定常项,全隐格式时为

$$\frac{\phi_P^n - \phi_P^{n-1}}{\Delta t}\Delta V + A_P\phi_P^n = \Sigma A_{nb}\phi_{nb}^n - S^U \tag{C.4.7.21}$$

当然不定常项还可以采用其他形式的差分格式。而(C.4.7.21)仍可以写作(C.4.7.20)的形式，只是S^U项中应加上$\phi_P^{n-1}\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$，而$S^P$中再减去$\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$即可以，所以下面主要讨论(C.4.7.20)。

在(C.4.7.20)中，对于动力学方程，则尚未包含有关压力项。如计及压力项，则有

$$v_{iP} = H_{iP} + D_{1i}(p_w - p_e) + D_{2i}(p_s - p_n) + D_{3i}(p_b - p_t) \quad (i = 1,2,3) \tag{C.4.7.22}$$

由于压力尚未确定，所以只有猜得的值p^*，另外为了改善收敛性，一般引入松弛系数α_i，于是有

$$v_{iP}^* = \alpha_i[H_{iP}^* + D_{1i}(p_w^* - p_e^*) + D_{2i}(p_s^* - p_n^*) + D_{3i}(p_b^* - p_t^*)] + (1 - \alpha_i)v_{iP}^{(0)} \tag{C.4.7.23}$$

其中

$$H_{iP} = \frac{\sum A_{nb}\phi_{nb} + S^U}{A_p} \qquad D_{mi} = h^m/A_p$$

这里S^U不包含压力项在内。由于p^*是猜测的，所以v_{iP}^*不满足连续方程，而正确的压力应是p^*+p'其中p'是p^*与真值p之间的偏差，故若将p代替（C.4.7.23）式中的p^*，则得到的将是v_{iP}，再减去（C.4.7.23）式可得

$$v_{iP}=v_{iP}^*+\alpha_n[D_{1i}(p_w'-p_e')+D_{2i}(p_s'-p_n')+D_{3i}(p_b'-p_t')] \tag{C.4.7.24}$$

将它代入第1个方程后可以得到关于压力的方程

$$A_P^p p'_P = \sum A_{nb}^p p'_{nb} - \Delta Q \tag{C.4.7.25}$$

ΔQ是v_i^*速度场通过六面体表面时通量的总和，解得p'后可以修正速度。由于这里采用了非交错网格，所以要引用动量插值法，其基本思想是：网格单元六面体侧面上的各种量，都是由这一侧面二侧网格中心上值的线性插值得到，网格中心处的速度修正表达式为

$$v_{m,P}=v_{m,P}^*+\frac{D_m^1(p_w'-p_e')}{1-\dfrac{\sum A_{nb}^m}{A_p}}+\frac{D_m^2(p_s'-p_n')}{1-\dfrac{\sum A_{nb}^m}{A_p}}+\frac{D_m^3(p_b'-p_t')}{1-\dfrac{\sum A_{nb}^m}{A_p}} \tag{C.4.7.26}$$

其中v^*是利用已知猜测压力p^*的情况下得到的速度值，而式中p_w，p_e等都是由p_P，p_W等插值得到的。这一方法的目的是在于避免因采用非交错网格时可能出现的非物理的压力锯齿分布，该思想最早是由 Rhie 和 Chow (1983) 提出的。每次求解的压力值是一修正值p'，与p^*相加即可得到压力的真值。这样做，使得非交错网格得以更加广泛的应用。

除了以上所述的求解过程外，还需给出各种边界条件。一般地说和以前各节中讨论的情况是一样的，这里只就几个特别的问题加以说明。

在湍流的情况下，壁面的网格大小一般都大于粘性底层的尺度，所以壁面沿法向的速度分布不能看作线性分布，而是对数分布。因此一般用

$$\tau_w = -\lambda_w(V_P - V_w) \tag{C.4.7.27}$$

这里的w表示壁面，P表示网格中心，λ_w为

$$\lambda_w = \begin{cases} \mu/y_P & \text{当 } y_P^+ < 11.6 \\ \rho c_\mu^{1/4}k_P^{1/2}k/\ln(Ey_P^+) & \text{当 } y_P^+ > 11.6 \end{cases} \tag{C.4.7.28}$$

其中

$$y_P^+ = \rho c_\mu^{1/4}k_P^{1/2}y_P/\mu \qquad k = 0.41 \quad E = 8.432 \quad c_\mu = 0.09$$

对于k，ε方程，壁面条件只能假设。k在壁面方向的通量可以认为是0，而在壁面附近处

的生成项 P_k 为 $\tau_w^2/k\mu y_P^+$，而壁面附近的网格中心的 $\varepsilon_P=c_\mu^{3/4}k_P^{3/2}/ky_P$，一般说初始和进口的 k，ε 是比较难给出的，在开始时可以设 $k=0.03|V|^2$，$\varepsilon=k^{3/2}/l$，其中 l 为最小湍流的尺度，在估算时有较多的经验成分需要用试算来估计。

根据上述的数值方法和边界条件，就可以编制通用的数值计算程序，并用它来预测不同类型的流场。这里发展的 NSTR2D 和 NSTR3D 就是针对这一问题建立的，它被用来预测建筑物的风载，汽车的阻力等，下面介绍部分结果。

为了计算高层建筑的风载，首先要了解来流风的流速沿高度的分布，应该说，这种分布与地面的环境有很大的差别，所以实际计算中，应当参考当地的气象资料或进行实地测量。对于实验模型，则来流的速度分布是可以测量出来的，来流的脉动湍流动能 k 也是可以测量得到的。在本节算例中，采用的是中国空气动力学研究与发展中心提供的数据(见图 C. 4. 51)。由于风相对于建筑物的方向是变化的，所以采用的网格系统也是变化的，即设风向不变而网格变化。图 C. 4. 52 中所示的是来流与建筑物构成 20°时的网格系统。

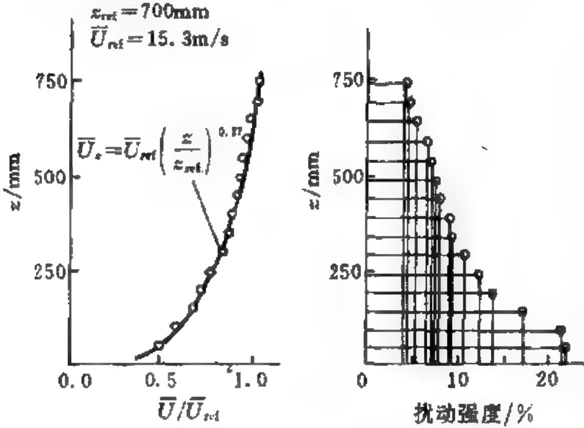


图 C. 4. 51　来流 U (z) 和 k (z) 分布

由于计算机容量的限制，网格数不是很多，为 42×22×24。建筑物的形状则简化为一直立长方体。实验时的雷诺数为 3.6×10^6，计算了 $\beta=0$ 到 30°的情况，每变化 5°计算一次，流场视为定常的，用 NSTR3D 程序计算并与相应的实验结果作比较。

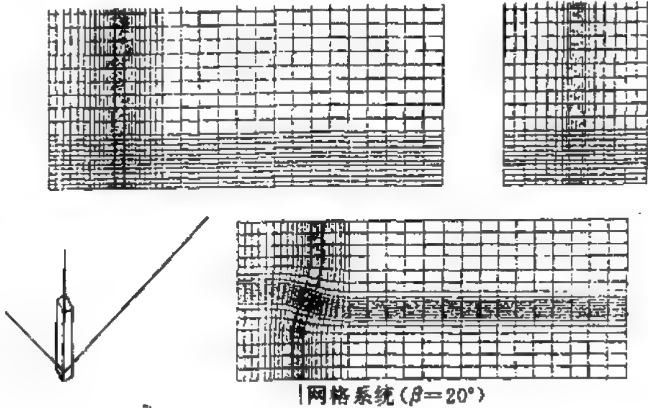


图 C. 4. 52　网格系统 ($\beta=20°$)

当 $\beta=0$°时，在 2/3 高度处，压力系数的计算值和实验量测值基本吻合（见表 C. 4. 3)。

表 C. 4. 3　c_p ($\beta=0°$)

点　号	1	2	3	4	5	6
计算值	0.61	0.76	0.88	0.88	0.76	0.61
实验值	0.61	0.76	0.90	0.90	0.76	0.61

另外定义

$$C_x=\frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2 D_y H},\qquad C_y=\frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho U^2 D_y H}$$

$$C_{mx}=\frac{M_x}{\frac{1}{2}\rho U^2 D_y H^2},\qquad C_{my}=\frac{M_y}{\frac{1}{2}\rho U^2 D_y H^2}$$

其中F为推力，M为力矩，D_y为迎风面的宽度，H为建筑物的高度，对于不同的β值，计算结果和实验值的比较，可以看出β上升时计算误差上升。产生这一误差的原因是多方面的，主要有k-ε模型本身的局限性，β上升时坐标扭曲比较大，计算网格数太少等，从图C.4.53和图C.4.54可以看到建筑物后涡的分布以及建筑物表面的压力分布情况。

从以上这些图中可以看到，流场结构的雏型已经显现出来了，但是要想进一步仔细分析流场结构，还需要更大的计算机，以便采用足够密的网格。

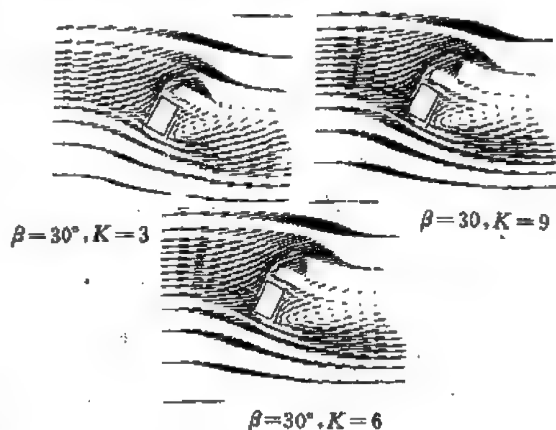


图 C.4.53

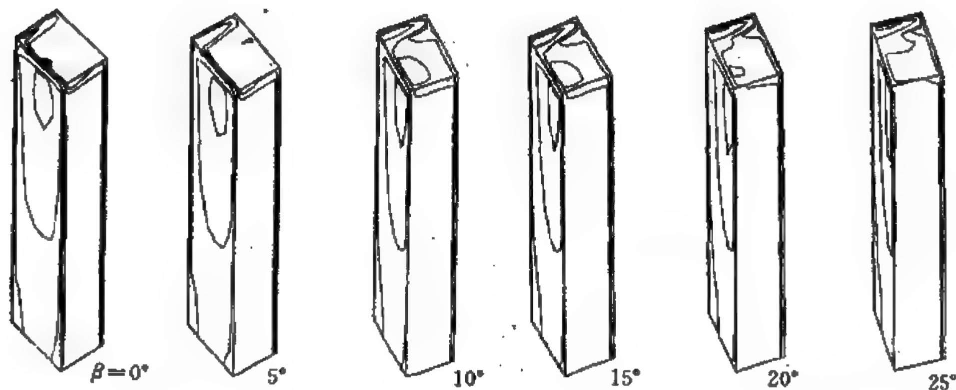


图 C.4.54

这个程序还可以用来计算汽车周围的流场及汽车所受的阻力。本节采用一个与桑塔那外形相近的汽车外型，其外型和选用的网格系统如图C.4.55所示。

为了考虑地面效应，设来流是均匀的，地面也以来流速度运动，而汽车本身则视为静止的。来流的速度实际就是汽车行驶的速度。设汽车行驶速度为200km/h，汽车的长度为约3 m，空气温度为15 ℃，则雷诺数为1.3×10^7，流场是湍流。计算所得的表面压力分布，对称剖面上以及不同横截面上的速度分布由图C.4.56，图C.4.57及图C.4.58可以看到，由于汽车运动，在其后卷起的两个涡是相当明显的。所得总的阻力系数为0.3，与实际情况也是比较接近的。当然，要得到比较准确的结果，还要加密网格和改善湍流模型。

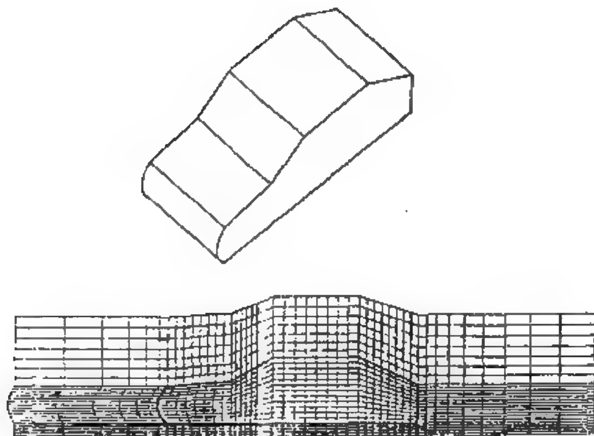


图 C.4.55　汽车外形及其周围的网格系统

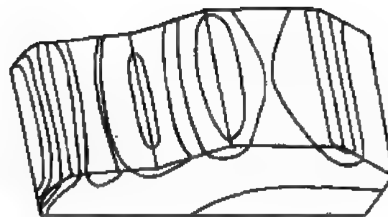


图 C.4.56　汽车表面压力分布

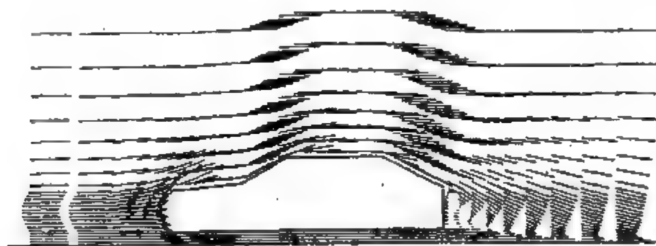


图 C.4.57　对称面上速度分布

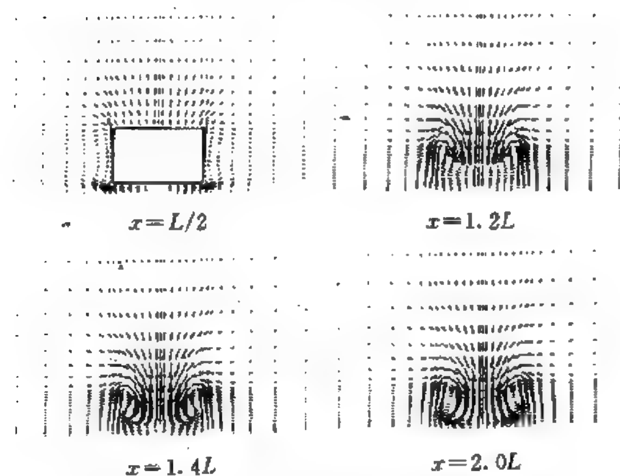


图 C.4.58　不同横截面上的速度分布

小　　结

工程中存在各种流动问题，一般说来，它们都是相当复杂的。由于计算机技术的飞速发展，正在形成一门独立的分支——计算工业空气动力学。除了期待计算机的进一步巨型化，进一步提高运行速度以外，人们还需要在算法（如并行算法、分区算法、高精度计算方法等），湍流模式等方面作工作，以期得到更加准确、更加接近实际的供工程应用的结果。

参考文献

1. 费祥麟主编．高等流体力学．西安交通大学出版社，1989
2. Soubbaramayer. Uranium Enrichment. Springer—Verlag, 1979
3. Matsuda T. Simulation of Flow Past Scoops in a Gas Centrifuge. J of Fluid Mech, 1989 vol. 201: pp203—221
4. Su M D. Numerical Simulation of Laminar Flow in a Curved Duct with Square Cross—Section. Asian Pacific Conference on Computational Mechanics. 1991
5. Arnal M P. Investigation of Developing Laminar and Turbulent Flow in Curved Ducts Berkeley: Ph D These, University of California, 1988
6. 陈矛章．粘性流体动力学理论及工程计算．北京航空学院出版社，1986
7. Cebeci T. Momentum Transfer in Boundary Layers. Hemisphere Publishing Corporation, 1977
8. Cebeci T. Analysis of Turbulent Boundary Layers. New York: Academic Press, 1974
9. 苏铭德．大涡模拟——研究湍流的一种新手段，力学进展 1984，vol. 14: No. 4
10. 苏铭德．大涡模拟的代数模型．力学学报，1987，增刊
11. Moin P. The Structure of the Vorticity Field in Turbulent Channel Flow. Part I; 1985, JFM, vol. 155, pp441—464 Part II; 1986, JFM, vol. 166; pp339—363
12. Su M D. The Numerical Simulation of Fully Developed Turbulent Flow in Straight and Curved Ducts with Square Cross—Section. Eighth Symposium on Turbulent Shear Flow, Murich, 1991
13. Tamura T. Numerical Simutation of Unsteady Flow Patterns Around a Vibrating Cylinder. AIAA, 1988 paper 88—0128
14. Kawahava T. Computation of High Reynolds Number Flow Around a Circular Cylinder with Surface Roughness. AIAA 1984 paper, 84—0340
15. Su M D. Numerical Simulation of Laminar Flow Round a Vibratory Cylinder with Re=9500, First Int. Offshore and Polar Engineering. Conf. Edinburgh, 1991
16. Soh W Y. Laminar Entrance Flow in Curved Pipe. J Fluid Mech, 1984, vol. 148: pp109—135
17. Rhie C M and Chow W L. Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with trailing edge separation A. I. A. A. J vol. 21 pp 1525—1532
18. 苏铭德，唐革风．高层建筑风载的数值模拟．第四届全国风工程及工业空气动力学学术会议论文集
19. Su M D. Numerical Simulasion of Complex Flow with Arbitrary Geometries and its Application Proceedings of the International Conferenae on Hydradynamics 1994, 30. Oct—3. Nov, Wuxi China: p485

第 5 章　核动力工程中对流换热的数值计算

实际工程中还存在着许多传热问题。比如固体反应堆和核燃料元件既是释热装置又是导热装置，在计算反应堆活性区的热性能时，这些元件内的排热情况和温度分布是十分重要的。另外由于活性区容器、底座、屏蔽和压力容器等都遭受活性区的辐射，吸收辐射后会产生非均匀的释热。核动力装置中，对于不同类型的反应堆常常使用不同的冷却剂。例如快中子反应堆中采用液态金属（如钠、钾）和气体（如氦或水蒸气）作为冷却剂；天然铀作燃料的反应堆使用重水作冷却剂；沸腾反应堆则使用轻水或有机液体作冷却剂。这些冷却剂的流动与传热情况直接关系到反应堆的安全运行。在蒸汽发生器、汽轮机、凝汽器的设计和运行中更涉及到许多流动和传热问题。其中不但有单相介质的对流换热问题，还包含有相变（沸腾与凝结）和汽液两相流动和传热。

除了以上列举的核工业装置中存在换热问题以外，许多日常和其它工业装置中也存在大量换热问题，最常见的如室内的自然对流，电厂冷却塔的热交换，化工装置、能源装置内的换热设备更是比比皆是。本章着重讨论与热交换有关的流动，对于汽液两相流的数值计算也将作简要介绍。

A 篇第 2 章中已经介绍了有关对流换热的基本方程及其一般边界条件，本章的重点是动力工程中若干典型的对流换热问题的数值计算方法，并给出一些具体的计算实例。

求解对流换热问题的关键在于确定流场，在流场已知的情况下再计算温度、焓、换热的 Nu 数等感兴趣的量。流场的计算则可以运用前面几章介绍的数值方法。对于自然对流问题，流场的求解与温度场的计算必须同时进行。本章的重点是介绍流场已知情况下的换热计算。

5.1　管道内的对流换热及其数值计算

核动力工程及其它工程中遇到最多的换热问题是管道内的对流换热。管道内的对流换热通常可以分成两个区域，即热进口段和换热充分发展段。所谓换热充分发展段的特点是，截面上流体的无因次温度分布与流动方向上的坐标无关。设流动方向的坐标为 x，则换热充分发展时有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T_{w,m}-T}{T_{w,m}-T_b}\right)=0 \tag{C.5.1.1}$$

其中，$T_{w,m}$ 为截面上的平均壁温，T_b 为流体的截面平均温度，T 为流体的局部温度。

上式说明，T，$T_{w,m}$，T_b 都可能随 x 变化，但上述无因次过余温度则与 x 无关。

值得注意的是，在热进口段，虽然流体的速度场可能已经充分发展，但上述无因次温度却不能满足（C.5.1.1）式。当然除低 Pr 流体外，在热充分发展段，速度场总是充分发展了的。

管道内充分发展的对流换热可以分为简单和复杂两大类。所谓简单的充分发展的对流换热是指垂直于主流方向的截面上速度分量均为零；在复杂的充分发展的对流换热中垂直于主流方向的截面上仍有速度分量存在。对于前一种情况速度场和温度场的控制方程在很多情况

下可以转换成热扩散型方程。对后者则需求解NS方程以获得速度场。因此对简单的（即管道内层流充分发展的）对流换热，其数值计算较易实现。但是为了实现充分发展段对流换热的求解，对沿流动方向和沿周界方向的热边界条件需有某些限制；换句话说，并不是任意规定的热边界条件都能实现充分发展的对流换热。一般讲对于长管道内层流换热，在下述条件下可以实现充分发展的对流换热。

（1）壁温沿轴向和周向均匀。这相当于壁热阻很小，壁一侧有相变（蒸发或凝结）时的换热情况。

（2）热流沿轴向均匀，壁温沿周向均匀。核反应堆中释热元件表面就相当于这种情况。

（3）热流沿轴向和周向均匀。相当于壁厚均匀但导热系数低的电加热表面。

（4）热流轴向呈指数变化，周向壁温均匀。逆流或顺流式换热器就相当于这种情况。

（5）环境温度沿轴向均匀，另有非线性的自然对流的边界条件或非线性的辐射热边界条件。高温液态金属的换热设备，高温烟气流动系统中的换热表面，大车间内水平散热的管道，宇航设备中的散热表面都相当于这种情况。

应当指出，管道截面的形状可以多种多样，除了通常的圆形、矩形和环形流道外，还有三角形槽道、多边形槽道，内肋管，含螺旋插入物的管道及波形通道等强化传热元件，纵掠管束等的层流充分发展的对流换热均可用数值计算方法进行计算。

5.1.1 圆管

圆管内层流充分发展对流换热是传热学中的一个经典问题。当假设流体为常物性并且不计流体的轴向导热时，在柱面坐标中，这是一个轴对称问题。其速度分布可以由分析解直接得出。参看图C.5.1，此时其速度分布为

$$u/u_m = 2[1-(r/R)^2] \qquad \text{(C.5.1.2)}$$

其中，u_m为截面的平均流速。

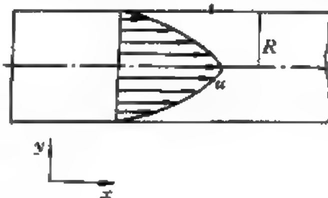


图 C.5.1

求解圆管内充分发展区的对流换热就是要求得Nu数。显然求解的关键在于确定截面上的温度分布。此时温度控制方程可以简单地写成

$$\rho c u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right) \qquad \text{(C.5.1.3)}$$

其边界条件为

$$\left.\begin{aligned} r=0, &\quad \frac{\partial T}{\partial r}=0 \\ r=R, &\quad -k\frac{\partial T}{\partial r}=\alpha(T-T_\infty) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(C.5.1.4)}$$

采用无因次温度

$$\Theta = \frac{T-T_\infty}{T_b-T_\infty}$$

及无因次坐标$\eta=r/R$，可以得到无因次温度的控制方程为

$$\frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\eta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\eta}\right)+\frac{\lambda}{2}\Theta\frac{u}{u_m}=0 \qquad \text{(C.5.1.5)}$$

相应的边界条件为

$$\eta=0,\quad \mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}\eta=0;\quad \eta=1,\quad \mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}\eta=-B_i\Theta_w \qquad \text{(C.5.1.6)}$$

其中 $\lambda>0$ 为特征值，需在求解过程中确定。

$$B_i = \frac{Ra}{k}$$

采用上述方法后就将温度变量的偏微分方程化成了常微分方程，无因次温度 Θ 实际上是一相似变量。这种抛物型方程通过相似变量得以简化的处理方法，在对流换热（如边界层流动）中有广泛的应用。

为使（C.5.1.5）和（C.5.1.6）两式封闭，还必须附加一个方程。通常这一附加方程可以从能量平衡的角度得到。按截面上流体平均温度的定义有

$$T_b = \frac{\int_0^R 2\pi r u T \mathrm{d}r}{\int_0^R 2\pi r u \mathrm{d}r}$$

将其无因次化，得

$$2\int_0^1 \frac{u}{u_m}\eta \mathrm{d}\eta = 1 \tag{C.5.1.7}$$

由（C.5.1.5），（C.5.1.6），（C.5.1.7）三式，采用迭代法即可求得无因次温度。此时换热的 Nu 数可按下式计算

$$Nu = \frac{2B_i\Theta_w}{1-\Theta_w} \tag{C.5.1.8}$$

由此可见，当 B_i 很大时，即外部对流换热很强，T_w 趋于 T_∞，形成均匀壁温条件；相反 B_i 很小时，即外部对流很弱，此时温差（T_w-T_∞）很大。虽然沿轴向 T_w 仍会有所变化，但相对于温差（T_w-T_∞）而言，这一变化仍很小，α（T_w-T_∞）可以看作常数，这就是均匀热流的工况。其它边界条件都介于这两个极限工况之间。表 C.5.1 表示数值计算的结果。

表 C.5.1

B_i	λ	Nu	B_i	λ	Nu
0	0	4.364	2	3.995	3.977
0.1	0.3818	4.330	5	5.547	3.840
0.25	0.8943	4.284	10	6.326	3.758
0.5	1.615	4.221	100	7.195	3.663
1	2.690	4.122	∞	7.314	3.657

帕坦卡(Patankar)等人用数值方法计算了沿周向不均匀加热时水平圆管内充分发展的层流流动与传热。此时由于不均匀加热会引发一个由浮升力产生的自然对流。由于该自然对流的影响会使 Nu 数大大超过纯强迫对流层流的情况。其计算结果表示在图 C.5.2 上。图中上面一种情况表示圆管上半部均匀受热，下半部绝热。而下面一种情况正相反，下半部均匀受热，上半部绝热。显然下半部受热时会引发一个较强的自然对流，从而使 Nu 数大大增加。

图 C.5.3 给出了圆管下半部均匀受热时计算出的等温线和流线。图中左边为等温线，右边为流线。

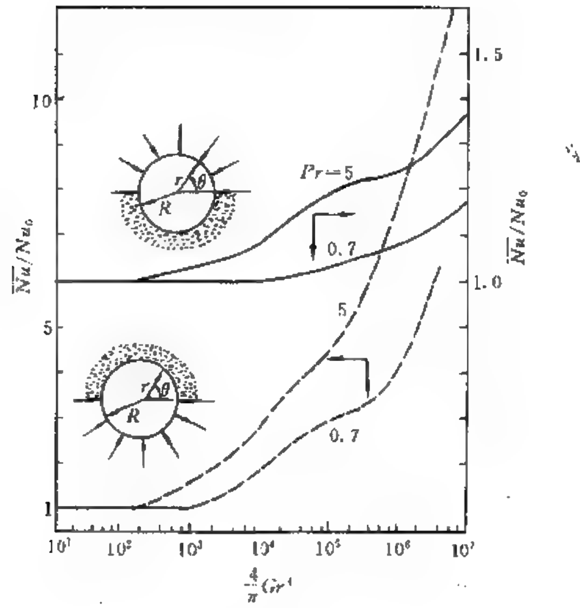


图 C.5.2

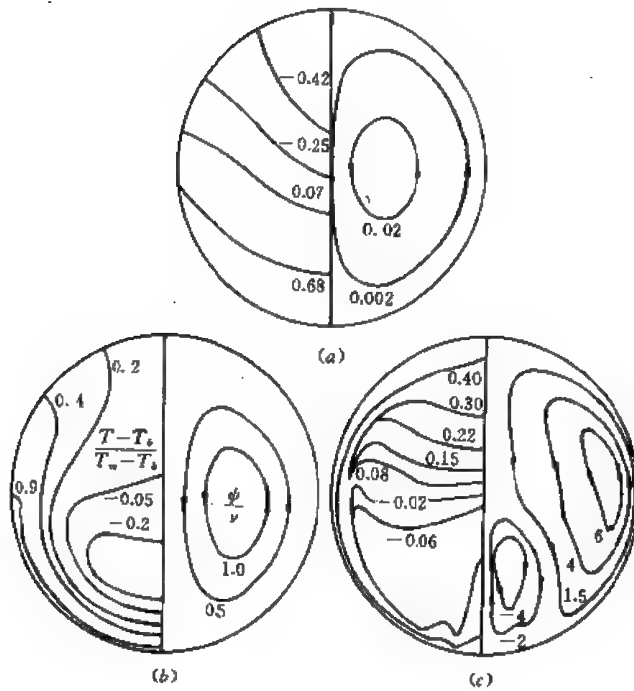


图 C.5.3

$Pr=5$，$\left(\frac{\pi}{4}\right)Gr^+$ 为 (a) 10 (b) 10^4 (c) 0.5×10^7

5.1.2 矩形流道

工程中常常会遇到矩形流道的情况。在层流充分发展的情况下其截面上的速度分布已有精确解。在不考虑流体中的轴向导热时，充分发展段的能量方程为（参看图 C.5.4）

$$\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) \tag{C.5.1.9}$$

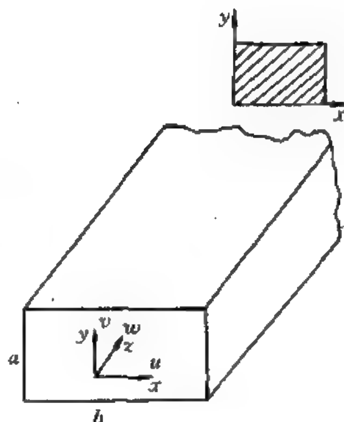


图 C.5.4

若计算域取 1/4 流动截面，则其边界条件为：

在固体壁面上，$T=T_w$；

在对称轴线上，温度的法向导数为零。

显然无因次温度与 z 轴无关。因此可以把管道内稳态的对流换热与非稳态的导热进行对比，即轴向坐标 z 相当于非稳态导热中的时间，都是单向坐标。在入口段截面上的速度与温度分布受入口截面处初始分布的影响，如同非稳态导热中过程的初始阶段的温度分布受初始条件影响一样。而在充分发展段，截面上的速度和无因次温度仅取决于边界条件而与入口初始温度分布无关。它相当于非稳态导热中的正规状况阶段。在非稳态导热中可以把时间变量与空间变量分离，因此在上述充分发展区中也可把温度表示成函数乘积的形式，即一个函数仅与 z 坐标有关，另一个函数仅与 x，y 有关。为此定义与 z 坐标无关的无因次过余温度为

$$\Theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_b} \tag{C.5.1.10}$$

由此得

$$T = -\Theta(T_w - T_b) + T_w$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\Theta \frac{\partial (T_w - T_b)}{\partial z}$$

令 D 为通道截面的某一特征尺寸（如矩形流道的高 a 或宽 b），并令无因次坐标为

$$X = x/D, \quad Y = y/D, \quad Z = z/(DPe) \tag{C.5.1.11}$$

其中 $Pe=\rho c_p w_m D/k$，为贝克列数，w_m 为截面平均流速。

将上述无因次温度和无因次速度代入（C.5.1.9）式，得

$$\frac{\partial (T_w - T_b)}{\partial Z} \frac{1}{T_w - T_b} = \frac{\dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}}{\dfrac{w}{w_m}\Theta} = -\lambda(\lambda > 0) \tag{C.5.1.12}$$

上式左端仅与 Z 有关，右端仅与 X，Y 有关，因此它们必然等于一常数。由此使无因次温度得以满足的方程为

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \lambda \frac{w}{w_m}\Theta = 0 \tag{C.5.1.13}$$

其边界条件为：在固体边界上 $\Theta=0$，在对称线上法向导数为零。

为使（C.5.1.13）式及边界条件封闭，需根据平均温度的定义补充一方程，即

$$T_w - T_b = \frac{\int (T_w - T) w \mathrm{d}A}{\int w \mathrm{d}A} \tag{C.5.1.14}$$

在上述计算域内 z 方向的动量方程可以简化为

$$\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = 0 \tag{C.5.1.15}$$

若定义无因次的速度为

$$W = \frac{\mu w}{-D^2 \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}} \tag{C.5.1.16}$$

并代入无因次坐标 $X=x/D$，$Y=y/D$，则可得（C.5.1.15）式的无因次的形式，即

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + 1 = 0 \tag{C.5.1.17}$$

此时的边界条件为，在固体边界上 $W=0$，在对称线上速度的法向导数为零。

利用 W 的定义，（C.5.1.14）式可以改写为

$$\frac{\int_A \dfrac{W}{W_m}\Theta \mathrm{d}A}{\int_A \dfrac{W}{W_m}\mathrm{d}A} = \frac{1}{A}\int_A \frac{W}{W_m}\Theta \mathrm{d}A = 1 \tag{C.5.1.18}$$

利用前面介绍的迭代法即可求得 fRe 和 Nu。其中，按阻力系数 f 和 Re 的定义有

$$fRe = \left(- D_e \frac{\dfrac{\partial p}{\mathrm{d}x}}{\dfrac{1}{2}\rho w_m^2} \right)\left(\frac{w_m D_e}{\nu} \right) = \frac{2}{w_m}\left(\frac{D_e}{D} \right)^2 \tag{C.5.1.19}$$

$$Nu = \frac{\alpha D_e}{k} = \frac{1}{4}\left(\frac{D_e}{D} \right)^2 \lambda \tag{C.5.1.20}$$

其中 D_e 为矩形流道的当量直径。

对于不同截面形状管内充分发展流动在恒壁温和恒热流下的计算值如表 C.5.2 所示。

表 C.5.2

截面形状	圆形	矩形 (a×b)						平行平面间通道	等边三角形
		$b/a=1$	$b/a=1.43$	$b/a=2.0$	$b/a=3.0$	$b/a=4.0$	$b/a=8.0$		
$Nu_{恒热流}$	4.364	3.61	3.73	4.12	4.79	5.33	6.49	8.235	3.00
$Nu_{恒壁温}$	3.66	2.98	3.08	3.39	3.96	4.44	5.60	7.54	2.35

5.1.3 带纵向直内肋的圆管

为了强化对流换热，工程上常采用内肋管，其中纵向直内肋的圆管用得较广。如图 C.5.5 所示，为简化起见，设肋片的厚度略而不计。肋片管内表面有均匀的热流 q_{w_1}，肋片上有均匀的热流 q_{w_2}。

由于对称性，取两肋间扇形区的一半作计算域即可。设肋片数为 N，则计算域的中心角为 π/N 弧度。此时柱面坐标中动量方程为

$$\left.\begin{aligned} &x\text{方向} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0 \\ &r\text{方向} \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ &\theta\text{方向} \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{C.5.1.21}$$

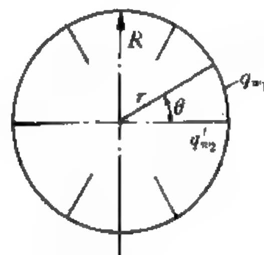


图 C.5.5

边界条件为

$$\left.\begin{array}{ll}\text{固体表面上} & w = 0 \\ \text{对称线上} & \dfrac{\partial w}{\partial \theta} = 0, r = 0, \dfrac{\partial w}{\partial r} = 0\end{array}\right\} \tag{C.5.1.22}$$

请注意在流动的充分发展区$\dfrac{\partial p}{\partial x}$=常数。

如果不计流动方向上流体的导热，则充分发展区的能量方程为

$$\rho w c_p \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{k}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) \tag{C.5.1.23}$$

边界条件为

$$\left.\begin{array}{l} r = 0,\quad \dfrac{\partial T}{\partial r} = 0;\quad r = R,\quad k\dfrac{\partial T}{\partial r} = q_{w_1}\text{（以进入区域为正）} \\ \theta = 0,\quad -k\dfrac{\partial T}{r\partial \theta} = q_{w_2}\text{（肋片上）} \\ \dfrac{\partial T}{\partial \theta} = 0\text{（其它区域）} \\ \theta = \dfrac{\pi}{N},\quad \dfrac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \end{array}\right\} \tag{C.5.1.24}$$

将动量方程（C.5.1.21）式无因次化，则得

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial W}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial W}{\partial \theta}\right) + 1 = 0 \tag{C.5.1.25}$$

相应的边界条件为

$$\left.\begin{array}{l} \text{固体表面上，}\quad W = 0 \\ \text{对称线上，}\quad \dfrac{\partial W}{\partial \theta} = 0 \\ \eta = 0,\quad \dfrac{\partial W}{\partial \eta} = 0 \end{array}\right\} \tag{C.5.1.26}$$

其中

$$W = \frac{\mu w}{-R^2\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}} \qquad \text{为无因次速度} \tag{C.5.1.27}$$

$$\eta = \frac{r}{R} \qquad \text{为无因次坐标} \tag{C.5.1.28}$$

为将能量方程无因次化，令无因次温度为

$$\Theta = \frac{T - T_b}{q_0 R/k} \tag{C.5.1.29}$$

其中 q_0 为折算到圆管表面上的平均热流密度，即

$$q_0 = \frac{2\pi R q_{w_1} + 2NHq_{w_2}}{2\pi R} \tag{C.5.1.30}$$

上式中 H 为肋高。引入 q_0 是为了和不带肋的光管进行比较。

利用热平衡关系可以将（C.5.1.23）式的左端改写为

$$\rho c_p w\frac{\partial T}{\partial x} = \rho c_p w_m A\left(\frac{w}{w_m}\right)\frac{1}{A}\frac{\partial T_b}{\partial x} = \frac{2\pi R q_0}{2N}\,\frac{w}{w_m}\,\frac{1}{\dfrac{\pi R^2}{2N}} = \frac{2q_0 w}{R w_m}$$

其中 A 为计算域的流动截面积。

将上式和（C.5.1.29）式代入（C.5.1.23）式，则得无因次的能量方程为

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right)+\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)=\frac{2w}{w_m} \tag{C.5.1.31}$$

相应的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&\eta=0,\quad \frac{\partial\Theta}{\partial\eta}=0;\quad \eta=1,\quad \frac{\partial\Theta}{\partial\eta}=\frac{q_{w_1}}{q_{w_2}}=\frac{1}{1+\frac{NGB}{\pi}}\\&\theta=0,\quad -\frac{1}{\eta}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}=\frac{q_{w_2}}{q_0}(\text{肋片上}),\quad \frac{\partial\Theta}{\partial\eta}=0(\text{其它区域})\\&\theta=\frac{\pi}{N},\quad \frac{\partial\Theta}{\partial\theta}=0\end{aligned}\right\} \tag{C.5.1.32}$$

其中 $G=q_{w_2}/q_{w_1}$，$B=H/R$。

同样为了封闭方程（C.5.1.31）式和（C.5.1.32）式，还需附加一方程。由无因次温度可得

$$\Theta_b=\frac{\int_A \Theta W\mathrm{d}A}{\int_A W\mathrm{d}A}=\frac{T_b-T_b}{\frac{q_0R}{k}}=0 \tag{C.5.1.33}$$

在选定的几何参数 N 下，联立数值求解（C.5.1.25）及（C.5.1.26）两式，然后利用求得的$\frac{W}{W_m}$，在相同的 N，B 及选定的热流比 G 下，联立求解（C.5.1.31），（C.5.1.32）和（C.5.1.33）3 式，即可求得无因次温度 Θ 。此时阻力系数和 Nu 数分别为

$$fRe=\left(-D_e\frac{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}}{\frac{1}{2}\rho w_m^2}\right)\left(\frac{w_mD_e}{\nu}\right)=\frac{8}{w_m}\left(\frac{D_e}{D}\right)^2 \tag{C.5.1.34}$$

$$Nu=\frac{q_0}{T_{w,m}-T_b}\frac{D}{k}=\frac{2}{\Theta_{w,m}} \tag{C.5.1.35}$$

图 C.5.6 是陶文铨对上述纵向直内肋圆管的计算结果。由图可见，在一定的相对肋高 B

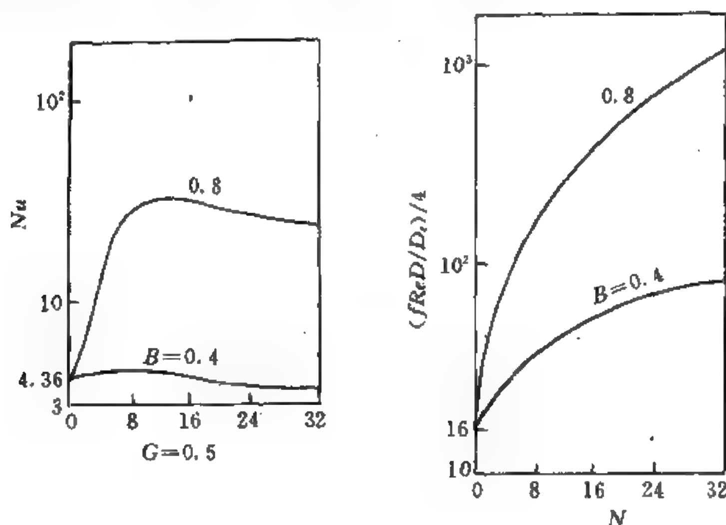


图 C.5.6

下，肋片数存在一最佳值，此时 Nu 最大。该图还表示随着肋片数减少，阻力和换热都趋近于光滑圆管。

帕坦卡等人用混合长度模型计算了纵向直肋管内充分发展的湍流传热。其计算结果及与卡纳弗斯的实验结果的比较见图 C.5.7。

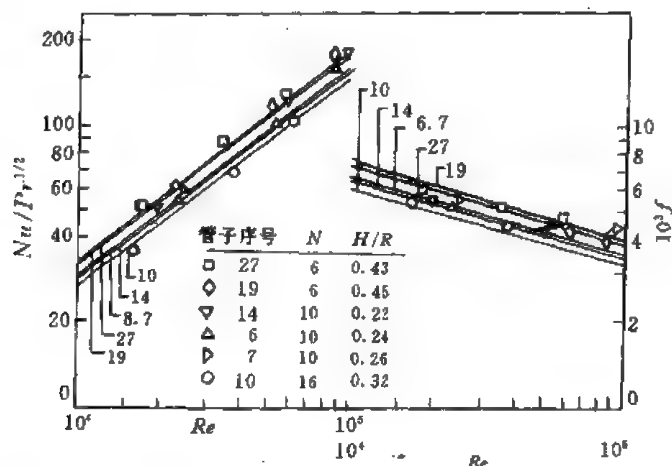


图 C.5.7

5.1.4 热进口段的换热

研究热进口段的换热在核动力工程上有一定的实用价值。我们在此仅讨论流动已充分发展，而温度则刚刚开始发展的热进口段。这相当于流动充分发展以前管壁是绝热的，而流动充分发展以后，管壁与外界发生热交换。对于油类（$Pr>5$），温度边界层的发展大大落后于速度边界层的发展，即其热进口段相当长，上述假设可以认为是合理的。

对于忽略耗散热的低速流动，在轴向导热可以忽略时，其换热的计算方法同前面介绍的一样。对于等温圆管热进口段的传热参数随无因次长度 L 的变化情况如表 C.5.3 所示。该表中 Nu_x 为 Nu 数的局部值，Nu_m 为平均值，无因次长度为

$$L=\frac{x/R}{RePr} \tag{C.5.1.36}$$

表 C.5.3

L	Nu_x	Nu_m	L	Nu_x	Nu_m
0.001	12.80	12.29	0.08	3.77	4.86
0.004	8.03	12.09	0.10	3.71	4.64
0.01	6.00	8.92	0.20	3.66	4.15
0.04	4.17	5.81	∞	3.66	3.66

从表 C.5.3 可以看出，$L=0.1$ 是热进口段的无因次长度，由（C.5.1.36）式可知，热进口段的长度为

$$x = 0.05(RePr)D \quad (C.5.1.37)$$

对于空气，$Pr \approx 0.7$，当 $Re=500$ 时，热进口段的长度 $x=17.5D$。对于油类，比如 $Pr=100$，同样 $Re=500$ 时，$x=2500D$，因此对高 Pr 数的流体热进口段很长，它将在换热器中起主要作用，在换热器计算中应对此点予以注意。

恒热流下热进口段的计算结果如表 C.5.4 所示。

表 C.5.4

L	Nu_x	L	Nu_x
0.002	12.00	0.040	5.19
0.004	9.93	0.100	4.51
0.010	7.49	∞	4.36
0.020	6.14		

5.2 外掠物体换热的数值计算

在高 Re 的流动中，在物体壁面附近总存在一个很薄的但起很大作用的粘性边界层，因此对流换热问题一般可区分为边界层和非边界层（即有回流）两大类。从数学上讲边界层方程至少对一个空间坐标而言是抛物型的，具有明显的特征流动方向，而非边界层方程则是椭圆型的。

工程上许多流动与换热属于边界层类型，例如边界层发生脱离以前外掠物体的绕流，各种射流，前述管道流动以及大空间中竖壁的自然对流等。

若在 x，y，z 坐标系中以 x 表示主流方向，则当流动与换热特性在 y，z 两个方向上变化时就是一个三维的边界层问题。若仅在一个方向上发生变化则为二维平面边界层问题。流体绕对称轴的流动也是二维问题。在数值计算中对于三维边界层在垂直于主流方向的截面上是一个二维椭圆型问题的代数方程组。

因为常物性、无内热源的流体流动与对流换热在某些情况下其速度场和温度场具有相似解，即选用合适的特征长度和特征速度后不同截面上的无因次速度分布相似，或选用合适的特征长度及特征温度后不同截面上的无因次温度分布相似。因此只要求解其中一个截面上的无因次速度分布和无因次温度分布也就求得了各个截面上的分布。这种相似解法通过变量变换把一组偏微分方程转化为常微分方程，这样就可使数值计算大为简化。

求解非边界层问题，即有回流问题的流场时，可以用压力或速度作为基本变量（即原始变量法），也可取涡量、流函数作变量（即涡量流函数法）。这些方法在前几章已有详细介绍。封闭系统中的流动和换热计算通常采用原始变量法，在自然对流中则多采用涡量流函数法。

5.2.1 外掠楔形物的对流换热

外掠楔形物体的流动与换热是层流相似解的典型例子。工程上计算的目的是为了获得壁面上的切应力和热流密度。

图 C.5.8 外掠楔形体的控制方程为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\\
&u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\
&u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}
\end{aligned}\right\} \tag{C. 5. 2. 1}
$$

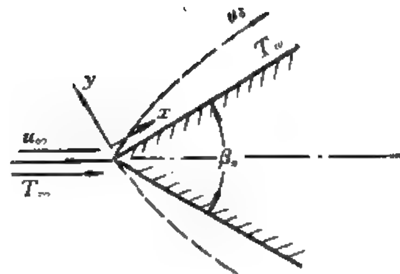


图 C. 5. 8

相应的边界条件为

$$
\left.\begin{aligned}
&y=0, u=v=0, T=T_w\\
&y\to\infty, u\to u_\infty, T\to T_\infty
\end{aligned}\right\} \tag{C. 5. 2. 2}
$$

其相似变换的关系式为

$$
\left.\begin{aligned}
&\eta=y\sqrt{\frac{m+1}{2}}\sqrt{\frac{u_\delta}{\nu x}}\\
&\psi(x,y)=\sqrt{\nu x u_\delta}\sqrt{\frac{2}{m+1}}f(\eta)\\
&U_\delta=C_1x^m\\
&T_w-T_\infty=C_2x^n\\
&\Theta=\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}
\end{aligned}\right\} \tag{C. 5. 2. 3}
$$

外掠楔形物的阻力系数为

$$
c_f=(f''(0)\Big/\sqrt{Re_x})\ \sqrt{2/(m+1)} \tag{C. 5. 2. 4}
$$

外掠楔形物的局部 Nu 数为

$$
Nu_x=-\sqrt{\frac{m+1}{2}}\sqrt{Re_x}\Theta'(0) \tag{C. 5. 2. 5}
$$

上述 3 式中

$$
-m=\frac{\mathrm{d}p/(\rho u_\delta^2)}{\mathrm{d}x/x} \tag{C. 5. 2. 6}
$$

即 m 可以看成无因次压力梯度的负值。ψ (x, y) 是流函数，而 f (η) 则为无因次流函数。

经相似变换后，(C. 5. 2. 1) 式转换成如下常微分方程

$$
\left.\begin{aligned}
&f'''+ff''+\frac{2m}{m+1}(1-f'^2)=0\\
&\Theta''+Prf\Theta'-\frac{2n}{1+m}Prf'\Theta=0
\end{aligned}\right\} \tag{C. 5. 2. 7}
$$

相应的边界条件为

$$
\left.\begin{aligned}
&\eta=0,\quad f=f'=0,\quad \Theta=1\\
&\eta\to\infty,\quad f'\to 1,\quad \Theta\to 0
\end{aligned}\right\} \tag{C. 5. 2. 8}
$$

在此上角码 “′” 表示对 η 的导数，对其它变量的导数则用偏微分符号表示。

因为 $y\to\infty$时的边界条件在数值计算时只能近似地实现。因此通常采用的方法是：选定一个 η_{max}，如果在 $\eta=\eta_{max}$处能较好地实现 $\eta\to\infty$的条件，则把 η_{max}作为趋近于无穷大的代表。但这一η_{max}无法在计算前确定，只能在计算过程中作出抉择。根据前面介绍过的数值方法，先计算出 f 的收敛解，然后再求得无因次温度 Θ，有了 f 和 Θ 即可由(C. 5. 2. 5)及(C. 5. 2. 6)两式分别求得阻力系数和 Nu 数。

表 C.5.5 表示了均匀壁温下（即 $n=0$），对于不同 m 及 Pr 由数值计算得到的 $\left[-\sqrt{\frac{m+1}{2}}\Theta'(0)\right]$ 值。将该值乘上 $Re_x^{\frac{1}{2}}$，即为局部 Nu 数。

图 C.5.9 表示了外掠楔形物恒壁温下的 Nu 数（Nu_T）和恒热流下的 Nu 数（Nu_H）之比。

表 C.5.5　不同 Pr 数下 $\left[-\sqrt{\frac{m+1}{2}}\Theta'(0)\right]$ 之值

m	Pr				
	0.7	0.8	1.0	5.0	10.0
−0.0753	0.242	0.253	0.272	0.457	0.570
0.0	0.292	0.307	0.332	0.585	0.730
0.111	0.331	0.348	0.378	0.669	0.853
0.333	0.384	0.403	0.440	0.792	1.013
1.0	0.496	0.523	0.570	1.043	1.334
4.0	0.813	0.858	0.938	1.736	2.236

工程中常常会遇到壁面具有法向速度的楔形流。例如为了防止气流分离，减小阻力，在壁面上开孔吸走边界层内的一部分流体；高温设备中多孔材料的发散冷却，宇航中采用金属烧蚀冷却方式来保护壁面都是属于这种情况。此时边界层的方程仍为（C.5.2.1）式，但边界条件却为，$y=0$，法向速度 $v\neq0$。显然若边界层方程仍有相似解，则要求壁面的法向速度按一定的规律变化，以使 $f(0)=$常数。此后再采用数值计算。以上方法在同时存在热交换和质交换的边界层流动中经常采用。

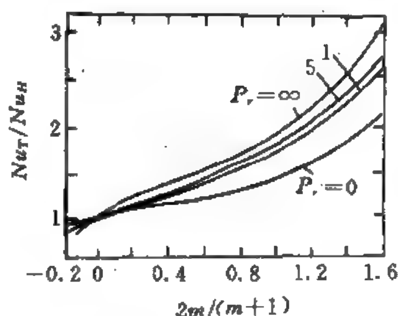


图　C.5.9

5.2.2　绕流圆管的层流换热

管外绕流是换热设备中最常见的一种换热方式。由于在圆柱体迎风侧形成边界层流动及脱离，而在圆柱体的背侧则形成回流区和尾流恢复区，因此流动和换热都相当复杂，无法用解析法求解。本篇第四章第 6 节中已经讨论了圆柱绕流的数值计算问题，并给出了圆柱振荡时流线的变化情况。下面我们介绍绕流圆管层流换热的一些数值计算结果。

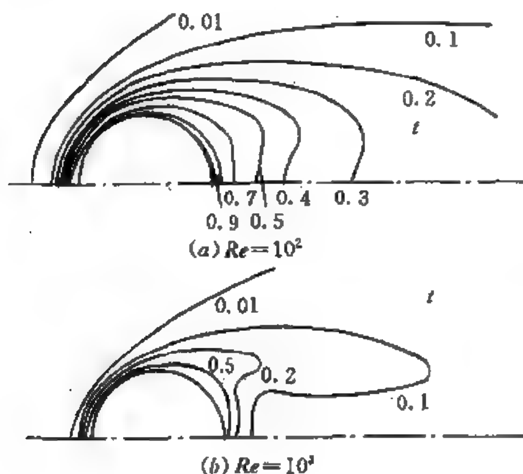


图　C.5.10

图 C.5.10 表示了温度场随 Re 数变化而产生的变化。当 Re 增加时迎风侧的温度边界层变薄，等温线不断向柱体密集。圆柱体的背侧等温线也随 Re 数的增加而向柱体表面靠拢，这是因为回流量增加，加强了对流换热。

图 C.5.11 表示了局部换热系数的周向分布。从图上可以看出，随着 Re 增大圆柱体背侧

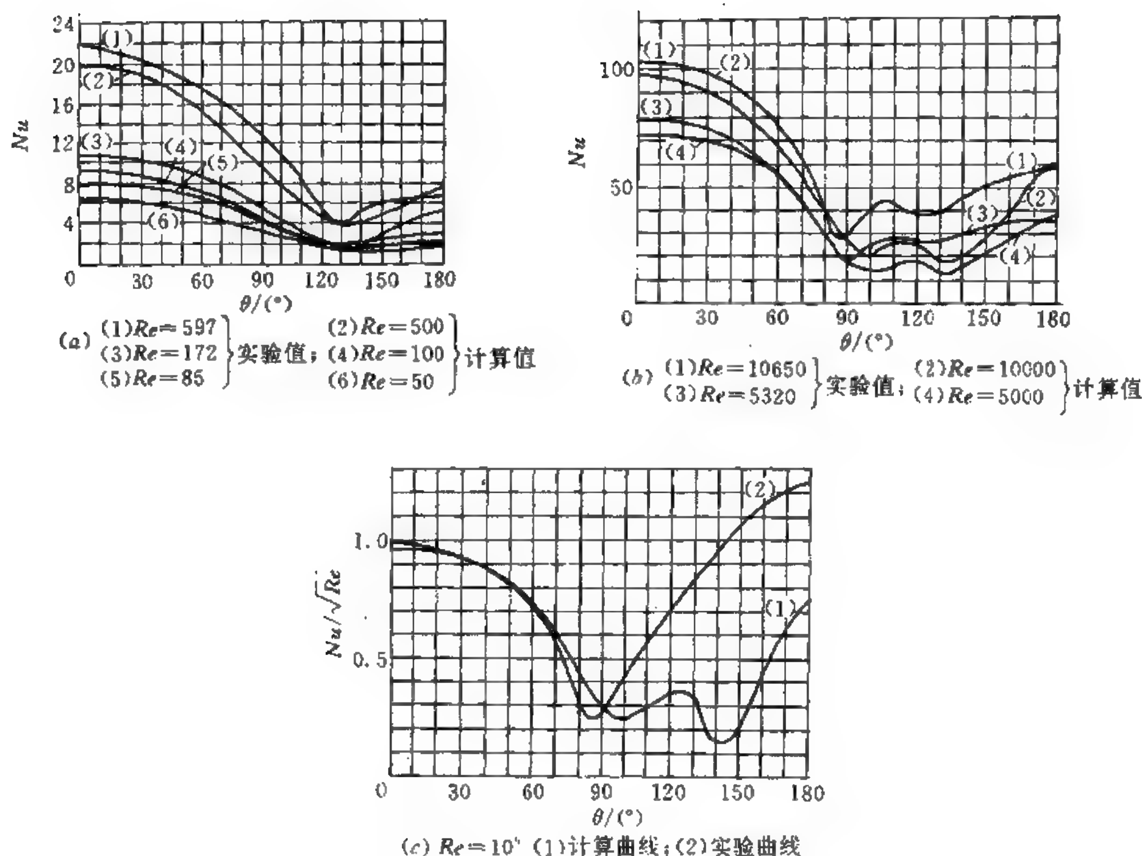


图 C.5.11

的换热系数不断增加。此外还可以发现相应于边界层二次脱离，换热系数出现两个极小值。

图 C.5.12 是平均换热系数计算值与实验值的比较。由图上可以看到，计算值和实验值相当一致。

图 C.5.13 是计算的局部换热系数与实验值的比较。从图上可以看到计算值和实验值在低 Re 下（$Re<10^3$）符合得较好。中等 Re 时（$10^3<Re<10^4$），其变化趋势是一致的，均显示出因边界层的分离而形成的换热系数的两个极小值。高 Re 下（$Re=10^5$），在回流区的计算值与实验值有较大的偏差。

从图上比较可以看出，计算值大多低于实验值，这一点在高 Re 数时更为明显，造成这种误差的原因是：风洞实验时来流总存在一定程度的初始

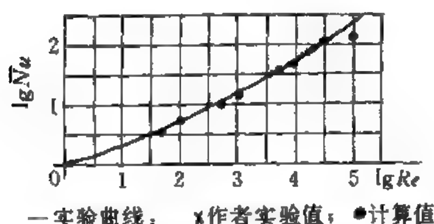


图 C.5.12

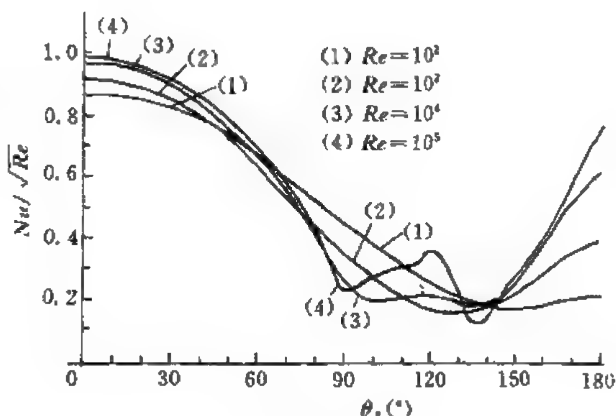


图 C.5.13

湍流度，这样就使实验值偏高；另外边界层脱离形成的湍流特性使层流到湍流的过渡点向前移，而层流计算模型无法考虑这些湍流因素，致使计算值偏低。

5.3 周期性通道流动对流换热的数值计算

为了强化对流换热，工程上广泛应用几何结构呈周期性变化的流动通道（参看图C.5.14），特别是在一些紧凑式的热交换器中。在充分发展的情况下各物理量沿流动方向上也呈某种周期性的特性。这样就给这一类对流换热的数值计算带来一些新的特点。

由于通道流的几何结构呈周期性变化，故研究这类问题可取一个周期段作为研究对象。我们先考察流动情况。以含横向交错排列翅片的平行通道为例。取一个周期段（图C.5.15中阴影部分）作为计算域。设此几何周期段的长度为 L，则流动进入充分发展状态后有

$$u(x,y)=u(x+L,y)=u(x+2L,y)=\cdots \tag{C.5.3.1}$$

$$v(x,y)=v(x+L,y)=v(x+2L,y)=\cdots \tag{C.5.3.2}$$

$$p(x,y)-p(x+L,y)=p(x+L,y)-p(x+2L,y)=\cdots \tag{C.5.3.3}$$

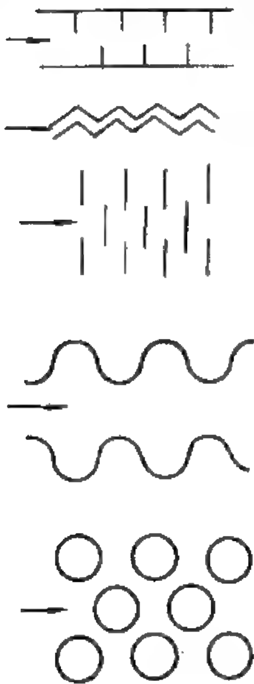


图 C.5.14

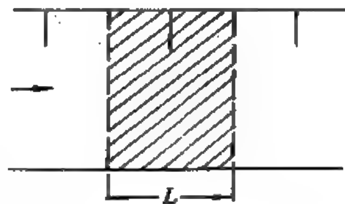


图 C.5.15

由于流动的周期性，所以一个周期范围内的计算结果就可代表整个区域。

由（C.5.3.3）式有

$$p(x,y)-p(x+L,y)=\beta L=\text{常数} \tag{C.5.3.4}$$

显然 β 为一个周期内的平均压力梯度。

定义一个新的压力函数

$$P(x,y)=p(x,y)+\beta x \tag{C.5.3.5}$$

则有

$$P(x,y)=P(x+L,y)=P(x+2L,y)=\cdots \tag{C.5.3.6}$$

即 $P(x,y)$ 具有与 u，v 相同的周期性质。将 $p=P-\beta x$ 代入动量方程，并利用连续性方程即可得到关于 u，v，P 及修正压力函数的控制方程组。对这些方程组可以直接用 SIMPER 或 SIMPLE 法求解。

初看起来，上述计算会有困难，因为我们并不知道计算域上、下游边界上的速度和温度值。但是只要注意到周期流的特点，这一困难就会消失。流体离开这一计算域的同时就进入

下一个同样的计算域。从概念上讲，这一情况就好象离开该计算域的流体又重新在上游端返回到同一计算域。根据这一思想，上、下游的边界并不构成真正的边界位置。所有沿流动方向上的点都象是处在一个无始无终的循环回路中。

利用上述观点可以将（C.5.3.1），（C.5.3.2）及（C.5.3.6）3式写成一通用形式，即

$$\Phi(x,y)=\Phi(x+L,y)=\cdots \quad \Phi=u,v,P \tag{C.5.3.7}$$

将计算域分成如图C.5.16所示的有限网格点，其中$i=1$和$i=N$分别为计算域的上游和下游边界。根据周期性条件（C.5.3.7）式可写成

$$\Phi_{0,j}=\Phi_{N-1,j} \tag{C.5.3.8}$$

$$\Phi_{1,j}=\Phi_{N,j} \tag{C.5.3.9}$$

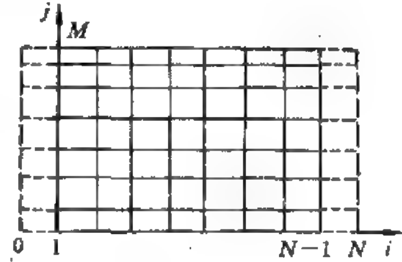


图 C.5.16

因此由于周期性条件沿$i=1$列与$i=N$列的差分方程应当一致。这样求解域可限于$i=1$，$N-1$。将$i=1$列出Φ差分方程中所含的$\Phi_{0,j}$用$\Phi_{N-1,j}$代替；$i=N-1$列上Φ差分方程中所含的$\Phi_{N,j}$用$\Phi_{1,j}$代替。这样，域内各点的Φ值的差分方程不再含有域外点的有关项，方程和变量得以封闭。因此利用周期性条件把进出口流场反复回代即可求得速度场。为了加快反复回代的速度，一种新的算法是，将速度传递区域由一条线发展到2～3条线，不仅从出口区域向入口区域回送，也同时从入口区域向出口区域回送，从而加快了迭代的收敛速度。

在进行周期性充分发展的通道流的温度场的计算时，通常应区分是恒热流还是恒壁温的情况。恒热流时温度分布沿流动方向亦应满足周期性条件，即

$$\begin{aligned}T(x+L,y)-T(x,y)&=T(x+2L,y)-T(x+L,y)\\&=\cdots=\Delta T=\frac{Q}{mc_p}\end{aligned} \tag{C.5.3.10}$$

其中，Q为单位时间内外界流进计算域的热量，m为流过的质量流率，c_p为流体比热。

对如图C.5.16所示的计算域，有

$$\Delta T=T_{N-1,j}-T_{0,j}=T_{N,j}-T_{1,j} \tag{C.5.3.11}$$

利用已经求得的速度场加上上述周期性条件，从温度场的控制方程用与前面同样的数值方法即可求得温度场。

对于恒壁温的情况，设壁温为T_w，定义无因次温度Θ为

$$\Theta=\frac{T-T_w}{T_b-T_w} \tag{C.5.3.12}$$

其中T_b为每一截面上的平均温度。

周期性充分发展时有

$$\Theta(x,y)=\Theta(x+L,y)=\Theta(x+2L,y)=\cdots \tag{C.5.3.13}$$

对如图C.5.16的计算域，将上式写成离散化的形式，且不失一般性地假设$T_w=0$，经整理后得

$$\frac{T_{1,j}}{T_{N,j}}=\frac{T_{0,j}}{T_{N-1,j}}=\frac{T_{b,0,j}}{T_{b,N-1,j}} \tag{C.5.3.14}$$

在用已知速度场及周期性条件求解时应注意，因为预先并不知道一个计算域上的截面平均温度比 $T_{b,0,j}/T_{b,N-1,j}$，所以这个值需用迭代法确定。求解时可先假设一非零的 $T_{b,0,j}$ 及 $T_{b,N-1,j}$，在获得一组解后，即可由解得的 $N-1$ 列上的全部温度 $T_{N-1,j}$ 来求得全截面流体的平均温度 $T_{b,N-1,j}$，此时应考虑到截面上流体速度的不同，即

$$T_{b,N-1,j} = \sum_{j=1}^{M-1} T_{N-1,j} A_{N-1,j} w_{N-1,j} \Big/ \sum_{j=1}^{M-1} A_{N-1,j} w_{N-1,j} \tag{C.5.3.15}$$

其中 $A_{N-1,j}$ 和 $w_{N-1,j}$ 分别表示在流道 $N-1$ 截面上，第 j 个网格点控制体在与流动方向垂直的面上的面积和流速。

求得这个新的 $T_{b,N-1,j}$ 后，将其代入，重新迭代求解，并在迭代过程中不断更新。当然这样求得的温度场的绝对值与原始设定值 $T_{b,0,j}$ 有关，然而解的无因次形式及计算的 Nu 数却与所设的 $T_{b,0,j}$ 无关。

帕坦卡用上述方法计算了如图 C.5.17 所示的周期性的通道流。图 C.5.18 表示了 $Re=1040$ 时计算得到的流场。从图中流线可以看出，由于流体为要绕过横板不得不转一个大弯，因此在每一块板后都形成一个大回流区。

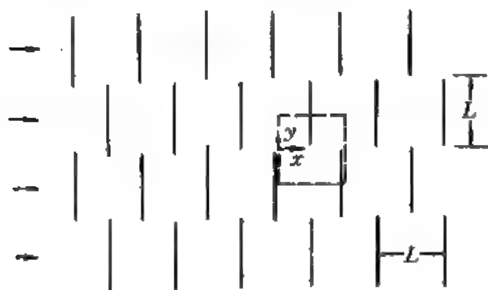


图 C.5.17

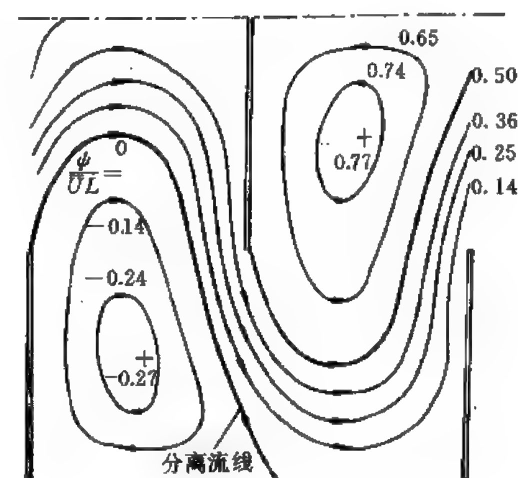


图 C.5.18

图 C.5.19 表示了 $Pr=0.7$ 时，计算得到的 Nu 数。从图中可以看出，由于流体的撞击作用，平板前面 Nu 数较高，而在其后的回流区中 Nu 数要低得多，且随着 Re 增加 Nu 增加。这一结果和普通充分发展的管道流不同，在普通的充分发展的管道流中，Nu 数与 Re 无关。

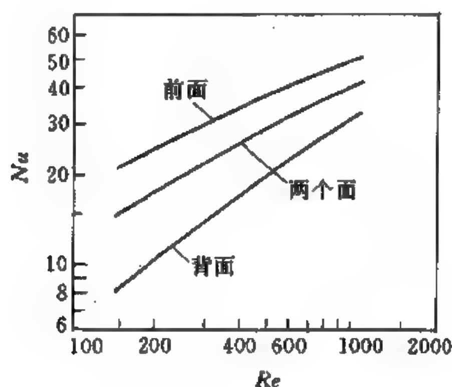


图 C.5.19

5.4 封闭空间中的流动与换热计算

封闭空间中的流动与换热也是工程中常见的对流换热问题。引起封闭空间中的流体流动的原因主要是流体与壁面之间存在温差所致。有时也是由于切应力的作用（如空腔顶盖运动会在空腔内引起流动）和离心力的作用（旋转空腔内的流动）。在此我们仅讨论由于自然对流所引起的封闭空间中对流换热的数值计算。

5.4.1 矩形封闭空腔

为简单起见我们假设有一倾斜的矩形截面的二维空腔（参看图 C.5.20），则层流自然对流的动量和能量方程分别为：

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+g\rho\sin\alpha \quad (C.5.4.1\text{-}1)$$

$$\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)-g\rho\cos\alpha \quad (C.5.4.1\text{-}2)$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho h)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+S \quad (C.5.4.2)$$

为求解上述方程，通常采用 Boussinesq 假设，即（1）忽略流体中的粘性耗散；（2）常物性（除密度外）；（3）对密度仅考虑动量方程中与体积力有关的项，其余各项中的密度仍视作常数。若以冷面温度 T_c 作参考温度，则重力项中的密度可表成

$$\rho=\rho_c[1-\beta(T-T_c)] \quad (C.5.4.3)$$

其中 ρ_c 为对应于 T_c 的流体密度。

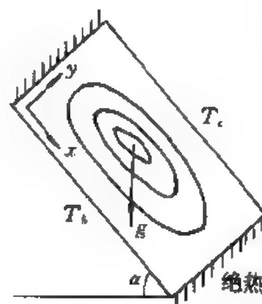


图 C.5.20

为使（C.5.4.1-2）式简洁，引入有效压力 P，定义

$$P=p-\rho_c gy\cos\alpha+\rho_c gx\sin\alpha \quad (C.5.4.4)$$

则

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}&=\frac{\partial p}{\partial x}+\rho_c g\sin\alpha\\ \frac{\partial P}{\partial y}&=\frac{\partial p}{\partial y}+\rho_c g\cos\alpha\end{aligned}\right\} \quad (C.5.4.5)$$

根据 Boussinesq 假设，并将（C.5.4.3）及（C.5.4.5）两式代入（C.5.4.1-2）及（C.5.4.2）式中，整理后得

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\rho g\beta(T-T_c)\sin\alpha \quad (C.5.4.6\text{-}1)$$

$$\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\rho g\beta(T-T_c)\cos\alpha \quad (C.5.4.6\text{-}2)$$

$$\frac{\partial(\rho uT)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vT)}{\partial y}=\left(\frac{k}{c_p}\right)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \quad (C.5.4.7)$$

在上述各式中，为书写简洁起见，密度 ρ_c 中的下标“c”已省略。上述方程形式已与通用的对流—扩散方程完全一致，因此可以采用前面各章介绍过的算法。其中守恒型的差分格式

用于封闭体系内的流场计算最为有利。应当注意，当冷热表面间温差较大（或换热表面的热流密度比较高）时，采用Boussinesq假设会产生较大的误差。此时不仅是ρ与温度有关，而且μ，c_p，k也与温度有关。计算自然对流时考虑这种变物性的影响，是近年来数值计算研究中一个引人注目的问题。

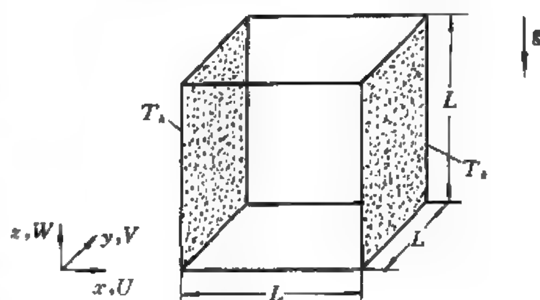


图 C.5.21

在立方体内的自然对流换热则呈三维特性。图C.5.21表示了这样一个立方体，其左侧面维持一均匀的高温T_h，右侧面维持一均匀的低温T_c，其它4个面绝热。其数值计算结果表示在图C.5.22至图C.5.24中。其中图C.5.22表示x-y平面上的温度分布。图C.5.23表示x-y平面上的垂直速度分布，图C.5.24表示y-z平面上的水平速度分布。

当Re数很大时，在封闭腔内的自然对流呈湍流状态。Heiss对立方体空腔内高Re数的情

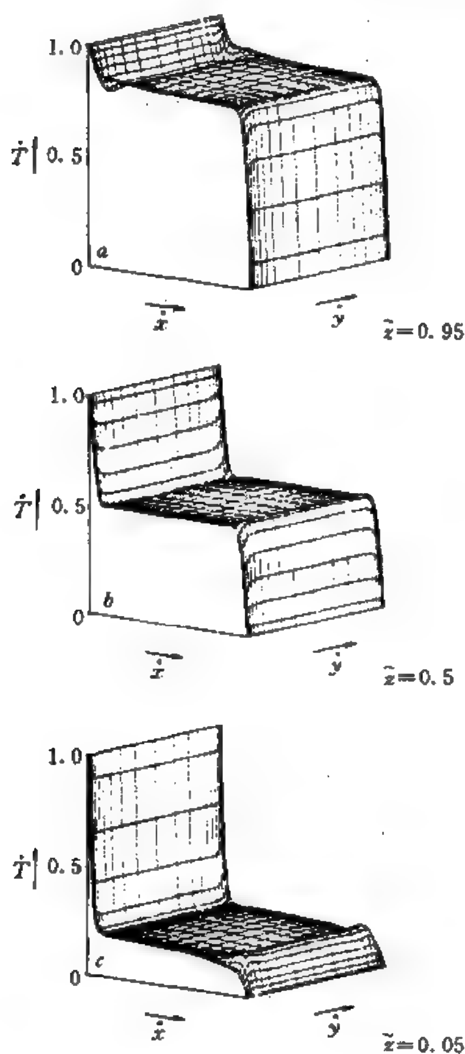


图 C.5.22

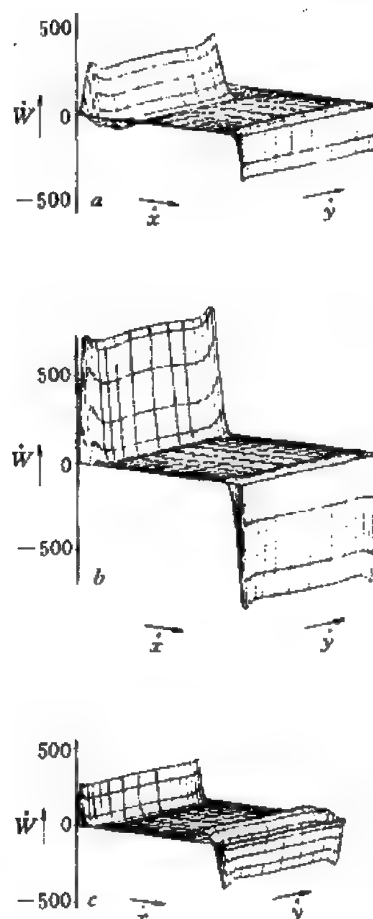


图 C.5.23

况用 k-ϵ 模型进行了数值计算，其计算结果如表 C.5.6 所示。图 C.5.25 则表示了 $Re=10^{10}$，10^{11}和 10^{12}时空气立方体空腔内的流线和等温线。

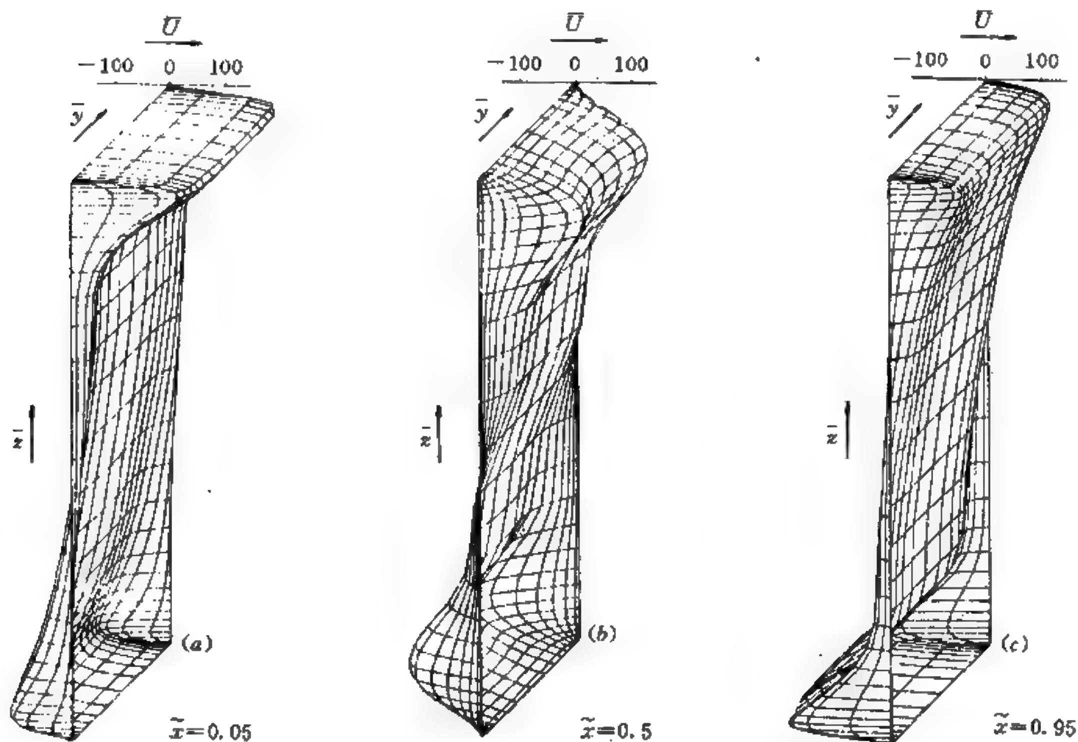


图 C.5.24

表 C.5.6

流 体	空 气	空 气	空 气	空 气	水
Ra	10^{10}	10^{11}	10^{12}	2.5×10^{10}	2.5×10^{10}
Pr	0.66	0.66	0.66	0.66	4.4
ΔT，(K)	59	175	737	770	43.4
L，(m)	5	7.5	10	2.88	0.25
T_m，(C)	500	500	500	500	39
网格点	31×31	35×35	37×37	33×33	31×31
$\tilde{u}_{max}$ $(\tilde{x}=0.5)$	2.40×10^3	6.63×10^3	1.49×10^4	3.58×10^3	2.64×10^3
$\tilde{w}_{max}$ $(\tilde{z}=0.5)$	1.50×10^4	3.93×10^4	1.10×10^5	2.13×10^4	3.42×10^4
Nu	120	259	542	159	134
ψ_{max}	483	1266	2884	708	620
$\tilde{k}_{max}$	1.75×10^7	1.36×10^8	9.68×10^8	3.97×10^7	1.02×10^8
$\tilde{k}_{max}$ $(\tilde{z}=0.5)$	1.59×10^7	1.25×10^8	5.82×10^8	3.81×10^7	6.80×10^7
$\tilde{\epsilon}_{max}$	1.57×10^{12}	5.48×10^{13}	2.20×10^{15}	6.87×10^{12}	2.94×10^{13}
$\tilde{\epsilon}_{max}$ $(\tilde{z}=0.5)$	1.35×10^{12}	4.52×10^{13}	2.00×10^{15}	6.69×10^{12}	2.55×10^{13}
$(\nu_T/\nu)_{max}$	62.3	165	362	100	10.2
$(\nu_T/\nu)_{max}$ $(\tilde{z}=0.5)$	40.7	114	153	67.2	6.2

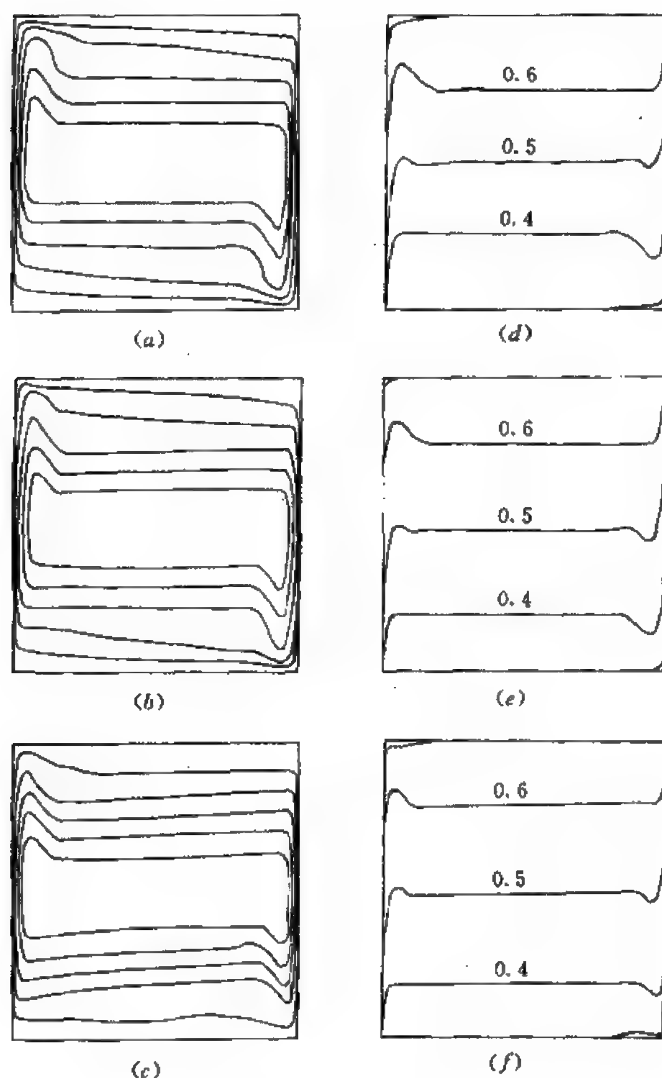


图 C.5.25

5.4.2 水平环形空间

同心或偏心的水平环形夹层中的自然对流也是封闭空间中一种典型的对流换热，如大电流母线冷却系统就属于这种情况。

参看图C.5.26所示的环形同心夹层。在极坐标中采用Boussinesq假设后，稳态层流自然对流的控制方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}=0 \quad \text{(C.5.4.8)}$$

$$\rho\left(\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+v\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{uv}{r}\right)$$
$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\mu\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{u}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)$$
$$-g\beta\rho(T-T_0)\sin\theta \quad \text{(C.5.4.9-1)}$$

$$\rho\left(\frac{u}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}+v\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{u^2}{r}\right)$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial r}+\mu\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$+g\beta\rho(T-T_0)\sin\theta \qquad \text{(C. 5. 4. 9-2)}$$

$$\rho\left(\frac{u}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+v\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\left(\frac{k}{c_p}\right)\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right) \qquad \text{(C. 5. 4. 10)}$$

其中(C. 5. 4. 9-1)，(C. 5. 4. 9-2)两式中 P 为由(C. 5. 4. 4)式所决定的有效压力。T_0 为外壳温度。

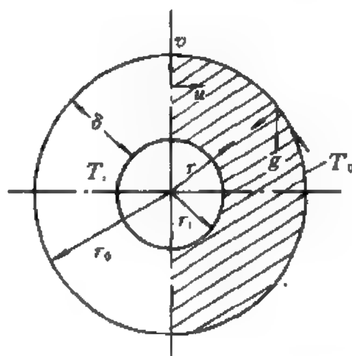


图 C. 5. 26

定义流函数为 $\quad u=\dfrac{\partial \psi}{\partial r},\quad v=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta}$ (C. 5. 4. 11)

定义涡量为 $\quad \omega=\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial v}{\partial \theta}-\dfrac{\partial}{\partial r}(ru)\right]$ (C. 5. 4. 12)

再定义下列无因次量

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\psi}=\frac{\psi}{a},\quad \eta=\frac{r}{\delta},\quad \Theta=\frac{T-T_0}{T_i-T_0}\\&U=\frac{u\delta}{a},\quad V=\frac{v\delta}{a},\quad \tilde{\omega}=\frac{\omega}{(a/\delta^2)}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(C. 5. 4. 13)}$$

以 r 乘 (C. 5. 4. 9-1) 式并对 r 求导，然后减去 (C. 5. 4. 9-2) 式对 θ 求导的结果，同时考虑到 (C. 5. 4. 13) 式，最后整理得如下的无因次控制方程

$$\nabla^2\bar{\psi}=\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial \eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial \psi}{\partial \eta}+\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}=\tilde{\omega} \qquad \text{(C. 5. 4. 14)}$$

$$\nabla^2\tilde{\omega}=\frac{1}{Pr}\left(V\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \eta}+\frac{U}{\eta}\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \theta}\right)-Ra_\delta\left(\sin\theta\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}+\frac{1}{\eta}\cos\theta\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) \qquad \text{(C. 5. 4. 15)}$$

$$\nabla^2\Theta=V\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}+\frac{U}{\eta}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \qquad \text{(C. 5. 4. 16)}$$

其中 Rayleigh 数 $\qquad Ra_\delta=\rho g\beta\delta^3(T_i-T_0)/\mu a \qquad$ (C. 5. 4. 17)

由于对称性，计算域取半个环形区即可，其边界条件为

对称线上 $\qquad \tilde{\psi}=\dfrac{\partial V}{\partial \theta}=U=\tilde{\omega}=\dfrac{\partial \Theta}{\partial \theta}=0 \qquad$ (C. 5. 4. 18)

在内圆柱面上 $\qquad \bar{\psi}=U=V=0,\quad \tilde{\omega}=\dfrac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial \eta^2},\quad \Theta=1 \qquad$ (C. 5. 4. 19)

在外圆柱面上 $\qquad \bar{\psi}=U=V=0,\quad \tilde{\omega}=\dfrac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial \eta^2},\quad \Theta=0 \qquad$ (C. 5. 4. 20)

请注意上述边界条件中，壁面上的涡量采用流函数方程计算。在壁面上$\dfrac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta}=0$，故仅留下法向导数部分。

在上述无因次控制方程组中，流函数，涡量和温度 3 个变量是互相耦合的，因此通常采用的求解步骤是：

(1) 假设$\bar{\psi}^{(0)}$，例如均取 0，于是 (C. 5. 4. 16) 式简化成一纯热扩散方程；求解该方程得 $\Theta^{(0)}$，这相当于以热扩散的工况作为初值。

(2) 利用$\tilde{\psi}^{(0)}$，$\Theta^{(0)}$ 求解涡量方程（C.5.4.15）式，得出$\tilde{\omega}^{(0)}$。

(3) 将$\tilde{\omega}^{(0)}$代入流函数方程（C.5.4.14）式，得出改进的值$\tilde{\psi}^{(1)}$。

(4) 利用新值$\psi^{(1)}$再次求解（C.5.4.16）式，获得改进的$\Theta^{(1)}$，同时按$\tilde{\omega}$边界值的计算式，获得边界涡量的改进值。

(5) 重复第2步及以下各步，直至获得收敛解。

求解实际问题时，往往需要对一系列的 Ra 数进行计算。此时可以低 Ra 数下的收敛值作为下一个高 Ra 数的迭代初值。这样比以纯扩散工况作为迭代初值节省计算时间。

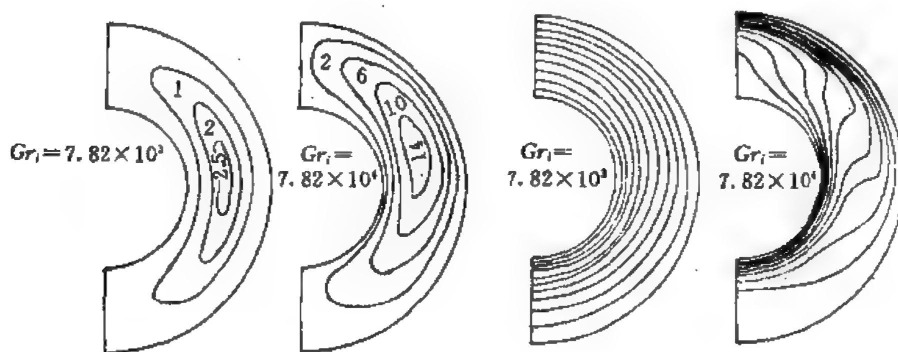


图 C.5.27

图C.5.27给出了由数值计算得到的同心环形夹层的流函数线和等温线。图C.5.28显示了对于 $r_0/r_i=2.01$，$Gr_{r_0}=7.82\times10^4$ 的同心圆环的数值计算所得的当量导数系数和 Sun 等人的实验结果的比较。其吻合程度是令人满意的。

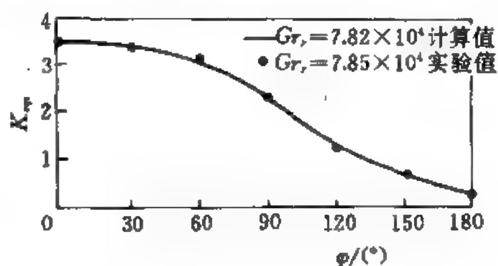


图 C.5.28

图C.5.29给出了偏心环形夹层空间自然的计算结果。图中 ε 为偏心率。

对于复杂的封闭空间或部分被分隔的封闭空间中的自然对流换热，限于篇幅在此不再讨论，有兴趣的读者可以参考有关的文献。

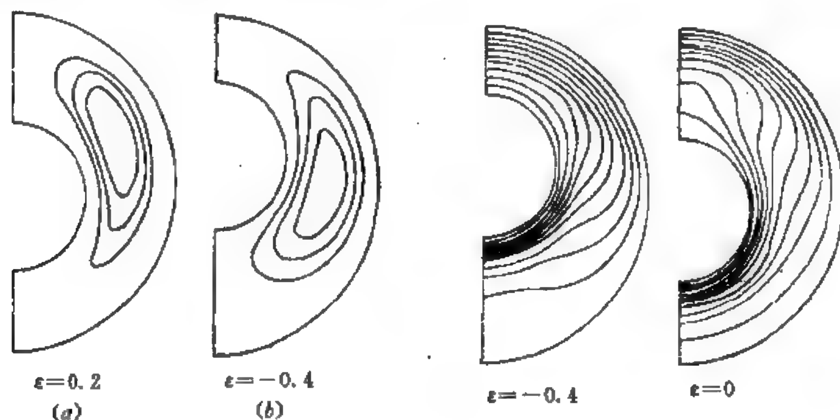


图 C.5.29

5.5 汽液两相流动与传热的数值计算

动力工程中有许多汽液两相流动与传热问题。其中反应堆堆芯的热工水力分析，蒸汽发生器内的流动与传热，汽轮机与凝汽器内的流动与传热都是典型的汽液两相流的问题。本节拟对汽液两相流动与传热的数值计算进行简要的介绍。

5.5.1 堆芯热工水力分析中的三维两流体模型

由于在流动过程中伴随有相变，所以汽液两相流动与传热是一个十分复杂的物理过程。而且由于流速，含汽率的不同，在流动过程中会形成许多不同的流型。描述汽液两相流动有许多不同的数学物理模型，其中最主要的有一维单流体模型（均相流模型），三维两流体模型（分相流模型）和漂移模型。其中在堆芯的热工水力分析中二流体模型用得较广。

设控制体内液相和汽相处于同一压力下，各物理量均取其时空平均值，则在忽略粘性应力和能量耗散项的情况下，其流体动力学的控制方程如下：

(1) 汽相和液相的质量守恒方程

$$\partial(\alpha\rho_v)/\partial t + \nabla(\alpha\rho_v \boldsymbol{u}_v) = \Gamma - w_{tv} \tag{C.5.5.1}$$

$$\partial[(1-\alpha)\rho_l]/\partial t + \nabla[(1-\alpha)\rho_l \boldsymbol{u}_l] = -\Gamma - w_{tl} \tag{C.5.5.2}$$

(2) 汽相和液相的动量守恒方程

$$\alpha\rho_v(\partial \boldsymbol{u}_v/\partial t) + \alpha\rho_v \boldsymbol{u}_v \cdot \nabla \boldsymbol{u}_v + \alpha\Delta p = -\boldsymbol{F}_{wv} - \boldsymbol{F}_{iv} + \alpha\rho_v g - \boldsymbol{F}_{tv} \tag{C.5.5.3}$$

$$\begin{aligned}&(1-\alpha)\rho_l(\partial \boldsymbol{u}_l/\partial t) + (1-\alpha)\rho_l \boldsymbol{u}_l \cdot \nabla \boldsymbol{u}_l + (1-\alpha)\nabla p\\ &= -\boldsymbol{F}_{wl} + \boldsymbol{F}_{il} + (1-\alpha)\rho_l g - \boldsymbol{F}_{tl}\end{aligned} \tag{C.5.5.4}$$

(3) 汽相和液相的能量守恒方程

$$\begin{aligned}&\partial(\alpha\rho_v e_v)/\partial t + \nabla\cdot(\alpha\rho_v e_v \boldsymbol{u}_v) + p\nabla\cdot(\alpha \boldsymbol{u}_v) + p\partial\alpha/\partial t\\ &= Q_{wv} + Q_i - Q_{tv}\end{aligned} \tag{C.5.5.5}$$

$$\begin{aligned}&\partial[(1-\alpha)\rho_l e_l]/\partial t + \nabla\cdot[(1-\alpha)\rho_l e_l \boldsymbol{u}_l] + p\nabla[(1-\alpha)\boldsymbol{u}_l] - p\partial\alpha/\partial t\\ &= Q_{wl} - Q_i - Q_{tl}\end{aligned} \tag{C.5.5.6}$$

其中，下标 v，l 分别代表汽相和液相，Γ，F_i 和 Q_i 分别代表液相到汽相的质量、动量和能量的交换率；

$$F_{iv} = \boldsymbol{F}_i + \Gamma \boldsymbol{u}_v - w_{tv} \boldsymbol{u}_v \tag{C.5.5.7}$$

$$F_{il} = \boldsymbol{F}_i + \Gamma \boldsymbol{u}_l + w_{tl} \boldsymbol{u}_l \tag{C.5.5.8}$$

w_t，F_t，Q_t 分别代表控制体间的湍流质量、动量和能量的交换率。F_w 为壁面摩擦力，Q_w 为壁面传出的热量。显然 F_i 和 Q_i 项包含由于质量交换（如蒸发或凝结）而引起的动量和能量交换，Q_i 还包括了两相间的热扩散作用。

请注意在上述诸公式中，α 不表示换热系数，而是表示截面含汽率（空泡份额）。

傅钢等人在堆芯的热工水力分析中，对上述控制方程在直角坐标中采用一种半隐式的差分格式，即时间导数项一律取前向差分，其它项则根据不同情况取为隐式或显式差分，其差分格式为

$$
\begin{aligned}
&[(\alpha\rho_v)^{n+1}-(\alpha\rho_v)^n]/\Delta t+\{[A(\alpha\rho_v)^n(v_v^x)^{n+1}]_{i+\frac{1}{2}}-[A(\alpha\rho_v)^n(u_v^x)^{n+1}]_{i-\frac{1}{2}} \\
&+[A(\alpha\rho_v)^n(u_v^y)^{n+1}]_{j+\frac{1}{2}}-[A(\alpha\rho_v)^n(u_v^y)^{n+1}]_{j-\frac{1}{2}}+[A(\alpha\rho_v)^n(u_v^z)^{n+1}]_{k+\frac{1}{2}} \\
&-[A(\alpha\rho_v)^n(u_v^z)^{n+1}]_{k-\frac{1}{2}}\}/V=\Gamma^{n+\frac{1}{2}}-w_{iv}^{n+\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{C.5.5.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\alpha\rho_v)_{k+\frac{1}{2}}^n[(u_v^z)^{n+1}-(u_v^z)^n]_{k+\frac{1}{2}}/\Delta t+(\alpha\rho_v)_{k+\frac{1}{2}}^n[(u_v^x)_{k+\frac{1}{2}}(\Delta_x u_v^z/\Delta x)_{k+\frac{1}{2}} \\
&+(u_v^y)_{k+\frac{1}{2}}(\Delta_y u_v^z/\Delta y)_{k+\frac{1}{2}}+(u_v^z)_{k+\frac{1}{2}}(\Delta_z u_v^z/\Delta z)_{k+\frac{1}{2}}]^n \\
&+\alpha_{k+\frac{1}{2}}^n[(p_{k+1}-p_k)/\Delta z_{k+\frac{1}{2}}]^{n+1} \\
=&-(F_{wv}^z)_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-(F_{iv}^z)_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}+(\alpha\rho_v g)_{k+\frac{1}{2}}^n-(F_{iv})_{k+\frac{1}{2}}^n
\end{aligned}
\tag{C.5.5.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&[(\alpha\rho_v e_v)^{n+1}-(\alpha\rho_v e_v)^n]/\Delta t+\{[p^n+(\rho_v e_v)_{i+\frac{1}{2}}^n][A\alpha^n(u_v^x)^{n+1}]_{i+\frac{1}{2}} \\
&-[p^n+(\rho_v e_v)_{i-\frac{1}{2}}^n][A\alpha^n(u_v^x)^{n-1}]_{i-\frac{1}{2}}+[p^n+(\rho_v e_v)_{j+\frac{1}{2}}^n][A\alpha^n(u_v^y)^{n+1}]_{j+\frac{1}{2}} \\
&-[p^n+(\rho_v e_v)_{j-\frac{1}{2}}^n][A\alpha^n(u_v^y)^{n+1}]_{j-\frac{1}{2}}+[p^n+(\rho_v e_v)_{k+\frac{1}{2}}^n][A\alpha^n(u_v^z)^{n+1}]_{k+\frac{1}{2}} \\
&-[p^n+(\rho_v e_v)_{k-\frac{1}{2}}^n][A\alpha^n(u_v^z)^{n+1}]_{k-\frac{1}{2}}\}/V+p^n(\alpha^{n+1}-\alpha^n)/\Delta t \\
=&Q_{wv}^{n+\frac{1}{2}}+Q_i^{n+\frac{1}{2}}-Q_{iv}^{n-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{C.5.5.11}
$$

上述 3 式表示了汽相的质量、动量和能量的差分方程。对于液相的方程及 x，y 方向的动量方程可以通过变换某些量和角码来得到。这样上述差分格式共包括 10 个差分方程。

显然为了使上述方程组封闭，还必须附加状态方程，相间、通道间及相与壁之间的交换结构方程，限于篇幅，此处对这些结构方程不予讨论。请读者参看傅钢，赵兆颐等人的文章。

傅钢等人用上述三维双流体模型计算了沸水堆 9 棒束 4 通道的情况。算出元件中心最高温度为 2449.77 K，最高壁温为 584.60 K。图 C.5.30 表示对沸水堆 7×7 棒束 9 通道瞬态计算 1 秒时得到的通道轴向含汽量的分布曲线。

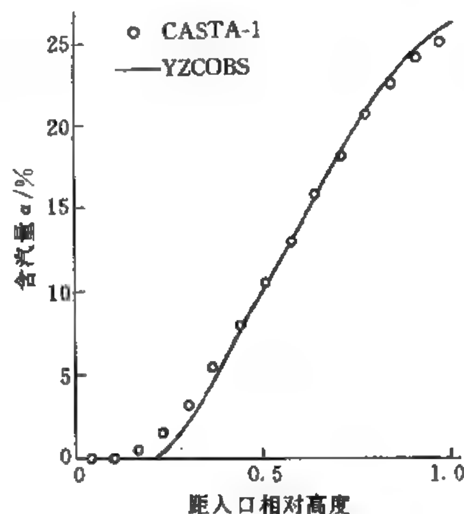


图 C.5.30

5.5.2 管道内汽液两相流的数值计算

管道内汽液两相流动是工程中常见的问题。下面简要介绍其数值计算。

采用漂移模型时，汽液两相流的控制方程为

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_m v_m) = 0 \tag{C.5.5.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha\rho_v) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha\rho_v v_m) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\alpha\rho_v(1-\alpha)\rho_l v_r}{\rho_m}\right] = \Gamma \tag{C.5.5.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m v_m) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_m v_m^2) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{(1-\alpha)\rho_l\alpha\rho_v v_r^2}{\rho_m}\right] + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_m g_z + \tau = 0 \tag{C.5.5.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m e_m) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_m e_m v_m) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{(1-\alpha)\rho_l\alpha\rho_v v_r(e_v - e_l)}{\rho_m}\right]$$

$$+ p\frac{\partial v_m}{\partial z} + p\frac{\partial}{\partial z}\left[\alpha\frac{(1-\alpha)v_r(\rho_l - \rho_v)}{\rho_m}\right] = q \tag{C.5.5.15}$$

上述 4 式分别为混合物质量守恒、汽相质量守恒、混合物动量守恒和混合物内能守恒，其中 ρ_m 为混合物的密度，v_m 为混合物的速度。

为了使该方程封闭还需状态方程，热平衡等辅助方程，其详细情况可参考 D. R. Liles 的有关文献。

对于实际问题的数值计算，为了便于处理动量源项，需把混合物的动量方程（C. 5. 5. 14）式写成非守恒形式，即用 v_m 乘（C. 5. 5. 12）式再减（C. 5. 5. 14）式，整理后得

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} + v_m\frac{\partial v_m}{\partial z} + \frac{1}{\rho_m}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{(1-\alpha)\rho_l\alpha\rho_v v_r^2}{\rho_m}\right] + \frac{1}{\rho_m}\frac{\partial p}{\partial z} + g_z + \frac{\tau}{\rho_m} = 0 \tag{C.5.5.16}$$

采用交错网格，上面控制方程组的离散方程为

$$\frac{(\rho_m)_i^{n+1} - (\rho_m)_i^n}{\Delta t} + \frac{(\rho_m)_{i+\frac{1}{2}}^n (v_m)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\rho_m)_{i-\frac{1}{2}}^n (v_m)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta z} = 0 \tag{C.5.5.17}$$

$$\frac{(\alpha\rho_v)_i^{n+1} - (\alpha\rho_v)_i^n}{\Delta t} + \frac{(\alpha\rho_v)_{i+\frac{1}{2}}^n (v_m)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - (\alpha\rho_v)_{i-\frac{1}{2}}^n (v_m)_{i-\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta z}$$

$$+ \frac{1}{\Delta z}\left\{\left[\frac{(1-\alpha)\rho_l\alpha\rho_v v_r}{\rho_m}\right]_{i+\frac{1}{2}}^n - \left[\frac{(1-\alpha)\rho_l\alpha\rho_v v_r}{\rho_m}\right]_{i-\frac{1}{2}}^n\right\} = \Gamma \tag{C.5.5.18}$$

$$\frac{(v_m)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - (v_m)_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + (v_m)_{i-\frac{1}{2}}^n\left[\frac{(v_m)_{i+1}^n - (v_m)_i^n}{\Delta z}\right] + \frac{1}{(\rho_m)_{i+\frac{1}{2}}^n\Delta z}\left\{\left[\frac{(1-\alpha)\rho_l\alpha\rho_v v_r^2}{\rho_m}\right]_{i+1}^n\right.$$

$$\left. - \left[\frac{(1-\alpha)\rho_l\alpha\rho_v v_r^2}{\rho_m}\right]_i^n\right\} + \frac{1}{(\rho_m)_{i-\frac{1}{2}}^n}\left(\frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n-1}}{\Delta z}\right) + (g_z)_{i-\frac{1}{2}} + \left(\frac{\tau}{\rho_m}\right)_{i-\frac{1}{2}} = 0 \tag{C.5.5.19}$$

$$\frac{(\rho_m e_m)_i^{n+1} - (\rho_m e_m)_i^n}{\Delta t} + \frac{(\rho_m e_m)_{i+}^n (v_m)_{i-\frac{1}{2}}^{n-1} - (\rho_m e_m)_{i-\frac{1}{2}}^n (v_m)_{i-\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta z}$$

$$+\frac{1}{\Delta z}\left\{\left[\frac{(1-\alpha)\rho_l\alpha\rho_v(e_v-e_l)v_r}{\rho_m}\right]_{i+\frac{1}{2}}^n-\left[\frac{(1-\alpha)\rho_l\alpha\rho_v(e_v-e_l)v_r}{\rho_m}\right]_{i-\frac{1}{2}}^n\right\}$$

$$+p_i^{n+1}\left[\frac{(v_m)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}-(v_m)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta z}\right]+\frac{p_i^n}{\Delta z}\left\{\left[\frac{(1-\alpha)\alpha(\rho_l-\rho_v)v_r}{\rho_m}\right]_{i+\frac{1}{2}}^n\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\alpha(1-\alpha)(\rho_l-\rho_v)v_r}{\rho_m}\right]_{i-\frac{1}{2}}^n\right\}=q \tag{C.5.5.20}$$

上述方程中，n，$n+1$ 分别表示不同的时间层，Δt，Δz 分别为时间和空间步长。

上述差分格式是半隐式的。质量、能量方程中的对流项，动量方程中压力梯度项，能量方程中的压力项均由 $n+1$ 时间层计算，而其它各项则由 n 层时间层计算。

刘伟等人用上述模型计算了这样一个工况：水平放置的圆管内装满了温度为 241.7 ℃，压力为 69.9×10^5Pa 的过热水。当管一端的阀门打开后，由于压力急剧降低，管子内部将处于汽液两相流的流动状态。计算结果如图 C.5.31 所示。图（a）表示压力随时间的变化，图（b）表示截面含汽率 α 随时间的变化。显然由于压力波的传播，压力随时间的增加不断减小，直至环境压力。而 α 随时间增加，在靠近开口处压力小而 α 值大。

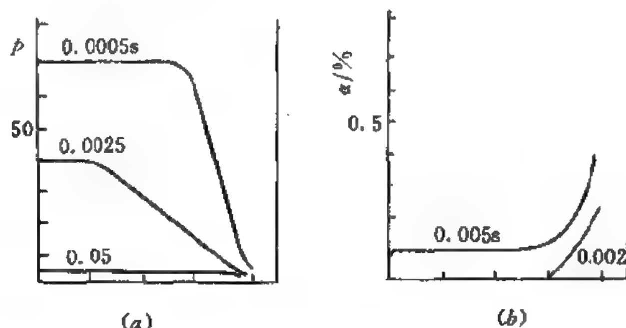


图 C.5.31

5.5.3 汽轮机去湿级两相流的数值计算

采用压水堆的核动力装置新鲜工作蒸汽的压力接近饱和状态。为使汽轮机排气湿度不超出允许范围，以确保汽轮机低压级的安全运行和工作效率；当蒸汽在汽轮机中膨胀至中间压力后，需进行汽水分离。这种汽水分离过程可以在汽轮机外或汽轮机内进行。而汽轮机内设置去湿级（即内置式汽水分离器）是目前的发展方向。它与外置式汽水分离器比较起来有许多优点。下面介绍这种汽轮机去湿级中两相流的数值计算。

所谓汽轮机的去湿级实际上就是一个带抽气口的环形通道。湿蒸汽从周向以某一角度进入此环形通道以后，形成旋流，蒸汽中水滴受离心力的作用被抛向外侧，沉积在环形通道的外壁，在抽气口随少量蒸汽一起被抽到通道外。进入该环形通道的蒸汽湿度一般为 10%，水份以很小尺寸的水滴形式分布在蒸汽中。水滴间的距离比水滴尺寸大得多，因此在处理环形通道中的汽相流场时，可将其作为定常的轴对称可压缩流处理，并假定蒸汽为理想气体。计算时只考虑分子的粘性效应。水滴在蒸汽流场中的运动则可用轨迹法确定。

1. 汽相流场的计算

采用通用因变量 Φ，广义扩散系数 Γ，在柱面坐标中汽相的控制方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\Phi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v\Phi)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Gamma r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+S(\Phi) \qquad (C.5.5.21)$$

显然（C.5.5.21）式中Φ和Γ取为常数1时即为连续性方程，Φ分别取为u、v，w，Γ取为粘性系数μ，即为各坐标方向上的动量方程，与Φ对应的源项$S(\Phi)$如表C.5.7所示。

表C.5.7　与Φ对应的源项S（Φ）的表达式

Φ	$S(\Phi)$
1	0
u	$-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)$
v	$-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu\frac{\partial v}{\partial r}\right)-\frac{2\mu v}{r^2}+\frac{\rho w^2}{r}$
w	$-\mu\frac{w}{r^2}-\frac{\rho}{r}vw$

俞茂铮等人采用交错网格系，并用区域扩充法将不规则的物理区域扩充为规则的计算域。其环形通道的计算域及网格图如图C.5.32所示。

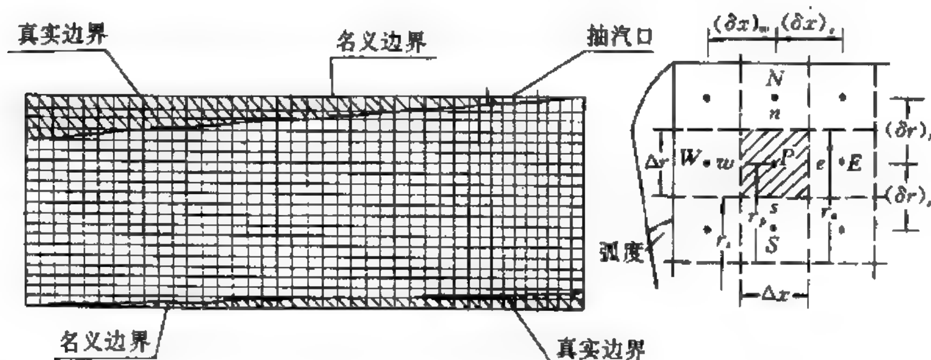


图　C.5.32

离散化后的通用方程的形式为

$$a_P\Phi_P=a_E\Phi_E+a_W\Phi_W+a_N\Phi_N+a_S\Phi_S+b \qquad (C.5.5.22)$$

以上各系数及源项的计算公式，在前面章节已有介绍。该方程可用前述的SIMPLE等方法求解。

2. 水滴运动特性的计算

水滴的运动特性可由水滴运动微分方程确定。当忽略压差力、重力影响的情况下，水滴的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}c_l}{\mathrm{d}t}=0.75c_D\rho_v\left|c_v-c_l\right|\cdot(c_v-c_l)/(\rho_l d) \qquad (C.5.5.23)$$

其中，d为水滴直径，c_v，c_l分别为蒸汽和水滴的速度，ρ_v，ρ_l分别为蒸汽或水滴的密度，c_D为气体绕刚体球的通用阻力系数。

当算出汽相流场并已知水滴的初始位置及速度后，即可用差分法求解（C.5.5.23）式。

对静叶栅出口的蒸汽压力为 0.54MPa，湿度为 0.892，汽流出口角 $\alpha_1=20°$，气流出口速度 $c_1=200$ m/s，环形通道长度为 $L=300$ mm，通道内径为 760 mm，进口及出口高度分别为 73 mm 和 92.5 mm，去湿槽口宽度为 24 mm 的汽轮机去湿级，俞茂铮等人用上述方法进行了数值计算。计算时根据去湿槽口的除湿要求，给定抽气量为蒸汽总流量的 4%，并按这一抽气量确定去湿口上蒸汽的径向速度，从而确定进出口的边界条件。

计算得到的环形通道子午面上汽相速度分量如图 C.5.33 所示。$d=7$ μm 的水滴运动轨迹在环形通道子午面上的投影如图 C.5.34 所示。

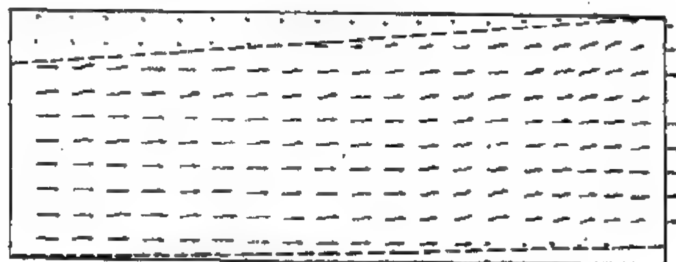


图 C.5.33

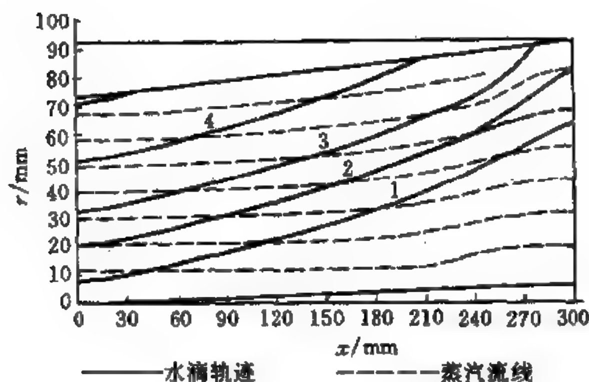


图 C.5.34

由图 C.5.33 可见，直径为 $d=7$ μm 量级的水滴在所计算的去湿级中有一半左右不能被抽出。由此可见以上数值计算对去湿级的设计有指导作用。

5.6 自然对流与强迫对流的数值计算

在前面几节的讨论中，一般都认为流场已经求得，实际问题中有传热的流场与热传导本身是不可分开的，比如自然对流本身就是由于存在温差而引起的，而对流本身则进一步影响温度场的分布，所以事实上是不能分开的。对于单相流动，这里将上一章中讨论的 NSTR 程序加以扩充，并提供应用示例。

在有自然对流的情况中，需考虑温差引起的浮力的作用，由于温差引起的密度的变化不大，所以一般都可采用 Bousinnesque 的假定，即仅在 z 方向的动力学方程中加入一浮力项

$$\beta(T - T_e)g \tag{C.5.6.1}$$

其中 T_e 为环境温度，g 为重力加速度，与 e_z 方向相反，垂直向下；β 为气体的体膨胀系数，对于完全气体，$\beta=\frac{1}{T}$。(C.5.6.1) 项应加在 z 方向动力方程的右端源项之中。由于这一项的出现，k，ε 方程也应当有所变化，即在右端源项中分别加上

$$\left.\begin{aligned} &G_t = -g\beta\frac{\nu_T}{Pr_t}\rho\frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{对于 } k \text{ 方程}) \\ \text{和} \quad &c_{3\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}G_t \quad (\text{对于 } \varepsilon \text{ 方程}) \end{aligned}\right\} \tag{C.5.6.2}$$

其中 Pr_t 为湍流的 Prandlt 数，通常取作 1.0，另外由于温度场的出现，需要加入能量方程

$$\begin{aligned} &\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p\left(\frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial vT}{\partial y} + \frac{\partial wT}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\lambda}{c_p} + \frac{\mu_t}{Pr_t}\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\lambda}{c_p} + \frac{\mu_t}{Pr_t}\right)\frac{\partial T}{\partial y}\right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\lambda}{c_p} + \frac{\mu_t}{Pr_t}\right)\frac{\partial T}{\partial z}\right] \end{aligned} \tag{C.5.6.3}$$

其中湍流耗散 Φ 项已略去不计，λ 为流体的导热系数，c_p 为气体的比热，$c_{3\varepsilon}=\text{th}\left|\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}}\right|$ 显然 (C.5.6.3) 也具有 (C.4.7.3) 的形式，所以可以将其补充到第四章第 7 节的讨论中去。但还有几点不同之处需要强调的。

在计算温度场时，在场内的固体，如墙壁、障碍物等的温度是未知的，需要和流场一起求解。在流场计算中，它们的速度视为已知，所以求解时不予计算，但在求解温度场时需将固体内的热传导方程和对流场的能量方程一起求解。做到这一点并不困难，因为固体中的速度是已知的，所以只要给出不同的 λ 值就可以了。

另外一个重要的问题是边界条件。对于层流流动，流体内的物体与流体的交接面并不需要作特别处理，因为它们只是具有不同速度及热传导系数而已。对于湍流运动，流体绕过物体时的热交换系数与传热系数有很大的差别，要想准确得到热交换系数，必须把网格划分得足够细，使得物面上的网格全部浸没在粘性底层，这就需要非常大的网格数，事实上这是做不到的。因此另外一个方法是根据实验或者工程手册查出传热系数，来代替流体在这个地方的传热系数，这时作为流体与物体的交接面要作专门的处理，即规定这里的换热系数，这种边界上给出的条件是

$$k\frac{\partial T_b}{\partial n} = h(T_g - T_w) \tag{C.5.6.4}$$

其中 h 即为换热系数，T_g 为气体的温度，T_b 为物体的温度，T_w 为物面处的温度，n 为物面的法向。对于进口，出口，墙壁等边界，边界条件有 3 种：给定壁温、给定热通量以及给出热交换条件，可表示为

$$\left.\begin{aligned} &\text{第 1 类：} && T = T_w \\ &\text{第 2 类：} && \frac{\partial T}{\partial n} = q \\ &\text{第 3 类：} && \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha T + \beta \end{aligned}\right\} \tag{C.5.6.5}$$

最后一个问题是对于自然对流情况下，流动是比较缓慢的，所以流动实际上处于低惯性流动，应当对湍流模式进行低雷诺数修正，可采用如下的方法：

$$\left.\begin{aligned} \nu_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \qquad f_\mu = \exp\{-3.4/(1+Re_t/50)^2\} \\ Re_t = \frac{k^2}{\nu\varepsilon} \end{aligned}\right\} \tag{C.5.6.6}$$

同时在 ε 方程中 $c_{1\varepsilon}$，$c_{2\varepsilon}$分别用 $c_{1\varepsilon}f_1$ 及 $c_{2\varepsilon}f_2$ 来代替。其中

$$f_1 = 1.0, \quad f_2 = 1 - 3e^{-Re_t^2} \tag{C.5.6.7}$$

Heindel 等人计算表明，这样的湍流模式比较好。

最后，热辐射对于热交换有很大的影响。一般说，空气本身吸收热辐射的能力是很小的，可以略去不计，但是固体吸收热辐射的能量，引起温度的变化，反过来又影响流场内的温度。在实际计算中可以分离开来考虑：首先不计热辐射，在得到温度场分布后再作热辐射量的估算，从而改变了有关的边界条件，然后再重新进行计算，得到新的比较准确的温度场。

根据以上对边界条件、湍流模式和热辐射进行处理方法，可以将 NSTR 程序进行扩充，并应用于室内自然对流的数值模拟和发电厂空冷塔自然对流和强迫对流情况下流场的数值模拟。

首先讨论室内由于供暖引起的自然对流，为简单起见，也考虑到所用计算机容量比较小，故设流场是二维的，求解域及其网格划分如图 C.5.35 所示。

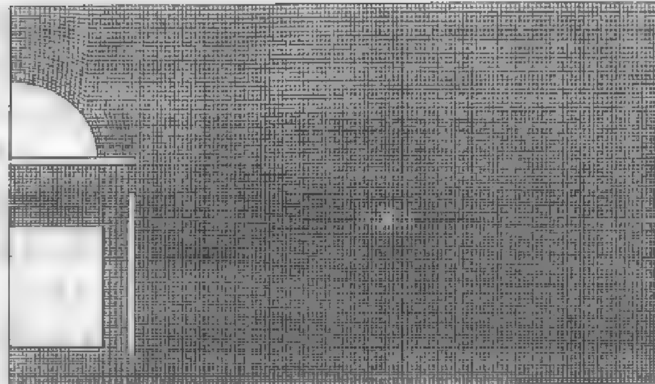


图 C.5.35　室内供暖系统及网格系统

其中 mljk 为供热器，温度为 80℃，mopq 及 ihgfe 是物块，它们是由胶木制作的，abcd 为房间的周边，其中 ab 为地面，其它为与大气相邻的壁面。地面假定是绝热的，bcda 壁面的外侧是给定环境温度 $T_{env}=0$ ℃的大气，故在其上的边界条件为

$$h\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{T - T_{env}}{\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{\delta}{k_w}}$$

其中 k_w 为墙壁的传热系数，δ 为壁厚，α 为墙壁外侧的大气与壁的换热系数，h 为室内气流与壁的换热系数。另外只在 ih 及 nq 表面上考虑它们接受供热器的热辐射，热量为

$$Q_r = \varepsilon_s \frac{f_1}{f_2} K[T_0^4 - T_b^4]$$

其中 K 为玻尔兹曼常数，ε_s 为接受热辐射能力的系数，f_1 和 f_2 分别为热源面积和吸收热的面积，其它的辐射热在这里略去不计。

在网格为 150×110 的条件下进行了数值计算。图 C.5.36 显示了速度的分布，而图 C.5.37 显示了温度场的分布。

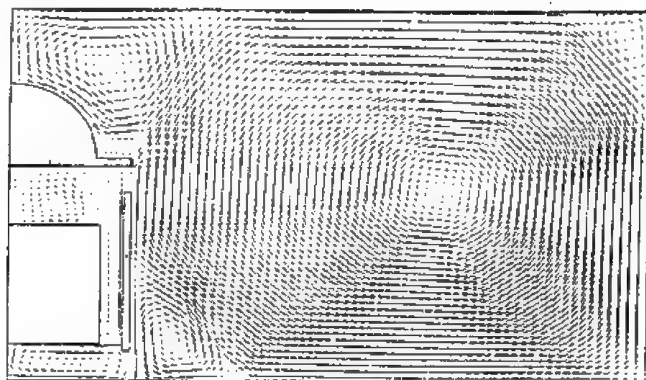


图 C.5.36 室内速度场的分布

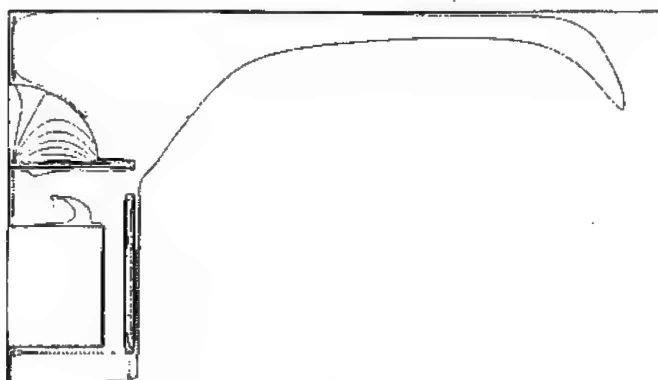


图 C.5.37 室内温度场的分布

第 2 个例子，空冷塔的自然对流流场的计算。电厂的循环水在出口处需要冷却以提高电厂的热效率。利用空冷塔还具有节水的优点，这在中国北方这种缺水地区，是很有意义的。空冷塔可以在无风情况下，靠自然对流来达到冷却的目的。但人们发现，在有风的情况下，换热效率下降。为了分析下降的原因，有必要对有风时的流场进行分析。图 C.5.38 为自然对流

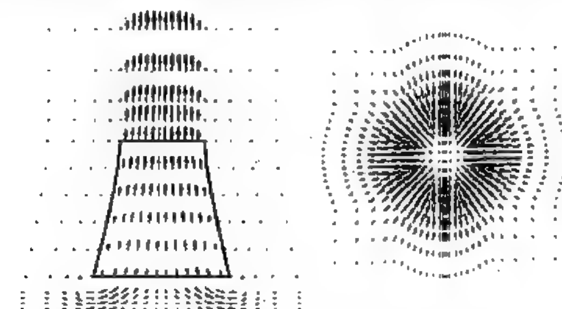


图 C.5.38 自然对流时空冷塔内速度分布

(无风）的速度分布，图 C. 5. 39 则为有风时的速度分布，图 C. 5. 40 则为相应的温度分布。

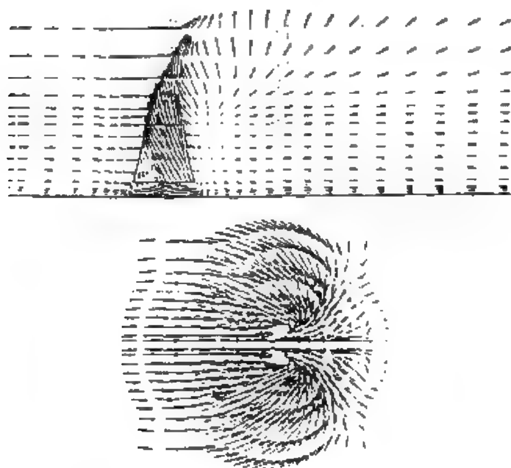


图 C. 5. 39　强迫对流时空冷塔内速度分布

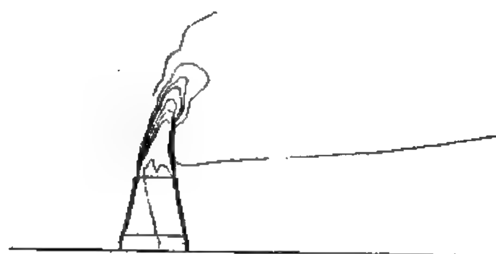


图 C. 5. 40　强迫对流时空冷塔内温度分布

小　结

本章介绍了数值计算方法在核动力装置的对流换热中的若干重要应用，其中包括管道内的对流换热，外掠物体的对流换热，周期性通道流的对流换热，封闭空间的对流换热以及汽液两相流。

本章介绍的对流换热都是与流体的流动紧密相关的。只有知道了流场才能计算出温度场及换热的 Nu 数。所以说流场的计算是换热计算的基础。而流场的计算可以采用前面几章介绍的各种数值方法。

管道内或周期性通道内的充分发展的对流换热，其控制方程在许多情况下可以化作导热型方程；这样就为问题的数值解带来了便利。另外工程上许多问题都可以作为常物性处理，这种近似处理方法虽带来一定程度的误差，但却可以大大简化计算，故工程实际计算中广为采用常物性的假设。

由于密度与温度的依赖关系，计算自然对流问题时，流场的求解必须与温度场的求解同时进行。这就为封闭空间的自然对流计算带来一些新的特点。

汽液两相流动由于其数学物理模型与单相流相比更为复杂，以及在相间存在着动量，热量和质量交换，因此其数值计算更为困难，目前正处于发展之中。

由于篇幅关系，本章没有讨论诸如对流和导热，对流和辐射等耦合换热问题，也没有讨论换热器数值模拟等复杂的对流换热问题，而实际上高温部件及电子器件的冷却，火电厂及核动力装置中的冷却塔的湍流流动与传热，高温等离子体的流动与传热等都已采用数值模拟的方法。可见随着数值模拟方法的发展，它在换热领域中的应用将日益广泛。

参 考 文 献

1　陶文铨编著．数值传热学．西安交通大学出版社，1988
2　郭宽良编著．数值计算传热学．安徽科技出版社，1987

3 凯斯 W M 等著，陈熙等译．对流传热与传质．科学出版社，1986

4 帕坦卡 S V 著，张政译．传热与流体流动的数值计算．科学出版社，1989

5 钱壬章等编．传热的分析与计算．高等教育出版社，1987

6 施天模著，陈越南等译．计算传热学，科学出版社，1987

7 Sparrow E M. Relation Ships Among Boundary Conditions and Nusselt Numbers for Thermally Developed Duct Flows. ASME J. Heat Transfer, vol. 99, pp483-485, 1977

8 Patanker S V. Thermal Interactions Among the Confining Walls of a Turbulent Recirculating Flow. Int. J. Haat Mass Transfer, vol. 21, pp269, 1978

9 Hu M H, Chang Y P. Optimization of Finned Tubes for Heat Tubes for Heat Transfer in Laminar Flow. ASME J. Heat Transfer, vol. 92, pp332-338, 1973

10 Gosman A D. Heat and Mass Transfer in Reciculating Flows. Academic Press, London, 1969

11 Sparrow E M, Numerical Solution for Laminar Flow and Heat Transfer in Periodically Converging-Diverging Tube, with Experimental Confirmation. Numer. Heat Transfer, vol. 6, pp 441-461, 1983

12 Küblbeck K. Laminare und Turbulent Ausbreitungsvorgänge Infolge Freier und Erzwungener Konvektion. Dissertation, Technische Universität München, 1981

13 Heiss A. Numerische und Experimentelle Untersuchungen der Laminaren und Turbulenten Konvektion in Einem Geschlossenen Behälter. Dissertation, Technische Universität München, 1987

14 孙仁治，张兴．偏心水平圆柱环形空间自然对流传热的数值研究．工程热物理论文集，科学出版社，1988，pp227-234

15 Mayinger F. Strömung und Wärmeübertrang in Gas-Flüssigkeite Gemischen. Springer-Verlag, 1982

16 傅钢，赵兆颐，曹栋兴．堆芯热工水力子通道分析的三维两流体模型及CASTA-1程序．传热传质文集，1986，科学出版社，pp156-159

17 赵兆颐等，反应堆子通道分析中的一步混合网方法及CHAN-1程序．核科学与工程，1985，vol. 5，No. 2

18 刘伟，严传俊，王宏基．管道内气液两相流动的数值计算，多相流热物理．中国工程热物理学会第七届年会论文集．1990，第五分册，1-37

19 Liles D R. A Semi-Implicit Method for Two-phase Fluid Dynamik. J of Computational Physics, 1978, vol. 26

20 董为民，俞茂铮，湿蒸汽汽轮机内置式汽水分离器两相流数值计算，多相流热物理．中国工程热物理学会第七届年会论文集．第五分册，1-19，1990

21 Heindel T J, Ramadhyani S, Incropera F P, Assessment of Turbnlence Models for Narural Convection in an Enclosure. Numerical Heat Transfer, 1994 Part B, vol. 26: p147-172

*第 6 章　流场计算中的新方法

人们为了用数值方法模拟各种越来越复杂的流动，除了研制更大更快的计算机外，还在数值计算方法上进行了各种新的探索。本章将对若干有希望的新方法进行简要介绍，其中包括用于计算激波的 TVD 法和 ENO 法，加速迭代的多重网格法，提高精度的自适应网格，充分利用计算机计算速度的并行计算法。

6.1　TVD 方法

在本篇第 2 章中曾讨论过激波的捕获。我们已经知道像 Lax 格式，Godunov 一阶格式等具有一阶精度，所以它们不会在激波附近出现振荡，但激波也被抹平，因此不能显示激波的存在。为此人们设计了二阶精度格式，但是这些格式在激波附近出现振荡，不能有效提高计算精度。因此人们探索一种既有比较高的计算精度，又能反映激波前后参数变化而无振荡的差分格式。我国学者张涵信从修正方程各项对波动可能产生的影响出发，建立了 NND 格式，取得了比较好的效果。欧美学者则从总变差减小的思路出发得到一系列能比较好地处理激波的格式。但这些格式也存在不少问题，比如多维问题计算中能否保持二阶精度，它们是否满足熵条件等等，所以这些方法还有待进一步发展。本节将介绍 TVD 格式的基本概念及有关问题，并进一步说明 NND 格式也是 TVD 格式中的一种。

6.1.1　总变差及其衰减

首先讨论总变差，设一个一元函数 $u(x)$ 在 (x_0,x_I) 上有定义，在其上分成 I 个区，(x_0, x_1)，(x_1, x_2)，…，(x_{I-1}, x_I)，计算值 $\sum_i |u(x_{i+1}) - u(x_i)|$，显然这一值与区间的划分有关，取不同区间划分得到的该值的上确界，记作总变差。

$$\mathrm{TV}(u(x)) = \sup_{\Delta}\left[\sum_i |(u(x_{i+1}) - u(x_i)|\right] \qquad \text{(C. 6. 1. 1)}$$

如果 $u(x)$ 在整个实轴上定义，则总变差为

$$\mathrm{TV}(u(x)) = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\mathrm{d}x \qquad \text{(C. 6. 1. 2)}$$

这就是说，总变差是函数值上升总量和下降总量之和，如果函数定义在离散点上，则总变差定义为

$$\mathrm{TV}(u(x)) = \sum_{i=0}^{I-1}|u_i - u_{i+1}| \qquad \text{(C. 6. 1. 3)}$$

根据总变差的定义，我们可以看到，在激波的情况下，二侧的量为常数，跳跃如图 C. 6. 1 所示。很明显这里的总变差应为常数，如果激波被“抹平”，但仍然是单调的，那么它的总变差仍然是同一常数。如果激波两侧产生了波动，可以看到总变差将增加。故为避免波动的出现应当将总变差降至最小。总变差的衰减格式正是这样设计的，即差分格式使得总变量随着

时间的推移而不断地下降，最后达到可能的最小值。这样振荡将变得最小或消失。由于总变量衰减的英文名称为 Total Voriation Diminising，故简称 TVD。应当注意，正确的 TVD 格式应当满足熵条件，这样才能保证得到具有物理意义的正确解。此外还要求有足够的精度和满足计算上的稳定性条件.



图 C.6.1

实际计算中，如果总变差不增加或有界也是可取的，所以又出现了所谓 TVNI 或 TVB 格式。

一般说，我们将要讨论的方程写成守恒形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}+\frac{\partial g(u)}{\partial y}=0 \tag{C.6.1.4}$$

Grandall 和 Majda 证明上述方程具有如下性质：

若方程（C.6.1.4）式中 f，g 为关于 u 的 Lipschitz 连续函数，则对于任意初始 $u_0 \in L^1(R^2) \cap L^\infty(R^2)$，则存在唯一的满足熵条件的解

$$u(t) \in C((0,\infty):L^1(R^2)),$$

且

$$u(0)=u_0$$

且若 $\mathrm{TV}(u_0)<\infty$，则 $\mathrm{TV}(u) \leqslant \mathrm{TV}(u_0)$

上述定理说明了 (C.6.1.4) 式存在满足熵条件的间断解，解的 TV 是减小或保持不变的。这是设计 TVD 格式的基础。当 $g(u)=0$ 时就蜕化为一维的问题了。

现在的问题是，什么样的格式具有 TVD 性质，以及如何设计新的 TVD 格式。

6.1.2 单调格式和保单调格式

Lax 指出，双曲型方程写成守恒型，计算具有比较高的精度（在同样精度的差分格式条件下）。守恒型，一维时微分方程形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \tag{C.6.1.5}$$

差分方程具有如下的形式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\{\bar{f}(v_{j-k+1}^n,\cdots,v_{j-k}^n)-\bar{f}(v_{j-k}^n,\cdots,v_{j+k-1}^n)\}$$

$$\xlongequal{\text{记作}} H(v_{j-k}^n,v_{j-k+1}^n,\cdots,v_{j+k}^n) \tag{C.6.1.6}$$

其中 $\bar{f}$ 满足相容性条件

$$\bar{f}(u,u,\cdots,u)=f(u) \tag{C.6.1.7}$$

引入记号 $$\lambda=\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{C.6.1.8}$$

不难看出 Lax-Friedrich 格式

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda}{2}\left[f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)\right] \\ &= u_j^n - \lambda\left\{\left[\frac{f(u_{j+1}^n) + f(u_j^n)}{2} - \frac{1}{\lambda}\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{2}\right]\right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{f(u_j^n) + f(u_{j-1}^n)}{2} - \frac{1}{\lambda}\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{2}\right]\right\} \end{aligned}$$

这里

$$\bar{f}(u_j^n, u_{j+1}^n) = \frac{1}{2}\left[f(u_{j+1}^n) + f(u_j^n)\right] - \frac{1}{2\lambda}\left[u_{j+1}^n - u_j^n\right]$$

$$\bar{f}(u, u) = f(u)$$

$$H(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda}{2}\left[f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)\right]$$

可见 Lax—Friedrich 格式具有守恒性质。

在本篇第 3 章中曾讨论过这样的格式，

即 $$u_j^{n+1} = \sum_{k=-K}^{K} a_k u_{j+k}^n \tag{C.6.1.9}$$

若 $a_k>0$ ($\forall\ k$)，则这一格式具有保单调性，即若 u_j^n 具有单调性 ($u_{j+1}^n \geqslant u_j^n$，$\forall_j$ 或 $u_{j+1}^n \leqslant u_j^n$，$\forall_j$)，则 u_j^{n+1} 也具有相同的单调性。这种格式本质上具有一阶精度，下面将这种性质加以推广。

定义：若差分格式 (C.6.1.6) 具有性质

$$\frac{\partial H}{\partial u_i}(u_{-K}, \cdots, u_K) \geqslant 0 \quad (\forall\ -K \leqslant i \leqslant K) \tag{C.6.1.10}$$

则称该格式为单调格式。

显然 (C.6.1.9) 式在 $a_k>0$ ($\forall\ k$) 时为单调格式，它的解具有保单调性，这是在线性方程的情况下。对于一般情况，Harten，Hyman 和 Lax 证明了：

(1) 单调格式是 TVD 格式；

(2) 单调格式本质上是一阶精度的；

(3) TVD 格式一定是保单调格式。

这里要注意线性方程时单调格式是保单调的，反过来保单调格式也一定是单调格式。对于非线性方程，则二者是不等价的，由此可见，如果要设计高精度的 TVD 格式必须考虑方程的非线性。

6.1.3 关于熵条件

为了说明这个问题，首先引入弱解的概念。在引入数学说明之前，这里先从物理意义上来说明弱解。因为要求解的是微分方程，因此一般说解应当是连续可微的。可是有些方程即使在初值为连续可微的，随着时间的发展也会产生间断解，在间断点上当然解是不连续的，谈不上可微；所以严格说它不满足微分方程。但如果在间断点两侧的值满足由微分方程导出的

积分关系，那么我们就可以认为解在广义上满足方程，即该方程的弱解。用数学方法来表示，则

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \qquad u(x,0)=\varphi(x)$$

方程的弱解满足

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty [u\Psi_t+f(u)\Psi_x]\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^\infty \varphi(x)\Psi(x,0)\mathrm{d}x=0$$

$$\forall\ \Psi(x,t)\in C_0^\infty[R\times[0,\infty)] \tag{C. 6. 1. 11}$$

其中 Ψ 叫做检验函数，C_0^∞ 表示连续的无限可微函数。由于是积分，所以 u 及 f (u) 可以是逐段光滑的。另外在间断面上（见图 C. 2. 18）应当有间断条件（见（C. 2. 2. 18）式）：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(u_- - u_+)=f_- - f_+$$

这里 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 就是间断移动的速度，上式改记为

$$s(u_L-u_R)=f_L-f_k \tag{C. 6. 1. 12}$$

s 为激波或间断移动的速度，上式又叫做 Rankine—Hugoniot（R-H）条件。

熵条件（C. 2. 2. 19）式可以写作

$$\frac{f-f_L}{u-u_L}>s>\frac{f-f_k}{u-u_k} \tag{C. 6. 1. 13}$$

若设

$$\left.\begin{aligned}&a(u)=\frac{\partial f}{\partial u}\\&a(u_L)=\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u\to u_L},\quad a(u_K)=\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u\to u_k}\end{aligned}\right\} \tag{C. 6. 1. 14}$$

则熵条件也可改写为

$$a(u_L)>s>a(u_k) \tag{C. 6. 1. 15}$$

在第 3 章中我们已经列举了满足熵条件的解，并且看到熵条件的物理意义是要求两侧特征线交汇于激波线上。

从另一个角度看，弱解也可看作

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{C. 6. 1. 16}$$

的方程解在 $\mu\to 0$ 时的极限解。

现在我们引入一个 u 的函数 U，在（C. 6. 1. 5）式两边乘以$\frac{\partial U}{\partial u}$，得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F_E}{\partial x}=0\\&\frac{\partial F_E}{\partial u}=\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u}\end{aligned}\right\} \tag{C. 6. 1. 17}$$

其中

Lax 证明，如果（C. 6. 1. 17）式的解 $U(\mu)$ 在 $\mu\to 0$ 的极限记作$\underline{u}$，则

$$\frac{\partial U(\underline{u})}{\partial t}+\frac{\partial F_E(\underline{u})}{\partial x}<0 \tag{C.6.1.18}$$

F_E 叫做熵通量，上式沿图 C.2.18 中间断线两侧之间所形成的面积积分，可得

$$F_E(u_k)-F_E(u_L)<s[U(u_k)-U(u_L)] \tag{C.6.1.19}$$

这里 $U(u)$ 叫做熵函数，F_E 叫熵通量，这个不等式就是熵条件。以上这些熵条件是等价的，其中 $U(u)$ 要求为一凸函数，即

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^2}\geqslant 0 \tag{C.6.1.20}$$

对于 Burger 方程可以选 U 为 u^2，相应的 $F_E=\frac{2}{3}u^3$。

构造 TVD 格式的几种构思

TVD 格式的一般形式为

$$U_j^{n+1}=H(u_{j-k}^n,\cdots,u_{j+k}^n) \tag{C.6.1.21}$$

它的修正方程由 Harten，Hyman 和 Lax 给出，为

$$u_t+[f(u)]_x=\Delta t[\beta(u,\lambda)u_x]_x \tag{C.6.1.22}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&\beta(u,\lambda)=\frac{1}{2\lambda^2}\Big[\sum_{l=-k}^{k}l^2H_l(u,u,\cdots,u)-\lambda^2a^2(u)\Big],\lambda=\frac{\Delta t}{\Delta x}\\
&a(u)=\frac{\partial f(u)}{\partial u}\\
&H_l(u,u,\cdots,u)=\frac{\partial H(u_{-k},u_{-k+1},\cdots,u_k)}{\partial u_l}\Big|_{u_{-k}=u_{-k+1}=\cdots=u_k=u}\\
&(l=-k,\cdots,k)
\end{aligned}\right\} \tag{C.6.1.23}$$

可见 $\beta>0$ 时是一单调格式，且方程为一抛物型方程；精度对于抛物型方程来说是二阶的，所以人们可以用混合格式来消除振荡，即在光滑区用二阶精度，间断区用一阶精度。故 TVD 的生成方法是适当结合一阶、二阶格式，而一阶格式是在间断区加上人工粘性项（Van Leer 格式利用了这一思想）。

Harten 采用的是修正通量的 TVD 格式，即用 $w_t+[f(w)]_x=O(\Delta x^2)$ 方程的差分格式所得到的解为逼近待求解方程（C.6.1.5）式的解，其格式的具体形式为

$$\left.\begin{aligned}
&u_j^{n+1}=u_j^n-\lambda[\bar{f}(u_j^n,u_{j+1}^n)-\bar{f}(u_{j-1}^n,u_j^n)]\\
&\bar{f}(u_j^n,u_{j+1}^n)=\frac{1}{2}[f(u_j^n)+f(u_{j+1}^n)-\frac{1}{\lambda}Q(\lambda\cdot\bar{a}_{j+\frac{1}{2}})\cdot\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n]\\
&\bar{a}_{j+\frac{1}{2}}=\begin{cases}[f(u_{j+1}^n)-f(u_j^n)]/\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n & \Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n\neq 0\\ a(u_j^n) & \Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n=0\end{cases}\\
&\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n=u_{j+1}^n-u_j^n
\end{aligned}\right\} \tag{C.6.1.24}$$

其中 Q 的选用如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda|\bar{a}_{j+\frac{1}{2}}|_{\max}=\mu\leqslant 1\\
&|x|\leqslant Q(x)\leqslant 1 \qquad 0\leqslant|x|\leqslant\mu\leqslant 1
\end{aligned}\right\} \tag{C.6.1.25}$$

这是一个 3 点一阶显式格式。将这一方法进一步引伸，Harten 得到一个二阶 3 点的显示格式，其具体形式如下

$$
\left.\begin{aligned}
&u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda[\bar{f}^M(u_j^n,u_{j+1}^n) - \bar{f}^M(u_{j-1}^n,u_j^n)] \\
&\bar{f}^M(u_j^n,u_{j+1}^n) = \frac{1}{2}\Big[f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n) + \frac{1}{2\lambda}\Big[g_j + g_{j+1} \\
&\qquad\qquad - Q\left(\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n + \gamma_{j+\frac{1}{2}}\right)\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n\Big] \\
&g_j = S_{j+\frac{1}{2}}\max[0,\min(|\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}|,\tilde{g}_{j-\frac{1}{2}}\cdot S_{j+\frac{1}{2}})] \\
&\quad = \begin{cases} S_{j+\frac{1}{2}}\min(|\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}|,|\tilde{g}_{j-\frac{1}{2}}|) & \text{当}\ \tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}\cdot\tilde{g}_{j-\frac{1}{2}} \geqslant 0 \\ 0 & \text{当}\ \tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}\cdot\tilde{g}_{j-\frac{1}{2}} < 0 \end{cases} \\
&\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[Q(\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n) - (\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n)^2]\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n \\
&S_{j+\frac{1}{2}} = \mathrm{Sgn}(\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}) \\
&\bar{u}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_j^n)
\end{aligned}\right\} \tag{C.6.1.26}
$$

Harten 已证明上述格式具有二阶精度。

构造 TVD 格式的另一途径是采用二阶 Godunov 格式的方法。这是 Osher 和 Chakravarthy 的作法，他们格式的形式为

$$
\begin{aligned}
u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda\{&h(u_{j+1}^n,u_j^n) - h(u_j^n,u_j^n) - \frac{1}{2}[\Psi(R_{j+1}^-)(h(u_{j+1}^n,u_j^n) - h(u_j^n,u_j^n)) \\
&- \Psi(R_j^-)(h(u_j^n,u_{j-1}^n) - h(u_{j-1}^n,u_{j-1}^n))] + h(u_j^n,u_j^n) - h(u_j^n,u_{j-1}^n) \\
&+ \frac{1}{2}[\Psi(R_j^-)(h(u_{j+1}^n,u_{j+1}^n) - h(u_{j+1}^n,u_j^n)) - \Psi(R_{j-1}^+)(h(u_j^n,u_j^n) - h(u_j^n,u_{j-1}^n))]
\end{aligned}
$$

$$
\Psi(R) = \begin{cases} 0 & \text{当}\ R < 0 \\ R & \text{当}\ 0 \leqslant R \leqslant k \qquad 1 \leqslant k \leqslant 2 \\ k & \text{当}\ R > k \end{cases}
$$

$$
R_j^+ = \frac{f(u_j^n) - h(u_j^n,u_{j-1}^n)}{f(u_{j+1}^n) - h(u_{j+1}^n,u_j^n)}
$$

$$
R_j^- = \frac{h(u_{j+1}^n,u_j^n) - f(u_j)^n}{h(u_j^n,u_{j-1}^n) - f(u_{j-1}^n)}
$$

$$
h(u_{j-1}^n,u_j^n) = \frac{1}{2}[f(u_{j+1}^n) + f(u_j^n)] - \frac{1}{2}\left|\frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{u_{j+1}^n - u_j^n}\right|(u_{j+1}^n - u_j^n) \tag{C.6.1.27}
$$

关于它的进一步修正和改进可以参考 Osher 等的论文。

下面将指出 NND 格式也是 TVD 格式的一种。

为确定起见，这里的 NND 格式写为（C.2.3.57）式的形式。另外总变量按定义为

$$
\mathrm{TV}(u^n) = \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n| = \sum_j |\Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n| \tag{C.6.1.28}
$$

如果引入

$$
S_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} 1 & \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^n \geqslant 0\ \text{时} \\ -1 & \Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n < 0\ \text{时} \end{cases} \tag{C.6.1.29}
$$

则（C.6.1.28）式可改写为

$$
\mathrm{TV}(u^n) = \sum_j S_{j+\frac{1}{2}}\Delta u_{j-\frac{1}{2}}^n \tag{C.6.1.30}
$$

因此
$$\frac{\partial[\mathrm{TV}(u^n)]}{\partial t}=\sum_j S_{j+\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial u^n_{j+1}}{\partial t}-\frac{\partial u^n_j}{\partial t}\right] \tag{C.6.1.31}$$

将（C.2.3.57）式代入不难得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n_j=\left(\frac{\partial u_j}{\partial t}\right)^n=&-\frac{1}{\Delta x}\left(\Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}}+\Delta f^{-n}_{j+\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{2\Delta x}\min\bmod\left(\Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}},\Delta f^{+n}_{j+\frac{1}{2}}\right)\\&+\frac{1}{2\Delta x}\min\bmod\left(\Delta f^{+n}_{j-\frac{3}{2}},\Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2\Delta x}\min\bmod\left(\Delta f^{-n}_{j+\frac{1}{2}},\Delta f^{-n}_{j+\frac{3}{2}}\right)\\&-\frac{1}{2\Delta x}\min\bmod\left(\Delta f^{-n}_{j-\frac{1}{2}},\Delta f^{-n}_{j+\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$

根据 min mod（x，y）的定义（C.2.3.56）式后的可得上式为

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n_j=&-\frac{1}{\Delta x}\left(\Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}}+\Delta f^{-n}_{j+\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{2\Delta x}k_1\Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\Delta x}k_2\Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}}\\&+\frac{1}{2\Delta x}k_3\Delta f^{-n}_{j+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2\Delta x}k_4\Delta f^{-n}_{j-\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{C.6.1.32}$$

其中
$$0\leqslant k_i\leqslant 1 \qquad i=1,2,3,4 \tag{C.6.1.33}$$

于是（C.6.1.32）式还可改写为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n_j=-\frac{1}{\Delta x}\alpha\Delta f^{+n}_{j-\frac{1}{2}}-\frac{1}{\Delta x}\beta\Delta f^{-n}_{j+\frac{1}{2}} \tag{C.6.1.34}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=1-\frac{1}{2}(K_2-K_1)\\ \beta&=1-\frac{1}{2}(K_3-K_4)\end{aligned}\right\} \tag{C.6.1.35}$$

不难看出由（C.6.1.33）式得

$$\alpha,\beta\geqslant\frac{1}{2} \tag{C.6.1.36}$$

另一方面（C.6.1.34）式还可以改写为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n_j=-\hat{\alpha}_{j-\frac{1}{2}}\Delta u^n_{j-\frac{1}{2}}+\hat{\beta}_{j+\frac{1}{2}}\Delta u^n_{j+\frac{1}{2}} \tag{C.6.1.37}$$

其中

$$\hat{\alpha}_{j-\frac{1}{2}}=\frac{\alpha}{\Delta x}\frac{f^{+n}_j-f^{+n}_{j-1}}{u^n_j-u^n_{j-1}} \qquad \hat{\beta}_{j+\frac{1}{2}}=-\frac{\beta}{\Delta x}\frac{f^{-n}_{j+1}-f^{-n}_j}{u^n_{j+1}-u^n_j}$$

由于
$$\frac{\partial f^+}{\partial u}=a^+\geqslant 0,\qquad \frac{\partial f^-}{\partial u}=a^-\leqslant 0$$

故
$$\frac{f^{+n}_j-f^{+n}_{j-1}}{u^n_j-u^n_{j-1}}\geqslant 0,\qquad \frac{f^{-n}_{j+1}-f^{-n}_j}{u^n_{j+1}-u^n_j}\leqslant 0$$

因此有
$$\hat{\alpha}_{j+\frac{1}{2}},\hat{\beta}_{j+\frac{1}{2}}\geqslant 0 \tag{C.6.1.38}$$

将（C.6.1.37）式代入（C.6.1.31）式得

$$\frac{\partial\mathrm{TV}(u^n)}{\partial t}=\sum_j S_{j+\frac{1}{2}}\left\{-\hat{\alpha}_{j+\frac{1}{2}}\Delta u^n_{j+\frac{1}{2}}+\hat{\beta}_{j+\frac{3}{2}}\Delta u^n_{j+\frac{3}{2}}+\hat{\alpha}_{j-\frac{1}{2}}\Delta u^n_{j-\frac{1}{2}}-\hat{\beta}_{j+\frac{1}{2}}\Delta u^n_{j+\frac{1}{2}}\right\}$$

或整理得

$$\frac{\partial\mathrm{TV}(u^n)}{\partial t}=-\sum_j v_{j+\frac{1}{2}}S_{j+\frac{1}{2}}\Delta u^n_{j+\frac{1}{2}}=-\sum_j v_{j+\frac{1}{2}}\left|\Delta u^n_{j+\frac{1}{2}}\right| \tag{C.6.1.39}$$

其中

$$v_{j+\frac{1}{2}}=\hat{\alpha}_{j+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{S_{j+\frac{3}{2}}}{S_{j+\frac{1}{2}}}\right)+\hat{\beta}_{j+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{S_{j-\frac{1}{2}}}{S_{j+\frac{1}{2}}}\right)$$

由（C.6.1.29）及（C.6.1.38）两式可知 $v_{j+\frac{1}{2}}\geqslant 0$，因此由（C.6.1.39）式知

$$\frac{\partial \mathrm{TV}(u^n)}{\partial t}\leqslant 0$$

因此 NND 格式也是 TVD 格式。

利用 NND 格式计算的例子在第三章中已经讨论过了。

Harten 格式推广到方程组用于一维激波管，起始条件为

$$\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ E\end{pmatrix}=\begin{cases}\begin{pmatrix}0.445\\ 0.311\\ 8.928\end{pmatrix} & x<0\\ \begin{pmatrix}0.5\\ 0\\ 1.4275\end{pmatrix} & x>0\end{cases}$$

E 为总能，即 $E=\rho\left(e+\dfrac{u^2}{2}\right)$。图 C.6.2 为计算结果，其中方法 2 是方法 1 的改进。由图可见计算结果和精确解符合甚好。

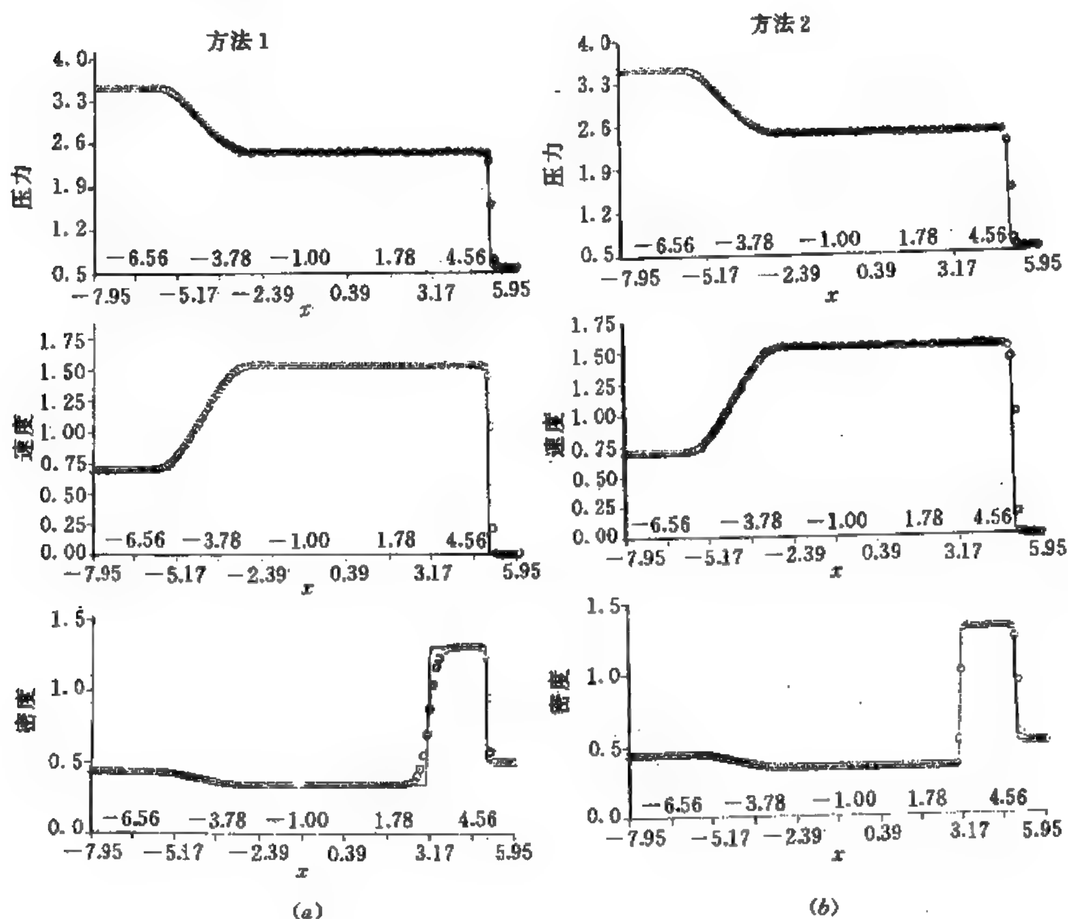


图 C.6.2

Harten 将第 1 种方法进一步推广到二维流动中，图 C. 6. 3 显示了 $M=3$ 时对一进口台阶的流动，其中 a 为 Woodward 及 Colella 的计算结果，b 为 Harten 的结果，二者很接近；图中显示的是等密度线。

Osher 等利用他们设计的差分格式计算了一喷管的流动，计算与精确解很吻合（见图 C. 6. 4-6）。由此可见 TVD 格式是一种有发展前途的格式，当然也还有些问题有待解决，这一点在本节开始时已经指出了。

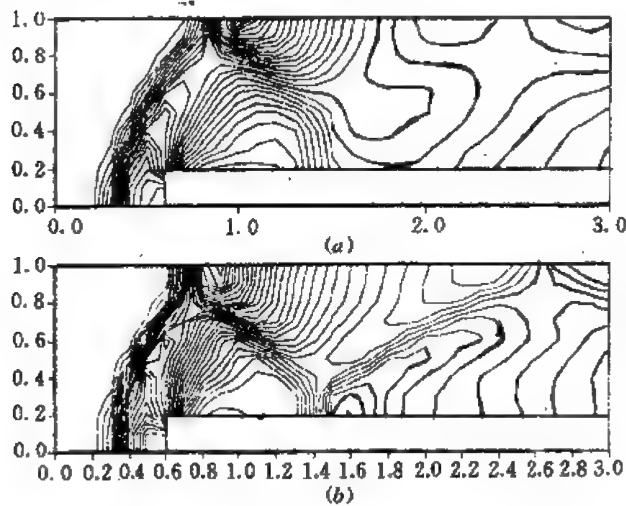


图 C. 6. 3

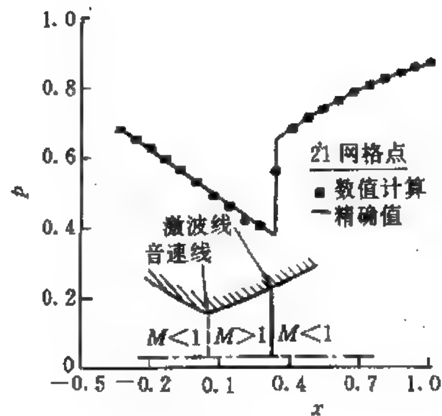


图 C. 6. 4

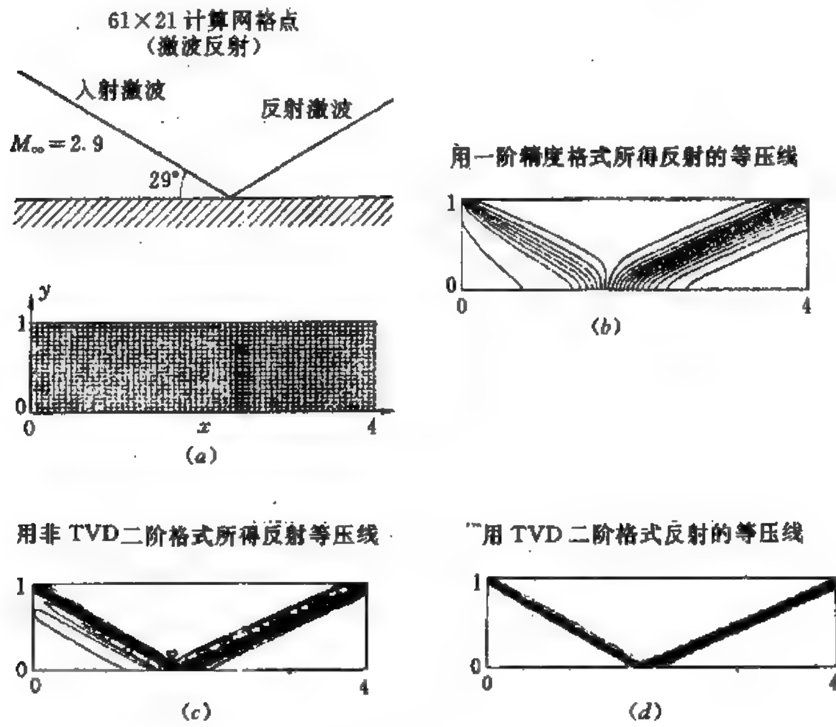


图 C. 6. 5

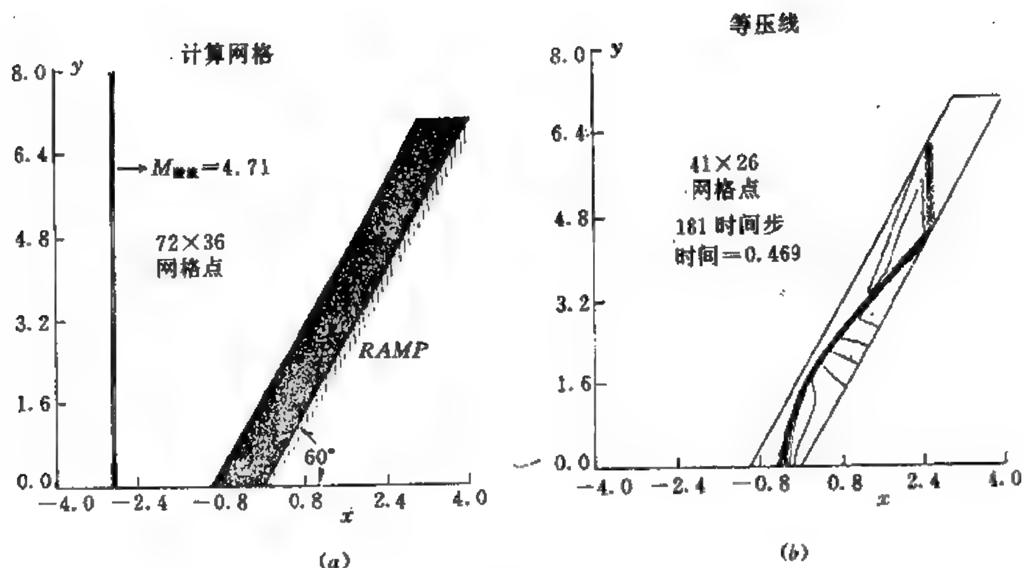


图 C.6.6

6.2 关于 ENO 方法

1985年以来 Harten, Osher 等人又提出了本质上无振荡的 ENO 格式（Essentially non-osillatory Scheme）。从形式上看它与 TVD 类似，但有实质上的差别：

(1) TVD 格式使总变差减小，强调消除振荡，ENO 格式强调消灭 $O(1)$ 阶的 Gibbs 振荡，但容许有 $O(h^r)$ 阶的附加虚拟振荡（人为空间网格长度），这使格式的建立可以提高人们需要的 r 阶；同时如果问题本身在激波前后有波动，格式将保留这些振荡，因而 ENO 的应用更为广泛。

(2) TVD 格式强调格式的单调性，但是 ENO 强调格式的自适应性，这主要表现在再构的选用上；正是由于这样建立格式更具有灵活性。

本节简单介绍 ENO 格式构造的基本思想和格式的建立。

设所求解的方程为

$$U_t + F(U)_x = 0, \qquad U(x,0) = U_0(x) \tag{C.6.2.1}$$

其中 U，F 为向量函数（m 维的）。设方程为双曲型，故矩阵

$$A(U) = \partial F(U)/\partial U \tag{C.6.2.2}$$

有 m 个实特征

$$a_1(U) \leqslant a_2(U) \leqslant \cdots \leqslant a_m(U) \tag{C.6.2.3}$$

并且对应一个完备的 m 个线性无关的特征向量。右特征向量为 $\{r_k(U)\}_{k=1}^m$，左特征向量为 $\{l_k(U)\}_{k=1}^m$，假定它们有 $l_i r_k = \delta_{ik}$

方程 (C.6.2.1) 的解 $U(x,t)$ 可以形式地表示为

$$U(\cdot,t) = E(t)U_0(\cdot) \tag{C.6.2.4}$$

$E(t)$ 是一个算符，称作方程解的演变算子，引入记号$\overline{w}(x)$ 为

$$\overline{w}(x) = \frac{1}{h}\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} w(x+y)\mathrm{d}y = (A_h w)(x) \tag{C.6.2.5}$$

它表示以 x 为中心的长度为 h 的间隔内的平均，A_h 即称作平均算子。将（C.6.2.1）式作平均算子运算，则可得

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \frac{1}{h}\left[F\left(U\left(x+\frac{h}{2},t\right)\right) - F\left(U\left(x-\frac{h}{2},t\right)\right)\right] = 0 \tag{C.6.2.6}$$

将该式对时间积分可得

$$\overline{U}(x,t+\tau) = \overline{U}(x,t) - \lambda\left[\hat{F}\left(x+\frac{h}{2},t;U\right) - \hat{F}\left(x-\frac{h}{2},t;U\right)\right] = 0 \tag{C.6.2.7}$$

其中 $\lambda=\tau/h$ 以及

$$\hat{F}(x,t;U) = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} F(U(x,t+\eta))\mathrm{d}\eta \tag{C.6.2.8}$$

设取 $x=x_j=j\Delta x\equiv jh$ 和取 $t=t_n=n\Delta t\equiv n\tau$，则有

$$\overline{U}_j^{n+1} = \overline{U}_j^n - \lambda[\hat{F}(x_{j+\frac{1}{2}},t_n;U) - \hat{F}(x_{j-\frac{1}{2}},t_n;U)] \tag{C.6.2.9}$$

其中

$$\overline{U}_j^n = \overline{U}(x_j,t_n) = \frac{1}{h}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} U(x,t_n)\mathrm{d}x \tag{C.6.2.10}$$

也称作 U 的网格区间平均。

上述方程是精确的，但是不能直接使用，需用差分方法来近似。比如近似写作

$$V^{n+1} = V_j^n - \lambda(\overline{F}_{j+\frac{1}{2}} - \overline{F}_{j-\frac{1}{2}}) \equiv (\overline{E}_h(\tau)\cdot V^n)_j \tag{C.6.2.11}$$

其中$\overline{E}_h$ 为差分算子，而$\overline{F}_{j+\frac{1}{2}}$不是前面定义的区间平均而是

$$\overline{F}_{j+\frac{1}{2}} = \overline{F}(V_{j-k+1}^n, V_{j-k+2}^n, \cdots, V_{j+k}^n) \tag{C.6.2.12}$$

并且当 $V_{j-k+1}=V_{j-k+2}=\cdots=V_{j+k}=V$ 时，$\overline{F}_{j+\frac{1}{2}}=V$。关于（C.6.2.12）式的具体形式是需要构造的。当 $V^n=\overline{U}^n$ 时$\hat{F}$和 $\overline{F}$之间有一 $O(h^r)$ 的差别，即

$$\overline{F}_{j+\frac{1}{2}} = \overline{F}(x_{j+\frac{1}{2}},t_n;U) + d(x_{j+\frac{1}{2}})h^r + O(h^{r+1}) \tag{C.6.2.13}$$

其中 $d(x)$ 是一个 Lipschitz 连续函数。将它代入（C.6.2.11）式并与（C.6.2.9）式相减得

$$\overline{U}(x_j,t_n+\tau) - [\overline{E}_h(\tau)\overline{U}(\cdot;t_n)]_j = \lambda[\mathrm{d}(x_{j+\frac{1}{2}}) - \mathrm{d}(x_{j-\frac{1}{2}})]h^r + O(h^{r+1})$$

可见$\overline{U}$与差分解之间的误差也是 h^r 的量级。现在的问题是找出$\overline{f}_{j+\frac{1}{2}}$的具体形式。该形式应使 V^n 与 $\overline{U}^n$ 之间总保持 h^r 量级的误差，同时不产生大于 $O(h^r)$ 量级的假振荡（小于 $O(h^r)$ 的假振荡是允许的）。

Herten 等人的研究得到如下的要求：

（1）设初值 $\overline{U}^n(x_j)$ 取作 V_j^n，然后设法建立一个再构（Restruction），即

$$V_h(x,t_n+0) = R(x;V^n) \tag{C.6.2.14-1}$$

（2）在小时间间隔内可以直接解

$$V_h(\cdot;t) = E(t-t_n)\cdot V_h(\cdot;t_n+0) \qquad \text{(C. 6. 2. 14-2)}$$

(3) 网格内平均可得

$$V_j^{n+1} = \overline{V}_h(x_j;t_{n+1}-0) = \frac{1}{h}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} V_h(x;t_{n+1}-0)\mathrm{d}x \qquad \text{(C. 6. 2. 14-3)}$$

这个 V_j^{n+1} 就是 $\overline{U}^{n+1}(x_j)$ 的近似值。

为了保证 ENO 的要求，R 的选用有如下的要求：

(1) $R(x;\overline{w}) = w(x) + e(x)h^r + O(h^{r+1})$ (C. 6. 2. 15-1)

其中 $e(x)$ 为 Lipschitz 连续函数 。

(2) $\overline{R}(x,\overline{w}) = \overline{w}_j$ (C. 6. 2. 15-2)

(3) $\mathrm{TV}(R(\cdot;\overline{w})) \leqslant \mathrm{TV}(w) + O(h^r)$ (C. 6. 2. 15-3)

上述第 3 个条件形式上有点像 TVD 要求，但后面附加的 $O(h^r)$ 这一项是本质的，它使格式保持本质上无振荡。

下面的讨论集中在两个问题上：

1) 再构 R 如何选用以达到上述要求？

2) 小时间间隔内的直接求解如何表示？

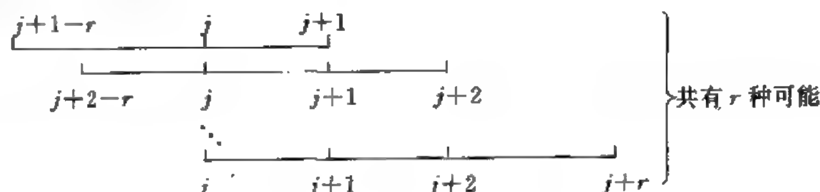
这两个问题解决后 ENO 格式也就完备了。

首先讨论再构 $R(x,w)$ 的建立方法。Herten 等建议了二种再构方法，这里介绍其中一种，即用原来的函数来构造，另一种方法叫展开法，这里从略。

为了构造 $R(x,w)$，先引入一逐段多项式 $H_r(x,w)$，使

$$H_r(x,w) \equiv q_{r,j+\frac{1}{2}}(x;w) \quad (\text{其中 } x_j < x < x_{j+1}) \qquad \text{(C. 6. 2. 16)}$$

这里 q_r 是 w 的 r 次多项式，其系数由 $r+1$ 点上的 w 值确定。这 $r+1$ 点的选用可以有多种，这里当然要选用 x_j 的 w_j 值以及 x_{j+1} 的 w_{j+1} 点，因此一共有 r 种可能，即



现在需要选出其中最光滑（在 (x_j, x_{j+1}) 区间内）的一组，为此用下面的方法选用：

引入记号 $w[x_i] = w(x_i)$

$$w[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+k}] = \frac{w[x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{i+k}] - w[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+k+1}]}{x_{i+k}-x_i} \qquad \text{(C. 6. 2. 17)}$$

如果多项式是一次的，就只有一种选用的可能，即 $j, j+1$ 二个点。这里的起点 $i_1(j)=j$。对于二次的，则要选 3 个点，就有两种可能。如果确定下来，则这一点记作 $i_2(j)$，现在假定 $i_k(j)$ 已经确定，进一步希望确定 $i_{k+1}(j)$. 这可以用下面的方法确定：

$$i_{k+1}(j) = \begin{cases} i_k(j)-1 & \text{若 } |w[x_{i_k(j)-1},x_{i_k(j)},\cdots,x_{i_k(j)+k}]| \\ & \quad < |w[x_{i_k(j)},x_{i_k(j)+1},\cdots,x_{i_k(j)+k+1}]| \\ i_k(j) & \text{否则} \end{cases} \qquad \text{(C. 6. 2. 18)}$$

由于 $i_1(j)=j$，所以 $i_{k+1}(j)$ 可以由 $k=1,2\cdots$ 递推得到。在 $i_k(j)$ 一经确定后，$H_r(x,w)$ 的确定就不难了。这里选用的点为

$$x_{i_k(j)}, x_{i_k(j)+1}, \cdots, x_{i_k(j)+k}$$

下面进一步给出一个原函数 $W(x)=\int_{x_0}^{x} w(y)\mathrm{d}y$（由于 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}x=w(x)$，故 W 为 w 的原函数），因此积分可用下面的方法计算：

$$W(x_{j+\frac{1}{2}})=\sum_{l=i_0}^{j} h_l \overline{w}_l \tag{C.6.2.19}$$

于是

$$H_r(x,W)=\sum_{k=0}^{r} W[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1+\frac{1}{2}}, \cdots, x_{i+k+\frac{1}{2}}]\prod_{l=0}^{k-1}\left(x-x_{i+l+\frac{1}{2}}\right) \tag{C.6.2.20}$$

而

$$R(x,\overline{w})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}W(x) \tag{C.6.2.21}$$

确定 R 的过程是：

（1）用（C.6.2.18）式确定 $i_k(j)$；

（2）利用（C.6.2.19）式确定 $W(x_{i+\frac{1}{2}})$，$W(x_{i+1+\frac{1}{2}}),\cdots W(x_{i+k+\frac{1}{2}})$，其中 i 即为 $i_k(j)$；

（3）由第 2 步得到的值代入（C.6.2.20）式则得到 $H_r(x,\overline{W})$，对于等间距的情况，它的表达式可以简写为

$$H_r(x)=\sum_{k=0}^{r}\frac{C_k}{k!}\left(\frac{x-x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}\right)^k \tag{C.6.2.22}$$

其中 C_k 的计算与 r 有关，比如 $r=5$，则为

$$\left.\begin{aligned}
C_0 &= \overline{d}_0\\
C_1 &= \overline{d}_1-\frac{\overline{d}_2}{2}+\frac{\overline{d}_3}{3}-\frac{\overline{d}_4}{4}+\frac{\overline{d}_5}{5}\\
C_2 &= \overline{d}_2-\overline{d}_3+\frac{11}{13}\overline{d}_4-\frac{5}{6}\overline{d}_5\\
C_3 &= \overline{d}_3-\frac{3}{2}\overline{d}_4-\frac{7}{4}\overline{d}_5\\
C_4 &= \overline{d}_4-2\overline{d}_5\\
C_5 &= \overline{d}_5
\end{aligned}\right\} \tag{C.6.2.23}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\overline{d}_k &= \Delta x^k d_{i,k}\\
d_{i,k} &= W[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+1+\frac{1}{2}}, \cdots, x_{i+k+\frac{1}{2}}]
\end{aligned}\right\} \tag{C.6.2.24}$$

（这里在得到（C.6.2.23）式时要设 $\overline{d}_k=0$，当 $k=r$ 时）利用（C.6.2.22）式再求导得

$$H_r^{(k)}=\frac{\partial^k}{\partial x^k}H_r(x)=\frac{1}{\Delta x}\sum_{l=k}^{r}\frac{C_l}{(l-k)!}\left(\frac{x-x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x}\right)^{l-k} \tag{C.6.2.25}$$

（4）最后根据 Harten 等的分析

$$R(x,\overline{w})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H_r(x;W) \tag{C.6.2.26}$$

若记

$$R(x,\overline{w})=\sum_{k=0}^{r-1}b_{j,k}(x-x_j)^k \tag{C.6.2.27}$$

利用台劳公式易得

$$b_{j,k}=\frac{H_r^{(k-1)}(x_j)}{k!} \tag{C.6.2.28}$$

这样就确定了 $R(x,\overline{w})$ 。

这一方法可以推广到 Euler 方程。由于推导过程运算较多，此处从略。

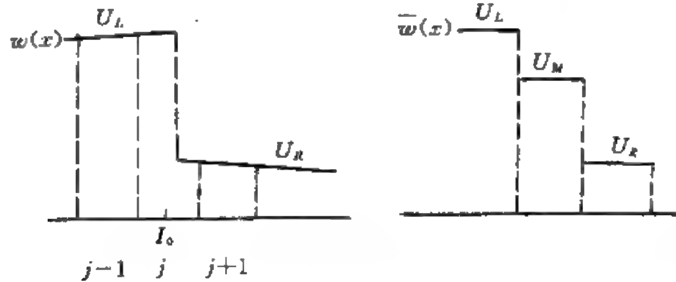


图 C.6.7

Harten 1989 年进一步提出了“子网格分辨率”(Subcell-Resolution) 的概念。问题是这样提出来的：如果直接用上面的方法计算，激波总会在至少 3 个点上作过渡，所以激波又一次被抹平。为了克服这一点，Harten 提出了修正方法。先来看看这种抹平的原因，设 $\overline{w}_j$ 具有如下的形式

$$\overline{w}_j=\begin{cases}u_L & j\leqslant -1\\ u_M & j=0\\ u_R & j\geqslant 1\end{cases}$$

它是由 $w(x)$ 得到的，$w(x)$ 如图 C.6.7 所示。在 I_0这一间隔内的平均值

$$w_0=\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_s}+\int_{x_s}^{x_{j+\frac{1}{2}}}\right)w(x)\mathrm{d}x$$

是不确定的。但这种情况可以改变，如设

$$w(x)=\begin{cases}u_L & x<\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\Delta x\\ u_R & x>\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\Delta x\end{cases}$$

其中 $\theta=\frac{u_R-u_M}{u_R-u_L}$，这样 $\overline{w}(x)$ 又可以返回到图C.6.7中左边所示的 $w(x)$，即有间断的情况。这种情况对 R 也类似地存在。这时 R 不产生 Gibbs 现象，但是也没有完全确定。

为此 R 要作如下的修正。首先定义 R 的不确定性，需要引入量 σ_j，即

$$\sigma_j=\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}R(x_j,\overline{w})\right| \quad (\text{一般取 } k=1) \tag{C.6.2.29}$$

取出比相邻值大的 σ_j，即

$$\sigma_j>\sigma_{j-1} \text{ 和 } \sigma_j>\sigma_{j+1} \tag{C.6.2.30}$$

然后看是否有

$$F_j(x_{j-\frac{1}{2}})F_j(x_{j+\frac{1}{2}})\leqslant 0 \tag{C.6.2.31}$$

其中

$$F_j(x) = \frac{1}{\Delta x}\left\{\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x} R_{j-1}(x,\overline{w})\mathrm{d}x + \int_{x}^{x_{j+\frac{1}{2}}} R_{j+1}(x,\overline{w})\mathrm{d}x\right\} - \overline{w}_j \tag{C.6.2.32}$$

在不等式（C.6.2.31）成立的条件下，说明在 I_j 间隔内有不确定性，则 $R(x,\overline{w})$ 要改为 $\hat{R}(x,\overline{w})$，即

$$\hat{R}(x,\overline{w}) = \begin{cases} R_{j-1}(x,\overline{w}) & x_{j-\frac{1}{2}} < x < \theta_j \\ R_{j-1}(x,\overline{w}) & \theta_j < x < x_{j+\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{C.6.2.33}$$

其意义如图 C.6.8所示。

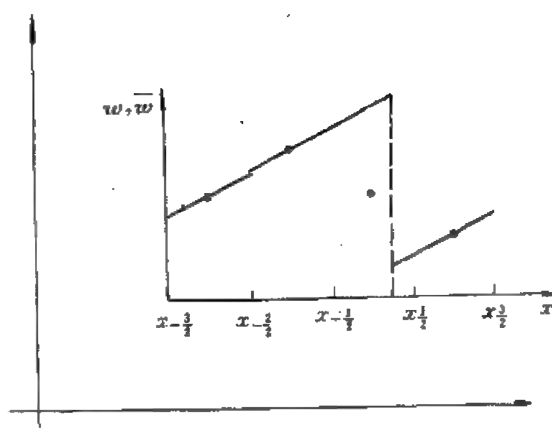


图 C.6.8

为计算 $\hat{R}(x,\overline{w})$，可得如下公式

$$\hat{R}(x,\overline{w}) = \begin{cases} R_{j-1}(x,\overline{w}) & 若\ F_j(x)F_j(x_{j-\frac{1}{2}}) > 0 \\ R_{j+1}(x,\overline{w}) & 否则 \end{cases} \tag{C.6.2.34}$$

这里讨论的是 $m=1$ 的数量方程的情况，对于 $m>1$ 的向量情况则要作一些推广，此处从略。

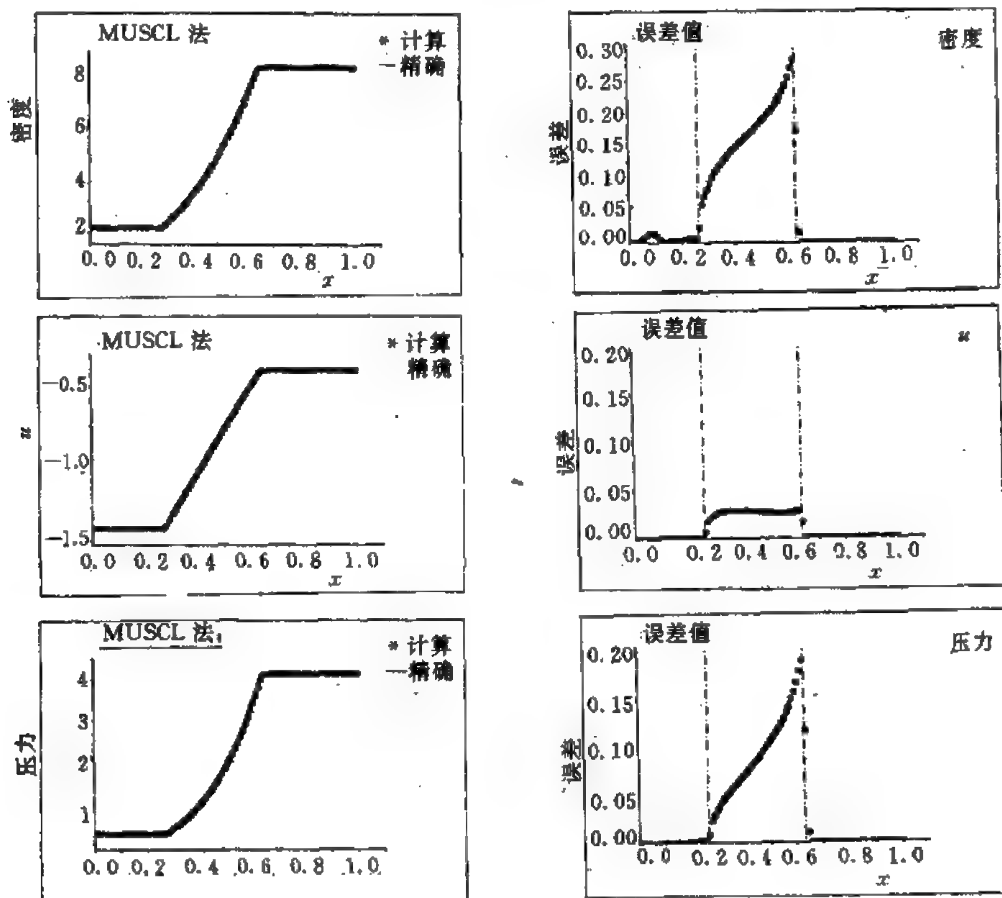


图 C.6.9

下面需要沿时间方向的积分，即小时间间隔内解 $V_h(\cdot; t)$。Harten 等人最早提出的方法是比较复杂的，而且难以推广到二维。Shu 等则作了改进，其指导思想是用 Runge-Kutla 方法。

有了以上两步后，再对解在小区间平均即可得到新的解。从以上分析可以看出，再构在这里是一个重要步骤。

下面举几个算例。

算例 1

$$U=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ E\end{pmatrix}=\begin{cases}\begin{pmatrix}1.9854\\ 2.8054\\ 3.3412\end{pmatrix} & x<0.5\\ \begin{pmatrix}8.2848\\ -3.224\\ 10.6702\end{pmatrix} & x>0.5\end{cases}$$

利用 TVD—MUSCL 法（此法由 Van Leer（1979）提出，Von Collela（1985）改进的守恒律单调上风格式，为二阶 TVD 格式）及 ENO 法的计算结果及与精确解的比较如图 C. 6. 9（TVD 法与精确解的比较）及图 C. 6. 10（三阶 ENO 法与精确解的比较）所示。其中精确解采用 Riemann 解。可以看出 ENO 法比较精确一些但差别不大。

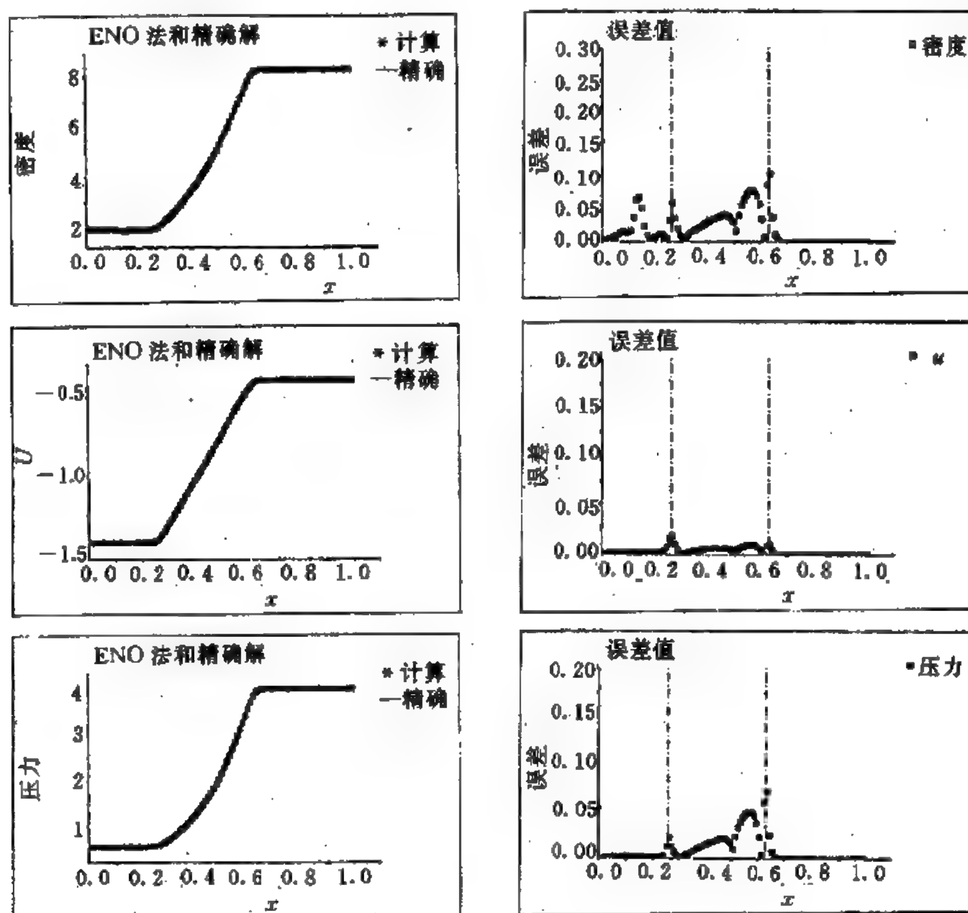


图 C. 6. 10

算例 2

$$U=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ E\end{pmatrix}=\begin{cases}\begin{pmatrix}0.445\\ 0.3106\\ 8.9284\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0.5\\ 0\\ 1.4275\end{pmatrix}\end{cases}$$

计算结果与精确解的比较如图 C.6.11所示，其中（a）为 TVD 法与精确解的比较，（b）为二阶 ENO 法与精确解的比较。

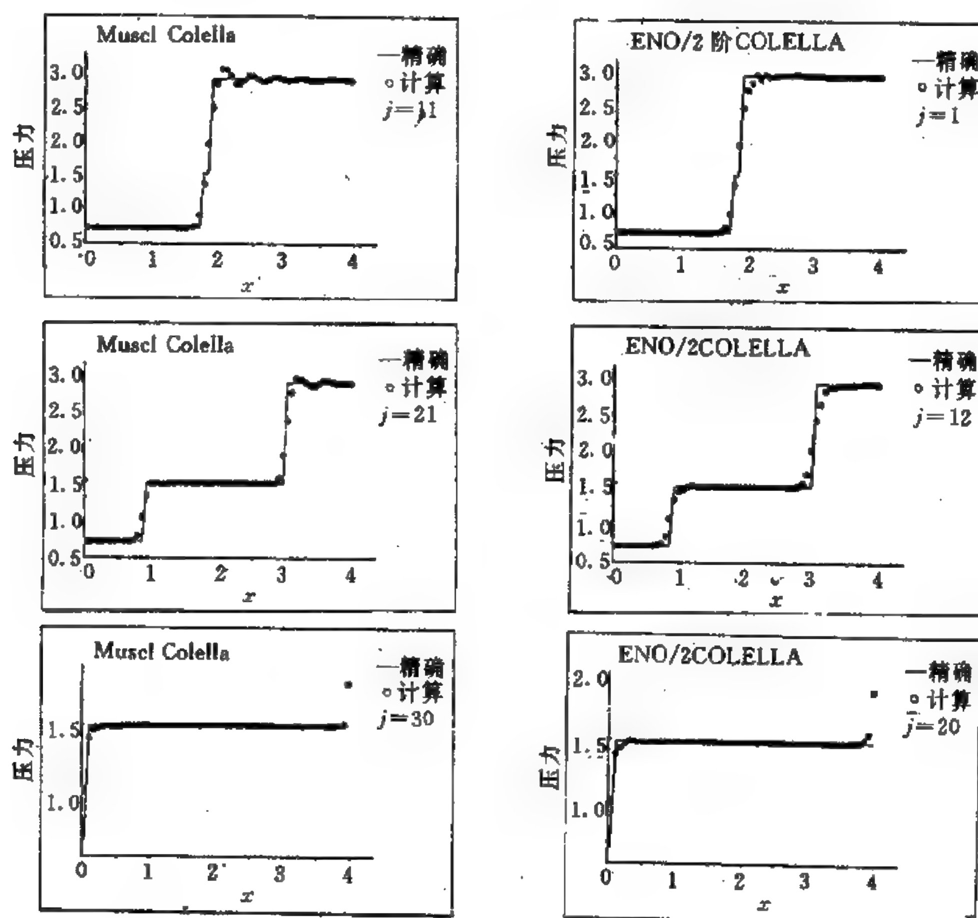


图 C.6.11

算例 3 二维问题

$$x=0\text{ 处}\begin{pmatrix}\rho\\ u\\ v\\ p\end{pmatrix}_{(0,y,t)}=\begin{pmatrix}1\\ 2.9\\ 0\\ \dfrac{1}{1.4}\end{pmatrix},\quad y=1\text{ 处}\begin{pmatrix}\rho\\ u\\ v\\ p\end{pmatrix}_{(x,1,t)}=\begin{pmatrix}1.69997\\ 2.61934\\ -0.50632\\ 1.52819\end{pmatrix}$$

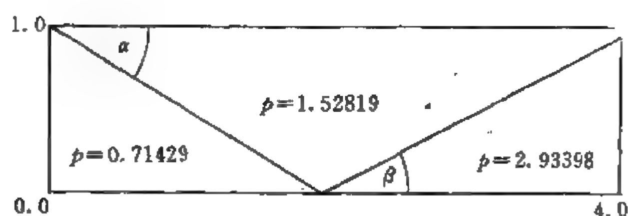
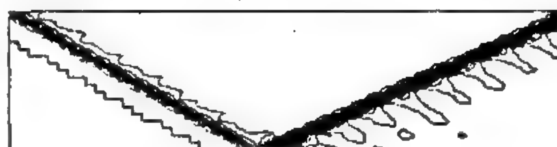
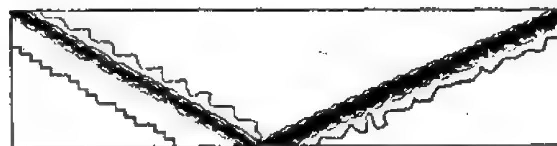


图 C.6.12

计算域如图C.6.12 ($\alpha=29°$)。计算结果如图C.6.13。图 (a) 为TVD法计算的等压线，(b) 为二阶ENO法计算的等压线。从图上看其结果基本相近。



(a)



(b)

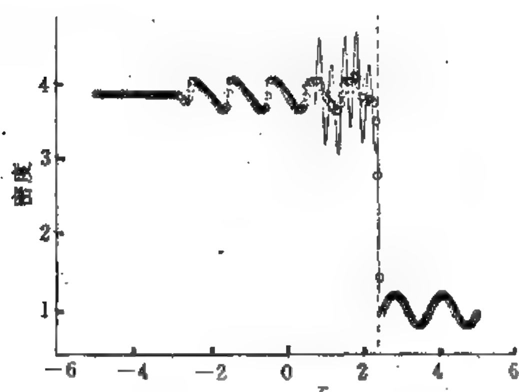
图 C.6.13

算例 4

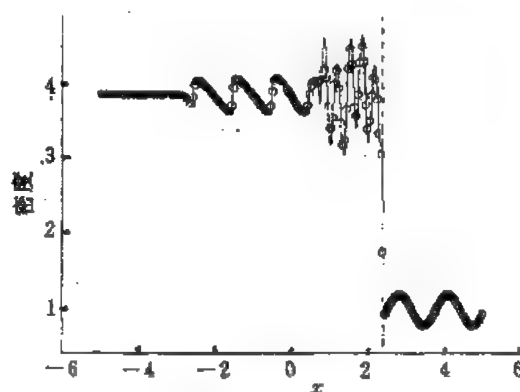
$$\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ p\end{pmatrix}=\begin{cases}\begin{pmatrix}3.857143\\ 2.629369\\ 10.333333\end{pmatrix} & x<-4\\[2ex] \begin{pmatrix}1+0.2\sin 5x\\ 0\\ 1\end{pmatrix} & x\geqslant -4\end{cases}$$

图C.6.14 (a) 表示了TVD法与精确解的比较，(b) 表示了四阶ENO法与精确解的比较。

由以上算例可以看出，ENO格式优于TVD格式，特别当激波前后本身有振荡时，计算精度相差比较明显。ENO格式的不足之处，是程序设计和计算都比较麻烦。



(a) TVD法与精确解之比较
oooo为计算结果



(b) 四阶ENO法与精确解之比较
oooo为计算结果

图 C.6.14

6.3 自适应网格

为了计算具有高 Re 数的流场，必须将流场内的网格加密。但是实际计算中并不需要对全流场的网格中所有部分同样地加密，只需在某些部分，如物面附近，尾流区等的网格加密即可。因此需要事先估计一些变化较快的区域，但这种估计有时是正确的，有时则不正确。特别是不定常流动，流动过程本身就是变化的，所以需要不断地调整网格的位置或疏密，这样就产生了自适应网格（Adaptive Meshes）。

自适应网格要求网格点的分布最终能满足精确地代表物理问题的解，在有些区比较密，在有些区则比较稀疏，但不能使某些地区为空白。网格本身也应当尽量接近正交，并且在调整时作为一个整体进行，以便于照顾到各点间的协调关系。

调整方法一般分两大类：

(1) 确定新的网格数目，再行调整，对新老值作修正；

(2) 用动网格的方法，与方程本身进行联系求解，这时网格上的值不必用插值法求解。

下面着重讨论用变分原理来生成自适应的网格。

6.3.1 一维自适应网格

在常微分方程边值问题数值求解的研究中发现，若引入权函数 $w(x)$，使

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} w(x)\mathrm{d}x = \text{常数} \tag{C.6.3.1}$$

则数值解的误差可以减少。上式离散化的形式为

$$w_j \Delta x_j = \text{常数} \tag{C.6.3.2}$$

其中 $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$，可见网格密处 w 值要大，网格稀处 w 值要小。

引入 ξ 坐标，使 $x=x(\xi)$，$\Delta x = x_\xi \Delta\xi$，设 $\Delta\xi$ 为常数。x_ξ 就代表了网格间距的大小，于是由（C.6.3.2）式知

$$x_\xi w = \text{常数} \tag{C.6.3.3}$$

这一条件可用变分原理来表示。若 w 为 ξ 的已知函数，则上式相当于积分

$$I_1 = \int_1^N w(\xi) x_\xi^2 \mathrm{d}\xi \tag{C.6.3.4}$$

的极值，因为它的 Euler 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial(wx_\xi^2)}{\partial x_\xi} - \frac{\partial(wx_\xi^2)}{\partial x} = 0$$

由于上式左端项第2项为零，故上式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(wx_\xi) = 0$$

积分得（C.6.3.3）式。

另外若 w 为 x 的已知函数，则（C.6.3.3）式与积分

$$I_2 = \int_1^N [w(x)x_\xi]^2 \mathrm{d}\xi \tag{C.6.3.5}$$

取极值等价。在 I_1 和 I_2 中的权函数 w 具有不同的意义。在 I_1 中 w 是网格点 ξ 的函数，在 I_2 中 w 则是坐标的函数。现记（C.6.3.3）式中的常数为 C，并选取 C 的值使 x 的区间基准化为（0，

L)。即

$$x_t = \frac{C}{w}, \quad C = L \Big/ \int_1^N \frac{d\xi}{w}$$

或

$$x_t = \frac{L}{w\int_1^N \frac{d\xi}{w}} \tag{C.6.3.6}$$

以上积分中均以 ξ 为自变量。如果以 x 为自变量，则（C.6.3.3）式与下列积分值等价：

$$I_3 = \int_0^L \frac{\xi_x^2}{w(x)} dx \tag{C.6.3.7}$$

又若积分变量为 x，而 w 则为 ξ 的函数，则相应的积分应当是

$$I_x = \int_0^L \left[\frac{\xi_x}{w(\xi)}\right]^2 dx \tag{C.6.3.8}$$

这里

$$\xi_x = w/C \tag{C.6.3.9}$$

积分后得

$$C = \frac{1}{N-1}\int_0^L w dx \tag{C.6.3.10}$$

因此对应的变换为

$$\xi(x) = 1 + (N-1)\frac{\int_0^x w dx}{\int_0^L w dx} \tag{C.6.3.11}$$

利用（C.6.3.10）式上式可写为

$$\xi(x) = 1 + \frac{1}{C}\int_0^x w dx$$

对 x 求导得

$$\xi_x = \frac{w}{C} = (N-1)w\Big/\int_0^L w dx$$

$$x_t = \frac{1}{(N-1)w}\int_0^L w dx \tag{C.6.3.12}$$

决定网格分布的解和微分方程本身的解往往可以分别进行，即每求若干步微分方程的解（这里假定问题是非定常的或迭代求解定常问题）之后，再根据生成网格的方程计算新网格。以上给出的坐标变换关系允许将解方程及生成网格动态地联列起来完成。生成网格的方程为（C.6.3.6）或（C.6.3.12），它们之间的不同在于在（C.6.3.6）式中 $w = w(\xi)$，而在（C.6.3.12）式中 $w = w(x)$。

现在的问题是 w 如何取。最简单的方法是取

$$w = u_x \tag{C.6.3.13}$$

根据这种取法，（C.6.3.3）式就成为

$$u_x \xi_x = C$$

或

$$u_\xi = C \tag{C.6.3.14}$$

这就是说每一网格间距对应于相同的 u 值增量。这种方法的缺点是 $u_x \to 0$ 时，网格间距 $\to \infty$。为此稍加改变，取

$$w = \sqrt{1 + u_x^2} \tag{C.6.3.15}$$

这时取 $$ds^2=dx^2+du^2=(1+u_x^2)dx^2$$
故 $$ds=wdx$$
即 $w=s_x$，于是（C.6.3.3）式变为
$$s_x x_\xi = C$$
或 $$s_\xi = C \tag{C.6.3.16}$$
也就是说网格间距由 $u=u(x)$ 曲线的等弧长条件确定。更一般的取法是
$$w=\sqrt{1+\alpha^2u_x^2} \tag{C.6.3.17}$$
于是在 x/α 与之间的关系曲线上
$$d\bar{s}=\left[d\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]^2+du^2=[1+u_{\frac{x}{\alpha}}^2]\left[d\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]^2$$
故 $$w=\bar{s}_{\frac{x}{\alpha}}$$
代入（C.6.3.3）式得 $$x_\xi\bar{s}_{\frac{x}{\alpha}}=C$$
或 $$\bar{s}_\xi=C/\alpha=\text{常数} \tag{C.6.3.18}$$
即在 $u\sim x/\alpha$ 平面上按等弧线取网格，当 $\alpha>1$ 时原来斜率大的地方变得更陡，网格加密效应更加明显。图C.6.15中表示了这一情况，$\alpha^2u_x^2$ 项的作用是使网格向大梯度区集中，当 α 越大，集中的效应也越大。

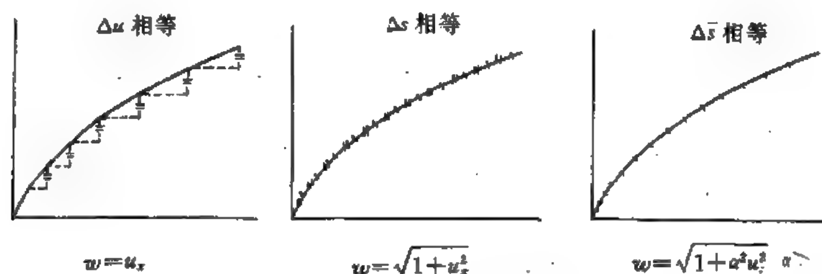


图 C.6.15

以上作法也有一定缺点，在有些问题中 $u_x=0$，但曲率却最大。如果希望在曲率大的地方网格加密，上述方法就不太合适。此时可用
$$w=1+\alpha^2|K| \tag{C.6.3.19}$$
其中 $$K=\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{C.6.3.20}$$
K 为 $u\sim x$ 曲线的曲率。

为兼顾斜率和曲率的影响，可以用
$$w=(1+\beta^2|K|)\sqrt{1+\alpha^2u_x^2} \tag{C.6.3.21}$$
或 $$w=1+\alpha|u_x|+\beta|u_{xx}| \tag{C.6.3.22}$$

6.3.2 二维自适应网格

以上方法可以推广到二维的情况。这里引用 Brackbill 和 Saltzmann 的方法，并引用 Kreis 等人的结果。

设 (x, y) 为物理平面，(ξ, η) 为变换平面，则光滑性可用积分

$$I_S = \iint[(\nabla\xi)^2 + (\nabla\eta)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{C.6.3.23}$$

来度量；正交性用

$$I_0 = \iint(\nabla\xi \cdot \nabla\eta)^2 J^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{C.6.3.24}$$

来度量；网格尺寸变化用

$$I_V = \iint wJ\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{C.6.3.25}$$

来度量。其中

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \tag{C.6.3.26}$$

$w(x, y)$ 是用来控制网格尺寸大小的，当 w 与流场的某一特性相联系时，本方法就可以用于生成自适应网格。Brackbill 和 Saltzmann 提出用积分

$$I = I_S + \lambda_V I_V + \lambda_0 I_0 \tag{C.6.3.27}$$

的极值的 Euler 方程来生成网格，其中 λ_V 和 λ_0为两个大于零的常数，其数值的大小取决于网格尺寸变化以及对正交性要求。

下面我们来导出积分 I 取极值时的 Euler 方程。

因为在计算平面上区域形状是简单的，规则的，因此为求解方便，首先将积分 I_S，I_0变换到 ξ，η 平面上来。注意到

$$\left.\begin{aligned} \xi_x &= y_\eta/J, & \xi_y &= -x_\eta/J \\ \eta_x &= -y_\xi/J, & \eta_y &= x_\xi/J \end{aligned}\right\} \tag{C.6.3.28}$$

于是

$$I_\sigma = \iint F_\sigma \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \qquad (\sigma = S,0,V) \tag{C.6.3.29}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} F_S &= (x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2)/J \\ F_0 &= (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2 \\ F_V &= wJ^2 \end{aligned}\right\} \tag{C.6.3.30}$$

于是使积分 I 取极值的 Euler 方程为

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x_\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x_\eta}\right)(F_S + \lambda_0 F_0 + \lambda_V F_V) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial y_\xi} - \frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial y_\eta}\right)(F_S + \lambda_0 F_0 + \lambda_V F_V) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{C.6.3.31}$$

以上二式展开得

$$\left.\begin{aligned} b_1 x_{\xi\xi} + b_2 x_{\xi\eta} + b_3 x_{\eta\eta} + a_1 y_{\xi\xi} + a_2 y_{\xi\eta} + a_3 y_{\eta\eta} = d_1 \\ a_1 x_{\xi\xi} + a_2 x_{\xi\eta} + a_3 x_{\eta\eta} + c_1 y_{\xi\xi} + c_2 y_{\xi\eta} + c_3 y_{\eta\eta} = d_2 \end{aligned}\right\} \tag{C.6.3.32}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_k &= a_{sk} + \lambda_0 a_{0k} + \lambda_V a_{Vk} \\ b_k &= b_{sk} + \lambda_0 b_{0k} + \lambda_V b_{Vk} \\ c_k &= c_{sk} + \lambda_0 c_{0k} + \lambda_V c_{Vk} \end{aligned}\right\} \quad (k = 1,2,3) \tag{C.6.3.33}$$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} a_{sk} &= -A\alpha, 2A\beta, -A\gamma \\ b_{sk} &= B\alpha, -B\beta, B\gamma \\ c_{sk} &= C\alpha, -2C\beta, C\gamma \end{aligned}\right\} \\ &\left.\begin{aligned} a_{0k} &= x_\eta y_\eta, x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi, x_\xi y_\xi \\ b_{0k} &= x_\eta^2, 2(2x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta), x_\xi^2 \\ c_{0k} &= y_\eta^2, 2(x_\xi x_\eta + 2y_\xi y_\eta), y_\xi^2 \end{aligned}\right\} \\ &\left.\begin{aligned} a_{Vk} &= -x_\eta y_\eta, x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi, -x_\xi y_\xi \\ b_{Vk} &= y_\eta^2, -2y_\xi y_\eta, y_\xi^2 \\ c_{Vk} &= x_\eta^2, -2x_\xi x_\eta, x_\xi^2 \end{aligned}\right\} \\ &\left.\begin{aligned} d_1 &= -\frac{J^2}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\lambda_v \\ d_2 &= -\frac{J^2}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\lambda_v \end{aligned}\right\} \\ &\left.\begin{aligned} &A = x_\xi y_\xi + x_\eta y_\eta, B = y_\xi^2 + y_\eta^2, C = x_\xi^2 + x_\eta^2 \\ &\alpha = \frac{(x_\eta^2 + y_\eta^2)}{J^3}, \beta = (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)/J^2 \\ &\gamma = (x_\xi^2 + y_\xi^2)/J^3 \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{C.6.3.34}$$

在求解（C.6.3.32）式前，首先要给定控制网格正交性和尺寸变化的 λ_0和 λ_V 的大小。由于

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = O\left(\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta\xi\Delta\eta}\right) = O\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta\xi^2}\right) = O(h^2)$$

于是 $I_s \sim 1$，$I_V \sim wh^4$，$I_0 \sim h^4$；若 $w \sim 1$，则应取

$$\lambda_V = \beta_V/h^4, \quad \lambda_0 = \beta_0/h^4$$

β_V，β_0的大小分别反映了尺寸变化与正交性的重要程度。

在绕流中 J_{max}和 J_{min}相差可以有 n 个量级。如按 I_V 的变分取，应为

$$wJ^2 = 常数$$

若 $w \sim 1$，则 $J^2 \sim$ 常数，这时网格各处都一样大，显然不合适。一般取 $wJ^2 \sim 1$，所以可选

$$w \sim (\nabla f^2)$$

其中 f 为某流场参数，如取压力作参数，于是

$$w = w_0(\xi, \eta)/J^2$$

$w_0 \sim 1$，表 C.6.1 给出了 NACA0012 在 $\alpha^0=0$，$M_\infty=0.8$ 时各种网格的计算结果。

表 C.6.1

序号	网格型式	边界点分布
1	非自适应（Jamson FLO52网格）	给定
2	非自适应（光滑网格 $\beta_v=\beta_0=0$）	给定
3	自适应（$\beta_v=10$，$\beta_0=0$）	给定
4	自适应（$\beta_v=10$，$\beta_0=0$）	垂直翼面
5	自适应（$\beta_v=10$，$\beta_0=0$）	翼面上点分布间距与流场内第一层点距离成正比

所求得的网格如图 C.6.16—19 所示。其中图 C.6.16，(*a*) 为网格 1，(*b*) 为网格2，(*c*) 为用网格 1，2 得到的计算结果。图 C.6.17 (*a*) 表示网格 3，(*b*) 为压力分布的计算结果。图 C.6.18 (*a*) 为网格 4，(*b*) 为压力分布。图 C.6.19 (*a*) 为网格 5，(*b*) 为压力分布比较。

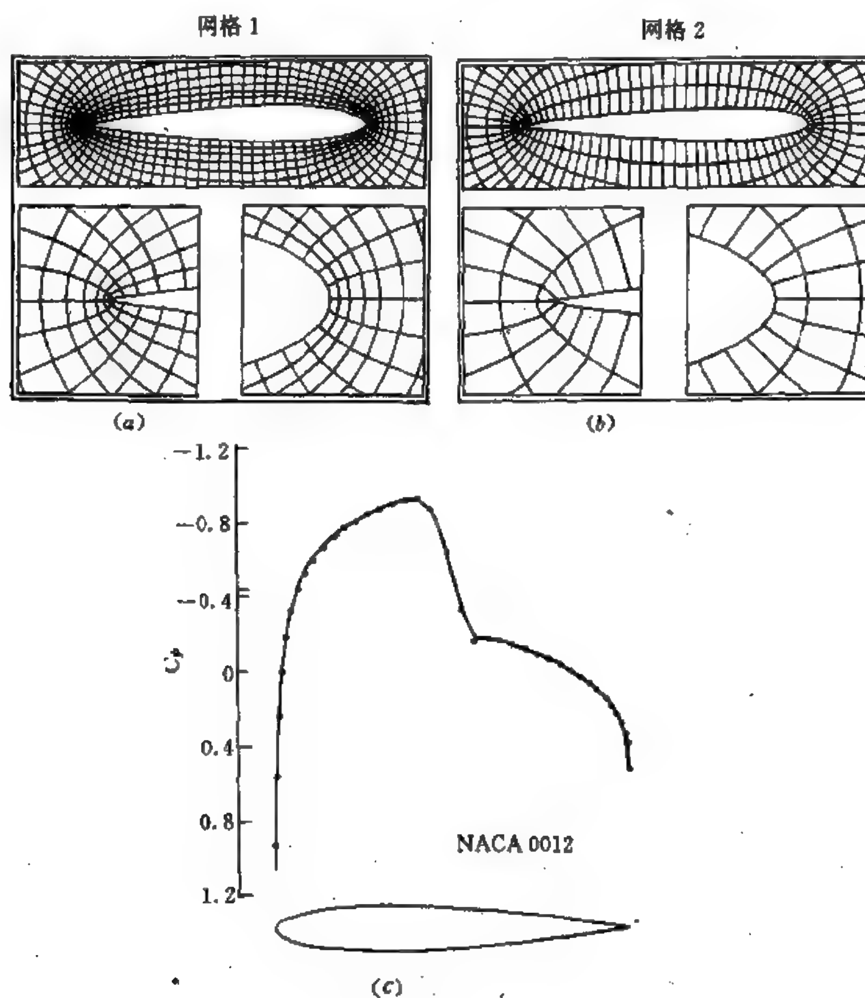
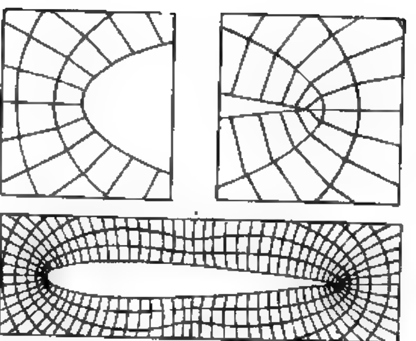
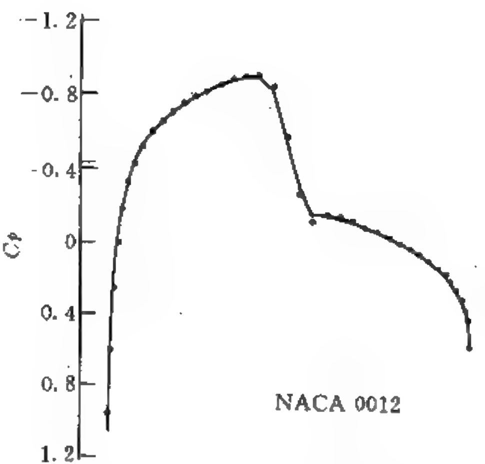


图 C.6.16

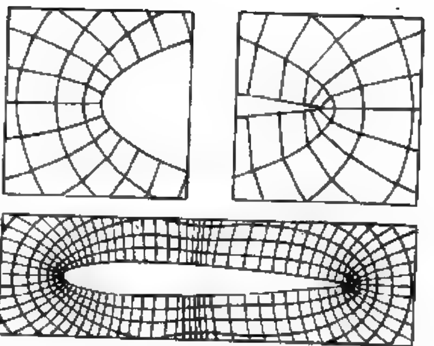


(a) 网格 3

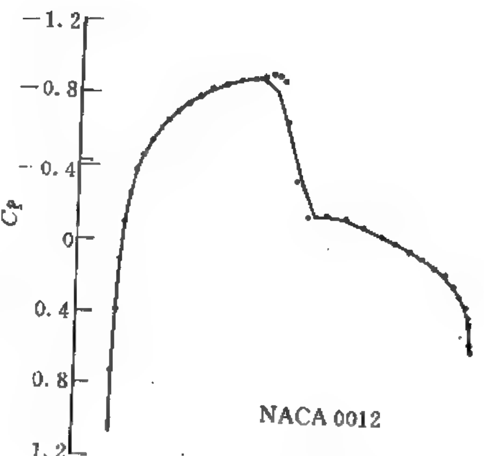


(b) 压力分布比较

图 C.6.17

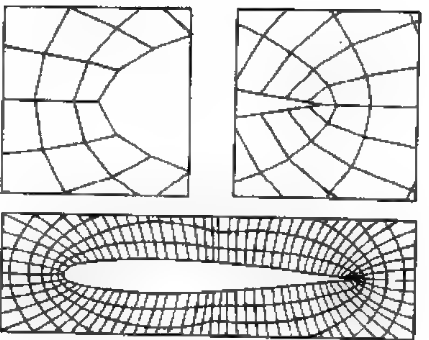


(a) 网格 4

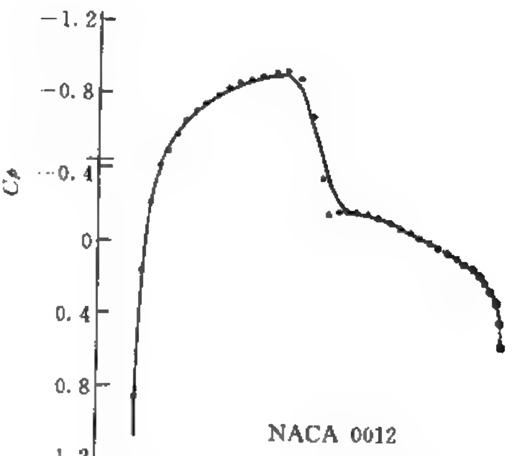


(b) 压力分布比较

图 C.6.18



(a) 网格 5



(b) 压力分布比较

图 C.6.19

6.4 多重网格法

在数值计算中经常遇到大型代数方程组的求解，由于计算问题越来越复杂，相应地代数方程组的形式也越来越复杂，阶数越来越高，求解难度也就越来越大。最常用的方法是迭代法，但是迭代法一般比较慢，即使加上松弛因子予以加速，速度仍较慢，因此加速求解代数方程组是一个十分重要的问题。在B篇中我们曾介绍过直接法，谱方法等，但是这些方法对问题本身要求十分严格，使用起来很不方便，只能用于少数问题。所以继续寻找和发展一些新的加速收敛或加速求解的方法仍然是一个有待解决的问题。

近十多年来发展起来的多重网格法 (Multiple Grid Method) 是一种加速收敛的比较好的方法。它首先用来求解椭圆形问题，后来又被用于解与时间相关的发展方程、特征问题、分岔问题及非线性问题等，向量机出现后这一方法变得更加有效。

多重网格法的思想比较简单。求解一个问题时总要将区域分成网格，为了提高计算精度，一般应将网格划分得足够细，这样计算就会比较麻烦，迭代时间也比较长。为此可以先将网格划分得稀疏一些，得到一个初步结果，然后再加密网格，其初值可以在上一次计算基础上插值得到，这样就可以减少计算时间。另外为了减少计算时间一般说一开始并不需要很高的精度，而是通过网格的反复加密和稀疏，最后得到精确的结果。当然多重网格法需要在粗细网格上交替进行，目的还在于将误差通过滤波方法减少。下面我们讨论多重网格的具体作法。

6.4.1 关于迭代法的收敛问题

为了说明多重网格法的基本思想，首先讨论一下 Poisson 方程的求解问题：

$$\left.\begin{aligned}&L_u \equiv au_{xx} + bu_{yy} = f(x,y)(ab>0)(x,y)\in\Omega\\&u|_\Gamma = g(x,y)\end{aligned}\right\} \qquad (C.6.4.1)$$

采用高斯-塞德尔迭代公式

$$a\frac{u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n}}{\Delta x^2} + b\frac{u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n}}{\Delta y^2} = f_{i,j} \qquad (C.6.4.2)$$

引入记号 $\qquad \varepsilon^n = u - u^n \qquad$ (C.6.4.3)

显然收敛的标准是 $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\|\varepsilon^n\| = 0$

借助 (C.6.4.2) 式不难得出误差发展所满足的方程为

$$a\frac{\varepsilon_{i-1,j}^{n+1} - 2\varepsilon_{i,j}^{n+1} + \varepsilon_{i+1,j}^{n}}{\Delta x^2} + b\frac{\varepsilon_{i,j-1}^{n+1} - 2\varepsilon_{i,j}^{n+1} + \varepsilon_{i,j+1}^{n}}{\Delta y^2} = 0 \qquad (C.6.4.4)$$

设 ε^n 可以写成富氏级数，取富氏级数的某一项

$$\varepsilon^n \sim E^n e^{ik_x x} e^{ik_y y} \qquad (C.6.4.5)$$

为简单起见，令

$$A = \frac{a}{\Delta x^2}, \quad B = \frac{b}{\Delta y^2} \qquad (C.6.4.6)$$

将它们代入 (C.6.4.5) 式得到

$$E^n(Ae^{ik_x\Delta x} + Be^{ik_y\Delta y}) + E^{n+1}(Ae^{-ik_x\Delta x} + Be^{-ik_y\Delta y} - 2A - 2B) = 0 \qquad (C.6.4.7)$$

放大因子

$$G=\frac{E^{n+1}}{E^{n}}=\frac{Ae^{ik_x\Delta x}+Be^{ik_y\Delta y}}{Ae^{-ik_x\Delta x}+Be^{-ik_y\Delta y}-2A-2B} \tag{C.6.4.8}$$

为简单起见，设 $\Delta x=\Delta y=\Delta$，$a=b$，故有 $A=B$，上式可变为

$$|G|=\left|\frac{(\cos k_x\Delta x+\cos k_y\Delta y)+\mathrm{i}(\sin k_x\Delta x+\sin k_y\Delta y)}{4-(\cos k_x\Delta x+\cos k_y\Delta y)+\mathrm{i}(\sin k_x\Delta x+\sin k_y\Delta y)}\right| \tag{C.6.4.9}$$

可见对于不同的 k_x，k_y 有不同的误差衰减率，如

$$\left.\begin{aligned}&k_x\Delta x=k_y\Delta y=\pi\text{时},|G|=\frac{1}{3}\\&k_x\Delta x=k_y\Delta y=\frac{\pi}{2}\text{时},|G|=\sqrt{\frac{1}{5}}\\&k_x\Delta x=k_y\Delta y\to 0\text{时},|G|\to 1\end{aligned}\right\} \tag{C.6.4.10}$$

可见 k（波数）比较大时，对于同一种网格而言，误差衰减率就大（放大因子小），而 k（波数）很小时，衰减就慢，也就是误差的高频分量衰减得比较快，而低频分量衰减得比较慢；而有些高频分量衰减也很慢，如

$$k_x\Delta x=k_y\Delta y=2\pi\text{时},|G|=1 \tag{C.6.4.11}$$

所以迭代实际上是使误差的低频及某些高频分量衰减的过程，这一过程越长，计算所花费的时间也越长。

当然（C.6.4.2）式是一个点迭代过程。我们改用线迭代，比如沿 x 方向线迭代，差分方程为

$$a\frac{u_{i-1,j}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i+1,j}^{n}}{\Delta x^2}+b\frac{u_{i,j-1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}=f_{i,j} \tag{C.6.4.12}$$

用与上述类似的方法可以得到误差放大因子为

$$|G|=\left|\frac{1}{2(2-\cos k_y\Delta y)-e^{-ik_x\Delta x}}\right| \tag{C.6.4.13}$$

不难得到

$$\left.\begin{aligned}&k_x\Delta x=k_y\Delta y=\pi\text{时},|G|=\frac{1}{7}\\&k_x\Delta x=k_y\Delta y=\frac{\pi}{2}\text{时},|G|=\sqrt{\frac{1}{17}}\\&k_x\Delta x=k_y\Delta y\to 0\text{时},|G|=1\\&k_x\Delta x=k_y\Delta y=2\pi\text{时},|G|=1\end{aligned}\right\} \tag{C.6.4.14}$$

所以用线迭代可以加速误差的一些高频和中频分量的衰减，但对于低频和一些特别的高频误差分量仍然不能加速衰减。

上面只是改变 k 值，对于同一个波分量，如果 Δx，Δy 值改变了，它的衰减能力也可以得到改变。比如对细网格而言，$\Delta^{(k)}$ 比较小，如果将它放大一倍，即网格变稀为 $\Delta^{(k-1)}$（$=2\Delta^{(k)}$），对于同一频率的误差分量 $k\Delta$ 值就增加一倍。比如原来是 $k\Delta^{(k)}=2\pi$，现在 $k\Delta^{(k-1)}=\pi$，衰减率就提高了；另外如果将网格加密一倍，即 $\Delta^{(k+1)}=\frac{1}{2}\Delta^{(k)}$，对于同一 k 值，$k\Delta^{(k+1)}=\frac{1}{2}k\Delta^{(k)}$，因此 $k\Delta=2\pi$，在现变为 π，这一频率的误差分量衰减因子也大为提高，于是迭代过程得到了加速。由上述分析可知，网格不能简单地一步一步地加密或变稀，而是反复进行，这样误差将不断减小，迭代过程得以加速。不同尺度的网格称作不同层次，有几个层次的网格尺度就构成了

多层网格，在多层网格上反复交替进行以加速迭代收敛过程就叫做多重网格法。

6.4.2 多重网格法的基本作法

现在讨论多重网格法的具体步骤。

设网格的步长为 h_k ($k=0, 1, 2\cdots, M$)，记原方程 (C.6.4.1) 式为

$$Lu = f \tag{C.6.4.15}$$

用 h_k 网格得到的差分方程为

$$L_k u_k = f_k \tag{C.6.4.16}$$

人们最后要求解的是

$$L_M u_M = f_M \tag{C.6.4.17}$$

这里假定

$$h_0 > h_1 > \cdots > h_M \tag{C.6.4.18}$$

对于线性方程，设 $\bar{u}_M$ 是 (C.6.4.17) 式的近似解，u_M 则为 (C.6.4.17) 式的精确解，则应当有

$$L_M \bar{u}_M = f_M - d_M \tag{C.6.4.19}$$

d_M 是由于解近似引起的亏损，若记

$$v_M = u_M - \bar{u}_M \tag{C.6.4.20}$$

则 (C.6.4.19) 式可写作

$$L_M v_M = d_M \tag{C.6.4.21}$$

上述方程称为亏损方程。

线性多重网格法是求解 (C.6.4.17) 式和在 h_k 网格上求解

$$L_k v_k = d_k \tag{C.6.4.22}$$

方程相结合的一种方法。

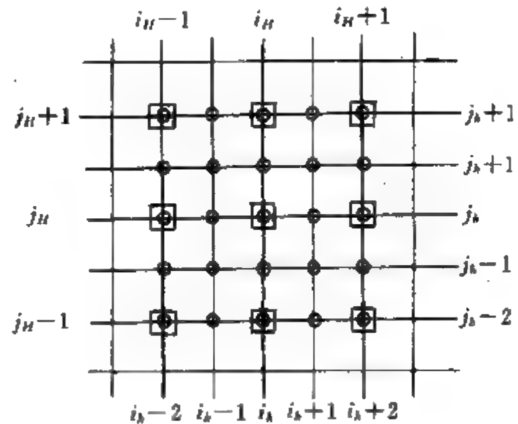


图 C.6.20

首先我们假定只有两种网格，图 C.6.20中"○"点为细网格，"□"点为粗网格。它们之间的网格大小分别为 h 和 H，且 $H=2h$，所求解的方程分别是

$$\left.\begin{aligned} L_h u_h &= f_h \\ L_H u_H &= f_H \end{aligned}\right\} \tag{C.6.4.23}$$

其中第一式是我们最终要求解的方程，而两个方程的值需要转移，叫做转移计算。它由转移算子 I_h^H 来完成，表示由细网格到粗网格的转移，反之也有相反方向的转移，记作 I_H^h。

这里转移算子是可以人为选定的。在图 C.6.20中"○"是细网格点，"□"是粗网格点。如果使两者重合的节点上 $u_h=u_H$，即取相同的 u 值，这种转移叫直接映射算子，即

$$I_h^H u_h(x,y) = u_h(x,y) \tag{C.6.4.24}$$

另外若设

$$\begin{aligned} u_{iH,jH} &= \frac{1}{16}[u_{i_h-1,j_h-1} + u_{i_h-1,j_h+1} + u_{i_h+1,j_h-1} + u_{i_h+1,j_h+1} \\ &\quad + 2(u_{i_h-1,j_h} + u_{i_h+1,j_h} + u_{i_h,j_h} + u_{i_h,j_h+1}) + 4u_{i_h,j_h}] \\ &= \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} u_h(x_{i_h}, y_{j_h}) \xlongequal{\text{记作}} I_h^H u_h(x,y) \end{aligned} \tag{C.6.4.25}$$

则
$$I_h^H \stackrel{\wedge}{=} \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} \tag{C.6.4.26}$$

其中$\stackrel{\wedge}{=}$表示等价。这个算子又叫完全加权转移算子。

以上是由细网格转移到粗网格，这时节点减少。而由粗网格向细网格转移时则需增加节点，因此要进行插值，一般要引进插值算子：

$$I_H^h \stackrel{\wedge}{=} \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} \tag{C.6.4.27}$$

即
$$\left.\begin{aligned}
u_{i_h,j_h} &= u_{i_H,j_H}\\
u_{i_h+1,j_h} &= \frac{1}{2}(u_{i_H+1,j_H} + u_{i_H,j_H})\\
u_{i_h,j_h+1} &= \frac{1}{2}(u_{i_H,j_H+1} + u_{i_H,j_H})\\
u_{i_h+1,j_H+1} &= \frac{1}{4}(u_{i_H+1,j_H} + u_{i_H,j_H+1} + u_{i_H+1,j_H+1} + u_{i_H,j_H})
\end{aligned}\right\} \tag{C.6.4.28}$$

现在来说明双重网格的计算过程。

(1) 设定初值 $u_h^{(n)}$，对 $L_h u_h = f_h$ 作 γ_1次迭代（如松弛迭代，故也称松弛 γ_1次）。一般 $\gamma_1 =$ 1～2，得到近似解

$$\bar{u}_h^{(n)} := \mathrm{Relax}^{\gamma_1}(u_h^{(n)}, L_h, f_h) \tag{C.6.4.29}$$

这里：=表示“定义为”，$\mathrm{Relax}^{\gamma_1}$（$u_h^{(n)}$，$L_h$，$f_h$）为以 $u_h^{(n)}$ 为初值，对 $L_h u_h = f_h$ 进行 γ_1次松弛迭代。

(2) 粗网格修正

1) 计算粗网格亏损量

$$d_h^{(n)} = f_h - L_h \bar{u}_h^{(n)} \tag{C.6.4.30}$$

2) 从细网格到粗网格转移亏损量

$$d_H^{(n)} = I_h^H d_h^{(n)} \tag{C.6.4.31}$$

3) 在粗网格上求

$$L_H v_H^{(n)} = d_H^{(n)} \text{ 的精确解 } v_H^{(n)} \tag{C.6.4.32}$$

4) 由粗网格向细网格转移修正量

$$v_h^{(n)} = I_H^h v_H^{(n)} \tag{C.6.4.33}$$

5) 计算细网格上修正后的量

$$\hat{u}_h^{(n)} = \bar{u}_h^{(n)} + v_h^{(n)} \tag{C.6.4.34}$$

以$\hat{u}_h^{(n)}$ 为初值重复1，2过程，多次重复以上过程直到$\hat{u}_h^{(n)}$ 收敛为止，其中一个过程可以用图 C.6.21表示。

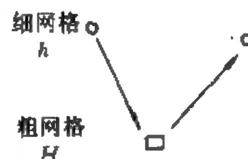


图 C.6.21

从以上过程看，第1步是细网格的松弛，这是一个使误差光滑的过程，其中对高频作用明显，对低频作用差；到了粗网格上，由于高频分量显示不出来，只剩下低频分量，它虽衰减慢，但计算量小，易于得到收敛的结果。所以双重网格法将粗网格低频分量容易收敛及细网格上误差光滑的两个优点结合起来，从而使收敛速度加快。

通过以上双重网格的过程，可以看出该方法的本质，但实际计算中人们很少使用双重网格而用多重网格法，其过程也是类似的。

线性方程多重网格的方法为：

网格步长记作 h_k（$k=0，1，2，\cdots，M$），一般取

$$h_k=2^{-k}h \tag{C. 6. 4. 35}$$

相应的算子为

$$L_{h_k}u_{h_k}=f_{h_k} \text{ 或简记为 } L_k u_k=f_k \tag{C. 6. 4. 36}$$

转移算子：由粗到细为插值算子 I_{k-1}^{k}（$k=1，2，\cdots M$）
　　　　　由细到粗为限制算子 I_{k}^{k-1}（$k=1，2，\cdots M$）　　(C. 6. 4. 37)

求解方程为

$$L_M u_M=f_M \tag{C. 6. 4. 38}$$

其过程步骤如下：

（1）给定初值 $u_M^{(n)}$，对（C. 6. 4. 38）式作 γ_1 次松弛

$$\bar{u}_M^{(n)}:=\text{Relax}^{\gamma_1}(u_M^{(n)},L_M,f_M) \tag{C. 6. 4. 39}$$

（2）粗网格修正

1）计算亏损量

$$d_M^{(n)}=f_M-L_M\bar{u}_M^{(n)} \tag{C. 6. 4. 40}$$

2）转移亏损量

$$d_{M-1}^{(n)}=I_M^{M-1}d_M^{(n)} \tag{C. 6. 4. 41}$$

3）近似求解

$$L_{M-1}v_{M-1}^{(n)}=d_{M-1}^{(n)} \tag{C. 6. 4. 42}$$

得近似解 $\hat{v}_{M-1}^{(n)}$

4）再计算新的亏损量

$$\hat{d}_{M-1}^{(n)}=d_{M-1}^{(n)}-L_{M-1}\hat{v}_{M-1}^{(n)} \tag{C. 6. 4. 43}$$

5）转移亏损量

$$d_{M-2}^{(n)}=I_{M-1}^{M-2}\hat{d}_{M-1}^{(n)} \tag{C. 6. 4. 44}$$

6）近似求解

$$L_{M-2}v_{M-2}^{(n)}=d_{M-2}^{(n)} \tag{C. 6. 4. 45}$$

得近似解 $\hat{v}_{M-2}^{(n)}$

其余类推，最后得到最粗网格上的方程为

$$L_0v_0^{(n)}=d_0^{(n)} \tag{C. 6. 4. 46}$$

得到精确的（高精度的）$v_0^{(n)}$

7）由 $v_0^{(n)}$ 通过插值算子得到

$$\bar{v}_1^{(n)}=I^1{}_0v_0^{(n)} \tag{C. 6. 4. 47}$$

最后得

$$v_1^{(n)}=\bar{v}_1^{(n)}+\hat{v}_1^{(n)} \tag{C. 6. 4. 48}$$

应当有

$$L_1v_1^{(n)}=d_1^{(n)} \tag{C. 6. 4. 49}$$

如果不满足，则由（C. 6. 4. 48）式所得值作为初值迭代几次可得准确值 $v_1^{(n)}$，然后用同样的方法可以得到 $v_2^{(n)}，v_3^{(n)}，\cdots，v_M^{(n)}$

8）最后得

$$v_M^{(n)}+u_M^{(n)}=u_M^{(n+1)} \tag{C. 6. 4. 50}$$

如果 $u_M^{(n+1)}$ 满足方程（C. 6. 4. 38）式，则求解结束，否则重复以上过程。

以上过程可以用图 C. 6. 22的（*a*）图表示。实际过程可以是多种多样的，如图 C. 6. 22，（*b*），（*c*），（*d*），（*e*）所示。

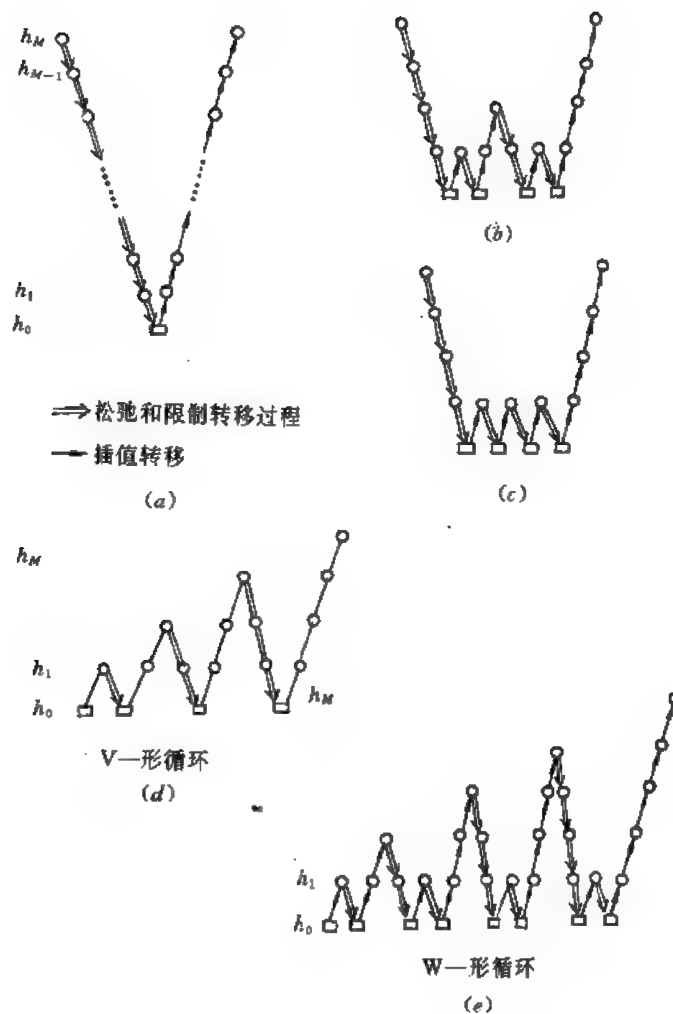


图 C. 6. 22

作为一个例子，求解

$$-\Delta u = 2$$

$$\left.\begin{aligned} u(0,y) = y(1-y), \quad u(x,0) = x(1-x) \\ u(1,y) = y(1-y), \quad u(x,1) = x(1-x) \end{aligned}\right\} \qquad (C. 6. 4. 51)$$

用超松弛（SOR），交换方向隐式格式（ADI）及 W 型的多重网格法（MG）可得以下结果

方法	运算次数	CPU（IBM/370—158）	$\lvert \varepsilon_n/u_h \rvert$
SOR	$\sim N^{1.5}$	~1200s	
ADI	$\sim N\lg N$	127s	0.5×10^{-3}
MG	$\sim N$	7.7s	0.2×10^{-4}

可见 MG 方法对于加速收敛有极大的效果。

在这里每次计算都是求解亏损，回算时用的是迭加原理，这只对线性方程才是适用的，对

于非线性方程显然是不合适的。非线性方程的 MG 法的过程如下述。

设 h_M 网格上的方程为

$$\mathscr{L}_M u_M = f_M$$

给出初值 u_{M_0}，代入后经过 p 次迭代得到的解为 u_{M_p}，这里是近似的，故

$$\mathscr{L}_M u_{M_p} = f_{M_p}$$

将 u_{M_p} 转移到 $M-1$ 网格上，即

$$u_{M-1}^0 = I_M^{M-1} u_{M_p}$$

同时设
$$f_{M-1} = \mathscr{L}_{M-1} u_{M-1}^0 + I_M^{M-1}(f_M - f_{M_p})$$

求解
$$\mathscr{L}_{M-1} u_{M-1} = f_{M-1}$$

以 u_{M-1}^0 为初值，再迭代 q 次，再向更粗的网格过渡，依此类推到最粗的网格时设法得到精确解，记作 u_0，而 u_0 的初值 u_0^0 与 u_0 值之差为 $u_0-u_0^0$，在 h_1 网格基础上插值得到

$$u_1 = u_{1原来的} + I_0^1(u_0 - u_0^0)$$

以这一 u_1 作初值再解 $\mathscr{L}_1 u_1 = f_1$，而得到准确的 u_1 值，再回代求 u_2，…直到解得 u_M。这里要注意的是 f_k 都要记住。这一方法可用于非线性方程迭代循环过程，它也有图 C. 6. 22所示的各种可能性。

有一点要说明的是，在计算中迭代次数 p，q 等的选用是考虑到收敛速度下降时即停止迭代而转入加大网格。所谓迭代变慢可用以下指标来判别，选 δ 为

$$\delta = \frac{\text{本次迭代求解中最大剩余量的模}}{\text{上次迭代求解中最大剩余量的模}}$$

（剩余量为 $\mathscr{L}_h u_h - f_h$）

当
$$\delta \geqslant \frac{\sigma^3 + 3\bar{\gamma}}{\sigma^3 + 3}$$

则认为收敛变慢，其中 $\sigma \sim 1$，$\bar{\gamma} = \max|\gamma|$，$\gamma$ 为各点分析得到的误差放大因子的大小，一个简单的方法是当 $\delta \geqslant 1$ 时就认为收敛速度变慢。

在实际计算中人们可以设置自动开关，当收敛速度下降时自动变粗网格，当收敛达到要求后自动转向加密网格。

6.5 并行计算与向量运算

现代计算机技术发展非常迅速，但计算速度的提高毕竟是有限度的。如果仔细分析计算机的运行就会发现仍有潜力可挖。比如高集成的运算器完成一个运算约为 10ns，运算时首先要从储存器取数，运算结果再送回储存器，如果它们之间的联线为 3m，则信息传送要 50ns，往返一次为 100ns；这种数据存与取的时间即为运算器的等待时间，这是完全多余的。如果将下一个运算所需要的数据在此期间送入，计算机即可进行计算而不需要等待时间了。比如说进行如下的运算：

```
      DO    10    I=1,100
            A(I)=B(I)+C(I)
  10    CONTINUE
```

最浪费时间的方法是从储存器 I 和 I 中读出 B(1),C(1)，计算完后送入储存器 Ⅱ 中。另一个有效的方法是连续地自动向计算器送入数据 B(1),B(2)，…,B(100);C(1),C(2),…,

C(100)，运算结果则自动地送入 A(1)，A(2)，…，A(100)，如图 C. 6. 23所示。

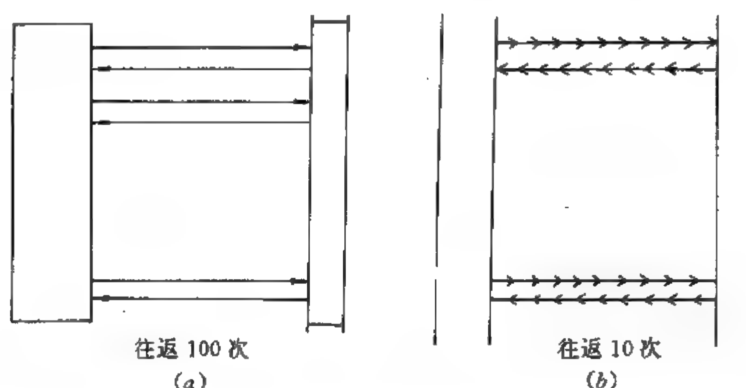


图 C. 6. 23

这样同一种运算，同一台计算机，采用不同的算法，运算速度会有很大的差别。如果有几个运算器（CPU），则也可以由几个运算器同时运算，使得运算时间大大缩短。这种运算叫做向量化运算。

向量计算的概念始于1970年，目前所有巨型计算机都采用向量化和并行化计算，它们的结构有所不同，但原理是相近的。

向量、并行计算机的分类如图 C. 6. 24所示。向量机和阵列机的区别在于数据到单元的通讯方式不同。作为用户如果使设计的程序能够适应并行运算，计算速度将大大提高；相反如果不适应或者部分适应并行运算，就会降低计算速度，使计算机的效率不能充分发挥。下面简要介绍向量运算的原理及程序向量化的基本原则。

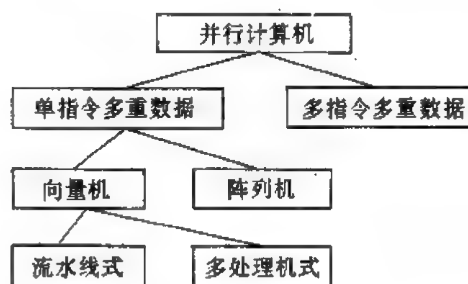


图 C. 6. 24

向量运算的原理可用流水线来说明。如有一工件需6个加工程序，现有6个人工作。一种工作方法是，每个人将一个工件的6个程序从头到尾进行一次，然后再加工下一个工件。一般情况下此法效率较低。另一种方法是6个人排成一流水线，每人只进行一个工序，这样加工速度将大大提高。向量机的运行即是如此。每一计算步的结果则离开运算器，第2个数据立即进入运算器，数据的传送过程并不影响计算的进行，从而使运算能力得到充分利用。

下面举例说什么样的程序可以进行向量运算。

例 1　数组相加最好向量化，例中左端的 V 表示向量化了。

```
V- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - <        DO 20 I=1, 200
V                                                   A(I)=B(I)+C(I)*S
V                                                   D(I)=E(I)*C(I)
V- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - > 20   CONTINUE
```

例 2　在本例中有两种循环，应当指出多重循环时只有最里面的循环有可能向量化，而其它层的循环都是不能向量化的。在内循环中，如果运算中要使用一个数组内当前正在处理元素前面的元素，这种运算也是不能向量化的。在本例中将两个循环的次序作了交换，从而得以实现向量化。例中 S_b 表示只能顺序计算，V_s 表示可以向量化运算。

```
S-----------------------<        DO 20 I =1, 20
S Sb--------------------<          DO  20 J=2, 30
S Sb                                 T(I,J)=T(I,J-1)+S
S-Sb--------------------> 20     CONTINUE
S-----------------------<        DO  30  J=2, 30
S Vs--------------------<          DO  30  I =1, 20
S Vs                                 T(I,J)=T(I,J-1)+S
S-Vs--------------------> 30     CONTINUE
```

例 3 在上例中已经提到使用数组内前面的元素不能向量化，为此本例中循环内的两个运算分别在两个循环内进行，这样就可以实现部分向量化，从而节省部分时间。

```
S-----------------------<        DO  10  I =1, 200
S                                  A(I)=SQRT(A(I))
S                                  B(I)=B(I-1)
S-----------------------> 10     CONTINUE
V-----------------------<        DO  20  I =1, 200
V                                  A(I)=SQRT(A(I))
V-----------------------> 20     CONTINUE
Sbr---------------------<        DO 30 I =1, 200
Sbr                                B(I)=B(I-1)
Sbr---------------------> 30     CONTINUE
```

例 4 前面说明使用数组内前面的元素不能向量化，但是如果使用以后的元素，则可向量化，又如使用前面未用过的元素也是可以向量化的。本例说明了这一点。

```
V-----------------------<        DO 130 I =1, 200-1
V                                  A(I)=A(I+1)
V-----------------------> 130    CONTINUE
V-----------------------<        DO 140 I =2, 200, 2
V                                  A(I)=A(I-1)+A(I+1)
V-----------------------> 140    CONTINUE
```

下面的循环必须交换次序才能向量化

```
Sbr---------------------<        DO 180 I =1, 200-1
Sbr                                A(I)=C(I)
Sbr                                B(I)=A(I+1)
Sbr---------------------> 180    CONTINUE
V-----------------------<        DO 190 I =1, 200-1
V                                  B(I)=A(I+1)
V                                  A(I)=C(I)
V-----------------------> 190    CONTINUE
```

下例也只能有条件的向量化

```
S-----------------------<        DO 216 I =1, 200, ABS (K)
S Vs--------------------<          DO 215 J=1, ABS(K)-1
S Vs                                 A(I+J)=A(I+J+K)
S Vs--------------------> 215      CONTINUE
S  ---------------------> 216    CONTINUE
```

例 5　下面的循环不能向量化

```
                  J=15
Sbr------<        DO 150  I =2,20-1
Sbr                 T( I ,J)=0.25*(T( I -1,J)+T( I +1,J)+T( I ,J-1)+T( I ,J+1))
Sbr------> 150    CONTINUE
```

分成两个循环后就可以实现向量化

```
Vs------<         DO 160  I =2,20-1,2
Vs                  T( I ,J)=0.25*(T( I -1,J)+T( I +1,J)+T( I ,J-1)+T( I ,J+1)
Vs------> 160     CONTINUE
Vs------<         DO 170  I =3,20-1,2
Vs                  T( I ,J)=0.25*(T( I -1,J)+T( I +1,J)+T( I ,J-1)+T( I ,J+1))
Vs------> 170     CONTINUE
```

但要注意，这里的计算结果可能发生了变化，故在设计向量化程序时必须注意这一点。

例 6　本例中采用的是间接标号，一般是无法向量化的，即使等式两边的标号都是间接标号也是不能向量化的。有的计算机附加上该机的一些特有程序后虽可向量化，但其它机器却不能利用。

```
S----------------------<        DO 220  I =1,200
S                                 J=INDX1( I )
S                                 B( I )=A(J)+C( I )
S----------------------> 220    CONTINUE
S----------------------<        DO 230  I =1,200
S                                 J=IND×1( I )
S                                 K=IND×2( I )
S                                 B(J)=A(K)
S----------------------> 230    CONTINUE
```

例 7　本例的求和过程显然可以向量化。

```
                                  S =0.0
                                  SS=0.0
V----------------------<          DO 300  I =1,200
V                                   S =S+A( I )
V                                   SS=SS+A( I )*B( I )
V----------------------> 300      CONTINUE
```

例 8　循环中有条件语句，要看条件语句是否有返回情况，如果没有返回，可以向量化。

```
V-----------------<        DO 310  I =1,200
V                            IF(A( I ).GE.0.0) B( I )=A( I )*C( I )
V-----------------> 310    CONTINUE
```

下面的例子就不能向量化。

```
                             IMX=1
Sb-----------------<         DO 320  I =1,200
Sb                             IF(A( I ).GE.A(IMX)) IMX= I
Sb-----------------> 320     CONTINUE
```

例 9　循环中有子过程，一般也是不能向量化的。

```
S-----------------<          DO 400  I =1,200
```

```
S                                   CALL ADD(A(I),B(I),C(I))
S---------------->400      CONTINUE
S----------------<         DO 410 I =1,200
S                                   CALL ABB(A,B,C,200)
S--              -->410    CONTINUE
```

还可以举出很多例子说明向量化的各种情况，实现向量化的基本原则是：

(1) 程序或子程序设计时尽量采用数组而不用独立的单元。

(2) 数组存入时要相继地存或取，切忌乱存乱取。

(3) DO 循环的标号（最内层的循环）应当尽可能是第1个下标。

(4) 如果在运算等式的左边出现数值时，在循环中应当尽可能用数组来代替。

(5) DO 循环中尽量减少或不出现 IF 语句。

(6) 用优化或向量化的子程序来消除 IF 语句或代替不能优化的语句。

(7) 写出的 Fortran 语句尽量短。

(8) 在 DO 循环中尽量不用子程序。

下面举一例，说明如何应用以上原则尽可能实现向量化。对于 Chebyshev-Gauss 变换，根据算法直接编写程序将有很多循环不能向量化，如循环20，25，30均不能向量化，究其原因在于要用返回或未知方位的单元。下面为该变换算法的程序

```
                        SUBROUTINE FFTCS(CRE,CIM,RSINK,N,N21,TO,IER)
                        DIMENSION CRE(N),CIM(N),RSINK(N21)
                        PAI=ACOS(-1.0)
                        NH=N/2
                        IF(TO.LT.0.0) THEN
              C
              C---DETERMINE Vj WITH Uj; e.g. Uj=> Vj
              C
Vc------<                 DO 10 J=1,NH
Vc                          CIM(J)=CRE(2*J-1)
Vc                          CIM(J+NH)=CRE(N-2*J+2)
Vc------>10               CONTINUE
V ------<                 DO 15 J=1,N
V                           CRE(J)=CIM(J)
V                           CIM(J)=0.0
V ------>15               CONTINUE
              C
              C---CALCULATE V̂k WITH FFT-METHOD
              C
                        CALL FFT1C(CRE,CIM,RSINK,N,N21,-1.0,IER)
              C
              C---CALCULATE Ûk WITH V̂k
              C
                          NH=N/2
                          NH1=NH+1
```

```
                          CRE(NH1)=CRE(NH1) * 2.0 * COS(PAI/4.0)
                          CIM(NH1)=CIM(NH1) * 2.0 * COS(PAI/4.0)
SSSSSb------<             DO 20 K=2,NH
SSSSSb                      X1=CIM(     K) * RSINK(K)+CRE(     K) * RSINK(N-
                               K+2)
SSSSSb                      X2=CIM(N-K+2) * RSINK(K)-CRE(N-K+2) * RSINK(N
                               -K+2)
SSSSSb                      X3=CRE(N-K+2) * RSINK(K)+CIM(N-K+2) * RSINK(N
                               -K+2)
SSSSSb                      X4=CRE(     K) * RSINK(K)-CIM(     K) * RSINK(N-
                               K+2)
SSSSSb                      X5=CIM(N-K+2) * RSINK(N-K+2)+CRE(N-K+2) *
                               RSINK(K)
SSSSSb                      X6=CIM(     K) * RSINK(N-K+2)-CRE(     K) *
                               RSINK(K)
SSSSSb                      X7=CRE(     K) * RSINK(N-K+2)+CIM(     K) *
                               RSINK(K)
SSSSSb                      X8=CRE(N-K+2) * RSINK(N-K+2)-CIM(N-K+2) *
                               RSINK(K)
SSSSSb                      CRE(K)=X1-X2
SSSSSb                      CIM(K)=X3-X4
SSSSSb                      CRE(N-K+2)=X5-X6
SSSSSb                      CIM(N-K+2)=X7-X8
SSSSSb------> 20          CONTINUE
                          ELSE
                C
                C---CALCULATE V̂k WITH Ûk
                C
                          NH=N/2
                          NH1=NH+1
                          CRE(NH1)=CRE(NH1) * COS(PAI/4.0)
                          CIM(NH1)=CIM(NH1) * COS(PAI/4.0)
SSb------<                DO 25 K=2,NH
SSb                         X1=0.5 * (CRE(K) * RSINK(N-K+2)+CRE(N-K+2) *
                               RSINK(K))
SSb                         X2=0.5 * (CRE(K) * RSINK(K)-CRE(N-K+2) * RSINK(N
                               -K+2))
SSb                         X3=0.5 * (CRE(N-K+2) * RSINK(K)+CRE(K) * RSINK(N
                               -K+2))
SSb                         X4=0.5 * (CRE(N-K+2) * RSINK(N-K+2)-CRE(K) *
                               RSINK(K))
SSb                         CRE(K)=X1
SSb                         CIM(K)=X2
SSb                         CRE(N-K+2)=X3
```

```
SSb                          CIM(N-K+2)=X4
SSb - - - - - - > 25        CONTINUE
                   C
                   C - - - CALCULATE Vj WITH FFT-METHOD
                   C
                             CALL FFT1C(CRE,CIM,RSINK,N,N21,1.0,IER)
                   C
                   C - - - DETERMINE Uj FROM Vj, e.g. Vj => Uj
                   C
Sbr - - - - - - <           DO 30 J=1,NH
Sbr                            CIM(2*J-1)=CRE(J)
Sbr                            CIM(N-2*J+2)=CRE(J+NH)
Sbr - - - - - - > 30        CONTINUE
V - - - - - - - <           DO 35 J=1,N
V                              CRE(J)=CIM(J)
V                              CIM(J)=0.0
V - - - - - - - > 35        CONTINUE

                          ENDIF
                   C
                          RETURN
                          END
```

为了使程序向量化，简单的方法是增设一些数组，将它们作为中间储存单元，而将循环内的运算分成几部分。从表面看，下述程序和前面的程序得到的结果是同样的，但速度提高了近10倍，而且被转换的数组的维数越大，节省时间越多。当然这样做也是有代价的，运算所需的存储单元和程序规模都要增加。

```
                          SUBROUTINE VFFTCS(CRE,CIM,RSINK,N,N21,TO,IER
                      1                               ,ACRE,ACIM,HWORK,N215)
                          DIMENSION CRE(N),CIM(N),RSINK(N21)
                          DIMENSION ACRE(N),ACIM(N),HWORK(N215)
                          COMMON /CMATCO/ PI
                          COMMON /CCOSCO/COS45,COS452
                      C
                      C    REOROER THE CRE,CIM IN ACRE,ACIM
                      C
                          NH=N/2
                          NH1=NH+1
                          IF(TO.LT.0.0) THEN
                      C
                      C - - - DETERMINE Vj WITH Uj, e.g. Uj => Vj
                      C
Vc - - - - - - - - - <    DO 10 J=1,NH
Vc                           CIM(J)=CRE(2*J-1)
```

```
Vc                              CIM(J+NH)=CRE(N-2*J+2)
Vc---------- > 10           CONTINUE
V----------- <              DO 15 J=1,N
V                              CRE(J)=CIM(J)
V                              CIM(J)=0.0
V                              ACRE(J)=CRE(J)
V                              ACIM(J)=CIM(J)
V---------- > 15             CONTINUE
                       C
                       C---CALCULATE V̂k WITH FFT-METHOD
                       C
                                 CALL F2TRF(N,ACRE,ACIM,HWORK)
                       C
                       C---CALCULATE Ûk WITH V̂k
                       C
                               CRE(1)=ACIM(1)/FLOAT(N)
                               CIM(1)=0.0
                               CRE(NH1)=ACIM(N)/FLOAT(N)
                               CIM(NH1)=0.0
Vc   -------- <                DO 18 K=2,NH
Vc                                 CRE(K)=ACIM(2*K-2)/FLOAT(N)
Vc                                 CIM(K)=ACIM(2*K-1)/FLOAT(N)
Vc                     C           CRE(N-K+2)=CRE(K)
Vc                     C           CIM(N-K+2)=-CIM(K)
Vc                                 ACRE(K)      =CRE(K)
Vc                                 ACRE(K+NH)=-CIM(K)
Vc---------- > 18              CONTINUE
V----------- <                 DO 28 K=N-NH+2,N
V                                NK=N-K+2
V                                CRE(K)=ACRE(NK)
V                                CIM(K)=ACRE(NK+NH)
V----------- >28               CONTINUE
                               NH=N/2
                               NH1=NH+1
                               CRE(NH1)=CRE(NH1)*COS452
                               CIM(NH1)=CIM(NH1)*COS452
Vc---------- <                 DO 19 K=2,NH
Vc                               NK=N-K+2

Vc                          ACRE(K)=CRE(NK)
Vc                          ACRE(K+NH)=CIM(NK)
Vc                          ACIM(K)=RSINK(NK)
Vc--------- > 19         CONTINUE
Vc--------- <            DO 20 K=2,NH
```

```
Vc                  C        X1=CIM(      K) * RSINK(K)+CRE(      K) * RSINK(N-K
                                +2)
Vc                  C        X2=CIM(N-K+2) * RSINK(K)-CRE(N-K+2) * RSINK(N-
                                K+2)
Vc                  C        X3=CRE(N-K+2) * RSINK(K)+CIM(N-K+2) * RSINK(N-
                                K+2)
Vc                  C        X4=CRE(      K) * RSINK(K)-CIM(      K) * RSINK(N-K
                                +2)
Vc                  C        X5=CIM(N-K+2) * RSINK(N-K+2)+CRE(N-K+2) *
                                RSINK(K)

Vc                  C        X6=CIM(      K) * RSINK(N-K+2)-CRE(      K) *
                                RSINK(K)
Vc                  C        X7=CRE(      K) * RSINK(N-K+2)+CIM(      K) *
                                RSINK(K)
Vc                  C        X8=CRE(N-K+2) * RSINK(N-K+2)-CIM(N-K+2) *
                                RSINK(K)
Vc                           X1=CIM(      K) * RSINK(K)+CRE(      K) * ACIM(K)
Vc                           X2=ACRE(K+NH) * RSINK(K)-ACRE(K)       * ACIM(K)
Vc                           X3=ACRE(K)       * RSINK(K)+ACRE(K+NH) * ACIM(K)
Vc                           X4=CRE(      K) * RSINK(K)-CIM(      K) * ACIM(K)
Vc                           X5=ACRE(K+NH) * ACIM(K)       +ACRE(K)       *
                                RSINK(K)
Vc                           X6-CIM(      K) * ACIM(K)       -CRE(      K) * RSINK
                                (K)
Vc                           X7=CRE(      K) * ACIM(K)       +CIM(      K) * RSINK
                                (K)
Vc                           X8=ACRE(K)       * ACIM(K)       -ACRE(K+NH) *
                                RSINK(K)
Vc                           CRE(K)=X1-X2
Vc                           CIM(K)=X3-X4
Vc                  C        CRE(N-K+2)=X5-X6
Vc                  C        CIM(N-K+2)=X7-X8
Vc                           ACRE(K      )=X5-X6
Vc                           ACRE(K+NH)=X7-X8
Vc---------> 20    CONTINUE
V----------<       DO 23 K=N-NH+2,N
V                            NK=N-K+2
V                            CRE(K)=ACRE(NK)
V                            CIM(K)=ACRE(NK+NH)
V---------> 23       CONTINUE
                             ELSE
                    C
                    C--CALCULATE V̂k WITH Ûk
```

```
                  C
                         NH=N/2
                         NH1=NH+1
                         CRE(NH1)=CRE(NH1)*COS45
                         CIM(NH1)=CIM(NH1)*COS45
Vc---------->          DO 29 K=2,NH
Vc                        NK=N-K+2
Vc                        ACRE(K)=CRE(NK)
Vc                        ACRE(K+NH)=CIM(NK)
Vc                        ACIM(K)=RSINK(NK)
Vc----------> 29       CONTINUE
Vc----------<          DO 25 K=2,NH
Vc                  C     X1=0.5*(CRE(K)*RSINK(N-K+2)+CRE(N-K+2)*
                    C          RSINK(K))
Vc                  C     X2=0.5*(CRE(K)*RSINK(K)-CRE(N-K+2)*RSINK(N
                    C          -K+2))
Vc                  C     X3=0.5*(CRE(N-K+2)*RSINK(K)+CRE(K)*RSINK(N
                    C          -K+2))
Vc                  C     X4=0.5*(CRE(N-K+2)*RSINK(N-K+2)-CRE(K)*
                    C          RSINK(K))
Vc                        X1=0.5*(CRE(K)*ACIM(K     )+ACRE(K     )*
                               RSINK(K))
Vc                        X2=0.5*(CRE(K)*RSINK(K)-ACRE(K     )*
                               ACIM(K     ))
Vc                        X3=0.5*(ACRE(K     )*RSINK(K)+CRE(K)*
                               ACIM(K     ))
Vc                        X4=0.5*(ACRE(K     )*ACIM(K     )-CRE(K)*
                               RSINK(K))
Vc                        CRE(K)=X1
Vc                        CIM(K)=X2
Vc                C       CRE(N-K+2)=X3
Vc                C       CIM(N-K+2)=X4
Vc                        ACRE(K     )=X3
Vc                        ACRE(K+NH)=X4
Vc----------> 25        CONTINUE

V----------<            DO 31 K=N-NH+2,N
V                          NK=N-K+2
V                          CRE(K)=ACRE(NK)
V                          CIM(K)=ACRE(NK+NH)
V----------> 31         CONTINUE
                        ACIM(1)=CRE(1)
                        ACIM(N)=CRE(NH1)
V----------<            DO 33 K=2,NH
```

```
V                          ACIM(2*K-2)-CRE(K)
V                         ACIM(2*K-1)=CIM(K)
V ----------> 33   CONTINUE
                C
                C-- CALCULATE Vj, WITH FFT-METHOD
                C
                          CALL F2TRB (N,ACIM,ACRE,HWORK)
                C
                C-- DETERMINE Uj FROM Vj e.g. Vj => Uj
                C
Vr----------<         DO 36 J=1,N
Vr                      CRE(J)=ACRE(J)
Vr----------> 36   CONTINUE
Sbr ---------<        DO 30 J=1,NH
Sbr                     CIM(2*J-1)=CRE(J)
Sbr                     CIM(N-2*J+2)=CRE(J+NH)
Sbr ---------> 30   CONTINUE
V ----------<         DO 35 J=1,N
V                          CRE(J)=CIM(J)
V                          CIM(J)=0.0
V----------> 35   CONTINUE
                   ENDIF
                   RETURN
                   END
```

目前向量化的运算已经得到广泛的应用，流体力学中的大量运算几乎都可被向量化。因此向量化的运算将大大提高流体流动数值模拟的效率。

并行计算是将计算域分区，将每一个区在计算机的一个部位运行，几个区则由计算机的几个部位同时运行，这样可以进一步提高计算机的使用效率，从而加快计算速度，计算的并行化和向量化同时使用，可以使计算速度提高几个数量级，因此目前国外在这方面进行了大量工作，一方面要在计算机硬件上下功夫，另一方面也要在计算方法（计算的分区，区域间的搭接，适合分区计算的方法等）、计算机软件（数据交换，计算的协调等）等方面作工作。分区计算也可以用于微机联网运行上，这一点对于我国目前缺乏巨型计算机的情况来说更为重要，是一个值得研究的方向。

6.6 无结构网格及其应用

在求解具有复杂几何形状的流场时，网格的选取和生成是一个十分困难的问题。尽管有贴体坐标的方法，但由于网格的安排是有序和按一定结构的，所以不可避免地会出现该密的地方不能做到很密，不该密的地方又变得很密，在采用自适应网格时更有这样的问题。另外在有结构网格中，有时要生成有一定次序的网格是非常困难的，以至于网格形状不能得到保证，因而很不适合于有限差分法的要求，特别是随着计算流体动力学在工业上的广泛应用，这个矛盾就日益突出。近年来，人们在有限元法的启发下，开拓了将有限差分法直接应用于无结构有限元网格中去，这既大大地扩展了有限差分法的应用，又避免了有限元法生成大规模的代数方程组及其因非线性而造成的求解的困难性。因此这是一个十分有前途的新的发展方向，当然这一方向仍有一些棘手的问题急待解决：无结构网格的生成，特别是三维情况，是十分耗机

时的繁琐工作，寻找通用的高速有效的生成方法是急需解决的。其次是本方法如何与高精度的有限差分法相结合，也是一个非常重要的问题，在前面的章节中曾经讨论过高精度差分格式的必要性，但是目前为止，主要应用于十分规则的矩形网格，在非正交网格坐标下，这些方法未必能得到高精度的解，对于非结构网格而言，具有三阶以上的高精度格式尚难应用，如果人们在这一领域内能有所突破，无结构网格方法将如虎添翼。上述两个问题不是不可克服的，相信在不久的将来会有令人满意的解决方法出现。

本节中将扼要地介绍目前人们采用的无结构网格的生成方法及其应用于无结构网格的差分方法。

首先介绍无结构网格的生成。

原则上讲，无结构网格可以具有任意结构，然而这样的结构实现起来是很困难的，所以这里采用的是：二维时用三角形网格，三维时为四面体网格，也就是说网格的类型是统一的。此外，生成的网格当然要求没有折叠，每个三角形的形状应当尽量接近正三角形，应当避免钝角接近 180° 或锐角接近零度的三角形出现、由于流场的区域往往是复连通域，还必须避免网格落在域外，下面介绍一种网格生成的方法，为简便起见，只描述它们在二维问题中的应用，事实上这一方法也可以推广到三维问题中去。

1850 年 Dirichlet 提出了这样一个思想：设平面上离散地分布着 N 个点 P_1，P_2，P_3，… P_N，选其中一个点 P_i，则平面上离 P_i 最近的所有的点构成一点集，形成一区域 V_i，可见在 V_i 内所有的点 P 满足以下条件：

$$\{V_i\} = \{P : |P - P_i| < |P - P_j|, \forall\, i \neq j\}$$

这里$\forall\, i\neq j$ 表示对于所有 $i\neq j$ 的情况，即 $j=1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots N$。这里 V_i 称中 Voronoi 区，相邻的 Voronoi 区为中心点 P_i 相连就形成三角形，它们称作 Delaunay 三角形。Dirichlet 指出，这些 Delaunay 三角形互相是不会重叠的和部分覆盖的。图 C. 6. 25 说明了这一点，其中 $N=4$，$\phi_1Q_2Q_1\phi_2$；$\phi_2Q_1\phi_4$，$\phi_4Q_1Q_2\phi_3$，$\phi_3Q_2\phi_1$为四个 Voronoi 区，而 $P_1P_2P_3$及 $P_1P_3P_4$即为两个 Delaunay 三角形，不难发现 Q_1，Q_2就是这两个三角形外接圆的圆心。

在形成上述三角形中需要注意两点，其一是除给定的边界点以外，所有的点是逐步加入的，因此需要给出加点的条件；其二是由于三角形单元是不断地形成和消除的，因此为了使这一过程有比较高的效率，程序设计必须充分优化。

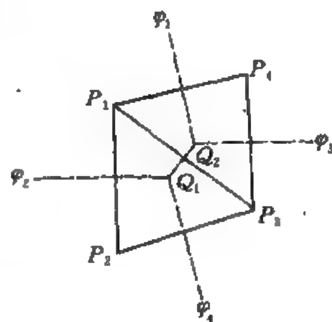


图 C. 6. 25

加点的原则是这样的：对于每一个点，P_0与其相连接的点为 P_j ($j=1, 2\cdots, M$)，可以设一个数 $\mathrm{d}P_0$为

$$\mathrm{d}P_0 = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} |\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_0|$$

三角形的中心点的 $\mathrm{d}P_0$值定为所在三角形3个顶点的 dP_0值的平均、当该中心点到三顶点的距离 d_m ($m=1, 2, 3$) 满足 $d_m>\alpha \mathrm{d}P_0$，且该点到新加点的最短距离 s，满足 $s>\beta d_m$ 时，则该点即为应加入的点。这时所在的三角形将破坏，这个三角形的相邻三角形，若它的外接圆包含这一中心点，则这两个三角形的公共边将被打破，从而重新形成新的三角形，如图 C. 6. 26所示。其中 α 和 β 可取0. 7，利用上述方法，可对每个三角形反复加点，直至不能再加点为止。应该指出，这样形成的三角形不一定是很匀称的，为此，可以用最小能量原理将它们光滑化。这里能量 $E=\sum_{k=1}^{K}c_kl_k^2$，其中 l_k

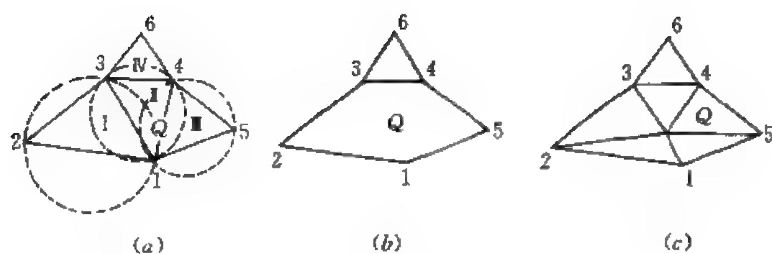


图 C.6.26

为线段 k 的长度，c_k 为它的弹性系数，K 为总的线段数，若令 $\partial E/\partial x_i=0$，$\partial E/\partial y_i=0$，则得到$2N$ 个线性代数方程，由此可以重新确定各点的位置，从而达到匀称化的目的。

此外，为提高程序的效率，还有许多方法，包括适当设置辅助性数组等，在这里不作详细讨论。

利用上述方法得到的无结构网格能够符合要求，且有较高的效率。图 C.6.27，C.6.28为利用上述方法得到的二维的无结构网格，其中C.6.27所示的是只有一个物体的复连通域，而图 C.6.28则所显示的是有几个物体的复联通区域。

上述方法可以推广到三维的情况中，其网格的显示比较复杂，这里不再作具体介绍。

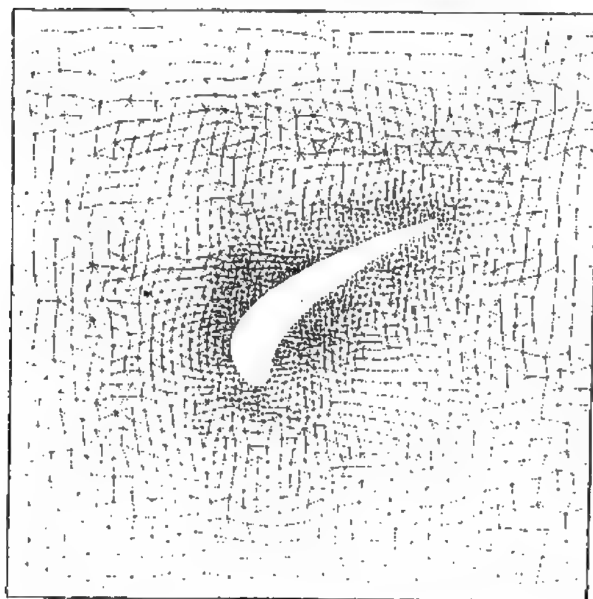


图 C.6.27

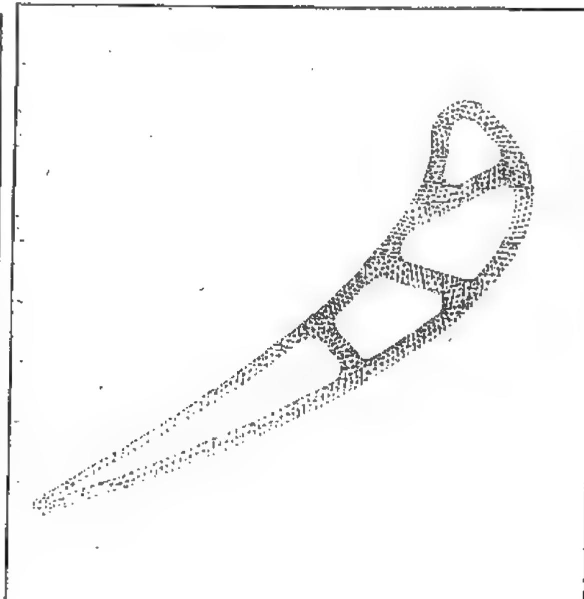


图 C.6.28

下面将无结构网格应用于可压缩粘性流体流动的数值计算。设原方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}=0 \qquad \text{(C.6.6.1)}$$

这里也只限于讨论二维问题，这里

$$Q=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho E\end{pmatrix},F_x=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho uu+p \qquad +\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-2\mu\varepsilon_{xx}\\ \rho uv \qquad -2\mu\varepsilon_{xy}\\ (\rho E+p)u \quad -2\mu(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_x)+\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-k\frac{\partial T}{\partial x}\end{pmatrix}$$

$$F_v = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho uv & -2\mu\varepsilon_{yx} \\ \rho uv + p & +\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot V) - 2\mu\varepsilon_{yy} \\ (\rho E + p)v & -2\mu(V\cdot\varepsilon_y) + \frac{2}{3}\mu(\nabla V) - k\frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{C.6.6.2}$$

流动还假定是层流的。为了将上式在二维问题中离散化，选用如图 C.6.29形式的单元体，其中 o 是中心点，1，2，…，6是与它直接相联的相邻点，AB 是0—2线的中垂线，其余类推，为确定 q 值在 o 点的梯度，可以用格林公式

$$\nabla q = \frac{1}{\Omega}\sum_{侧面数} q_i \boldsymbol{n}_i \delta s_i \tag{C.6.6.3}$$

其中$\boldsymbol{n}_i$ 是0到 i $(i=1，2，\cdots 6)$ 的单位向量，δs_i 是与它垂直的侧面的长度（或面积），其中 Ω 为 $AB\cdots FA$ 所围的面积（或体积）。在这个所围的面积上对(C.6.6.2)式进行积分，则可以得到如下的公式：

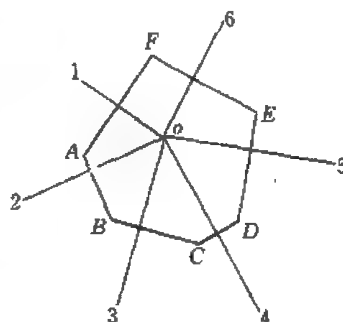


图 C.6.29

$$\frac{\Delta(Q\Omega)}{\Delta t} + \sum_{侧面数}(F+G)_i\delta s_i = 0 \tag{C.6.6.4}$$

其中

$$F = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho uU + pn_x \\ \rho vU + pn_y \\ (E+p)U \end{bmatrix}, \quad G = -\frac{1}{Re}\begin{bmatrix} O \\ \tau_{xl}n_l \\ \tau_{yl}n_l \\ n_l(\tau_{xl}u + \tau_{yl}v + h_l) \end{bmatrix} \tag{C.6.6.5}$$

其中 $U = un_x + vn_y = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}$，其中有相同下标 l 的量则是关于 x 和 y 求和，即如 $n_l\tau_{xl} = n_x\tau_{xx} + n_y\tau_{xy}$，此外

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\mu(2u_x - v_y),\quad \tau_{xy} = \mu(u_y + v_x)$$

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu(2v_y - u_x),\quad n_x = k\frac{\partial T}{\partial x},\quad h_y = k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{C.6.6.6}$$

k 为导热系数，以及

$$p = (\gamma - 1)\left[E - \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2)\right] \tag{C.6.6.7}$$

(C.6.6.4)式中 F 包含了无粘性部分的通量，G 则包含了有粘性和有热传导部分的通量。正如大家所知，无粘性的，即对流项部分的差分计算需要小心地加以处理。这里 F 项可以由下式计算：

$$F = \frac{1}{2}[(F_r + F_l) - |A|(Q_r - Q_l)] \tag{C.6.6.8}$$

其中

$$A = \frac{\partial F}{\partial Q} = SAS^{-1}$$
$$|A| = S|\Lambda|S^{-1},\ |\Lambda| = \mathrm{diag}\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|,|\lambda_4|\}$$
$$\lambda_1 = U - c,\ \lambda_2 = U,\ \lambda_3 = U,\ \lambda_4 = U + c \tag{C.6.6.9}$$

F_l 是 F 在侧面的左侧的值，F_r 是 F 在侧面的右侧的值，Q_l，Q_r 也类似。此外侧面值的计算公式为

$$q_f = q_0 + \Phi\nabla q\cdot\boldsymbol{r}_i \tag{C.6.6.10}$$

这里 f 表示侧面，q_0为 o 点的值，$\boldsymbol{r}_i$ 为$\frac{1}{2}\overrightarrow{oi}$，

$$\Phi = \frac{\min \bmod((\nabla q)^2, \beta \nabla q \cdot \nabla q_n) + \Psi}{\nabla^2 q + \Psi} \tag{C.6.6.11}$$

$\beta=1.0\sim2.0$，Ψ 取值适当大一些，用以滤去噪声干扰，而 q_n 表示在相邻网格内的 q 值（n 为 neighbour 的简写）。此外这里还采用加权平均

$$\left.\begin{aligned} \rho_f &= \sqrt{\rho_l}\sqrt{\rho_r} \\ (u,v)_f &= \frac{(u,v)_r\sqrt{\rho_r} + (u,v)_l\sqrt{\rho_l}}{\sqrt{\rho_r}+\sqrt{\rho_l}} \\ H_f &= \frac{H_r\sqrt{\rho_r} + H_l\sqrt{\rho_l}}{\sqrt{\rho_r}+\sqrt{\rho_l}} \end{aligned}\right\} \tag{C.6.6.12}$$

而粘性部分则用一般的有限体积法，而 ∇q 在表面上的值则由左侧和右侧平均得到。

粘性项的离散化用中心差分方法得到，具体地说就是用有限体积法离散化，侧面的中心的一阶导数值可用侧面的两个点的平均值得到，而每一点的一阶导数值则由（C.6.6.3）式计算得到，边界条件的处理和一般的有限单元法相近。

利用以上方法计算配备导弹的飞机的绕流，请见图 C.6.30，进口马赫数为3.0，并用二维简化，所得的流场及其波系的情况。图 C.6.30则为带导弹的飞机的飞行情况。

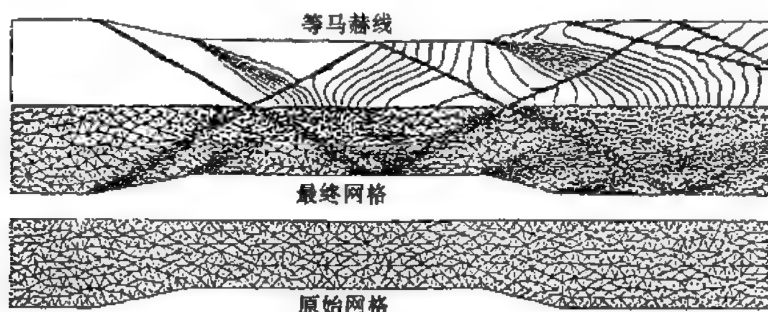


图　C.6.30　进口 $M=3.0$的无粘槽道流

目前无结构网格的方法主要应用于可压缩流体的流场求解，对于不可压缩的流场应用比较少，主要原因是不可压缩流体流动的方程中没有$\frac{\partial p}{\partial t}$项，压力耦合的求解比较困难。解决这个困难有不同的方法，最常用的方法是伪压缩法，这使方程与可压缩流体的方程相似，从而使解决得以简化。另一种方法是 Williams 发展的 Helmholz 压力方法，主要用于求解定常的不可压缩粘性流体的流动，设 $L\boldsymbol{u}$ 为动力学方程中的对流项，$D\boldsymbol{u}$ 表示扩散项，方程记作

$$D(\boldsymbol{u}^{m+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{u}^m) + L\boldsymbol{u}^{m+\frac{1}{2}} = -\nabla p^m + S^m \tag{C.6.6.13}$$

其中 p^m 为第 m 次猜测的压力，于是修正的速度方程为

$$\boldsymbol{u}^{m+1} = \boldsymbol{u}^{m+\frac{1}{2}} - D^{-1}\nabla\delta p \tag{C.6.6.14}$$

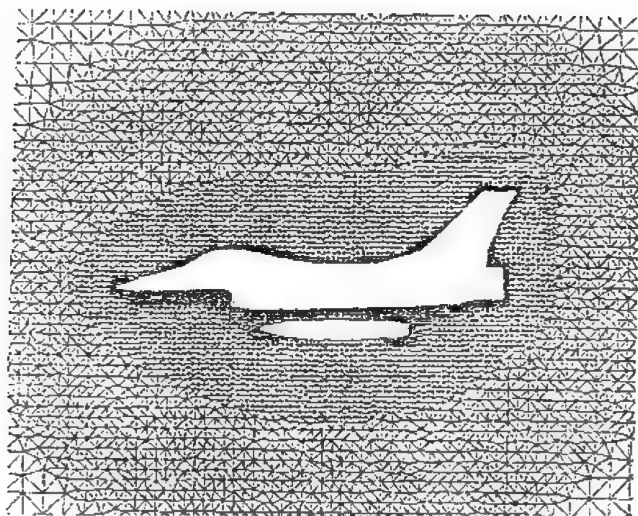
其中 δp 为压力校正值，它应当满足的方程为

$$\Omega\delta p - \nabla\cdot D^{-1}\nabla\delta p = -\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{m+\frac{1}{2}} \tag{C.6.6.15}$$

其中 Ω 为 Helmholz 系数，而 D^{-1}是 D 的逆阵，求得 δp 后可得

$$p^{m+1} = p^m + w\delta p \tag{C.6.6.16}$$

其中 w 为松弛因子，于是 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{m-1}\sim\Omega\delta p$，当 m 增长时 $\nabla\delta p\to0$，于是 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{m+1}\to0$，使连续方程得以满足。求解过程中采用逐点隐式法离散化。（C.6.6.15）式就是 Helmholz 压力方程。上



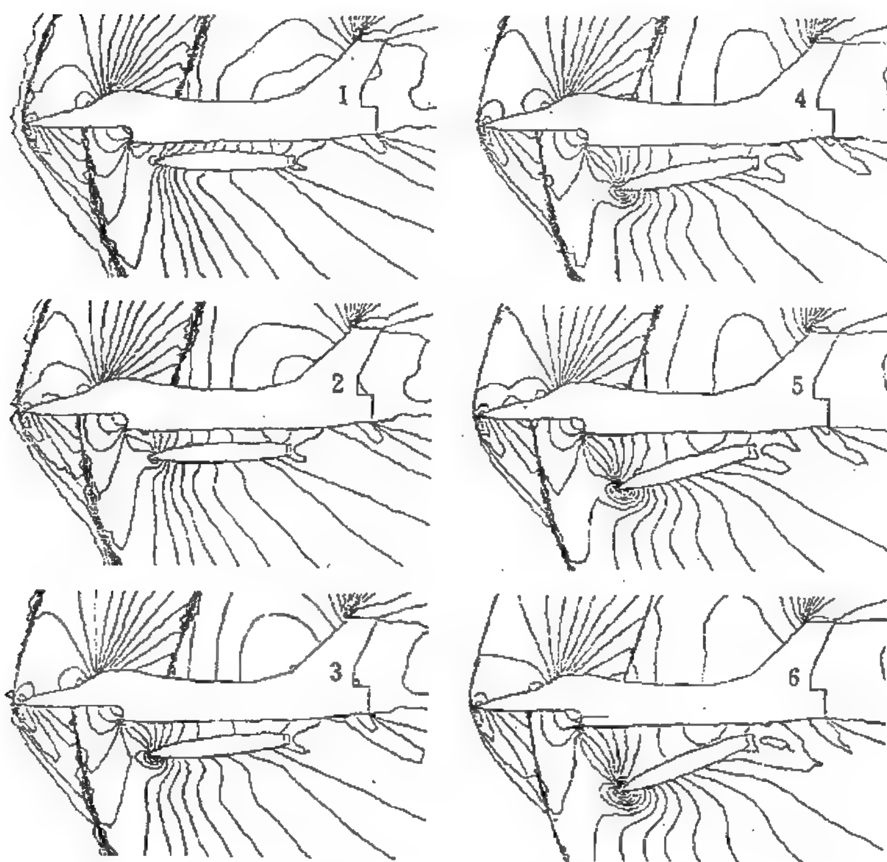


图 C.6.31 导弹分离时 n 个时刻时的等压线

面的求解得到压力，并由此得到相应的速度 u^{n+1}。

下面是利用动力学方程和湍流模式方程计算下一时刻的速度。为此方程可以写出如下的形式

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial (F-F_v)}{\partial x}+\frac{\partial (G-G_v)}{\partial y}=S \qquad \text{(C.6.6.17)}$$

其中$Q=\{u, v, k, \varepsilon\}^T$，$F$为对流项中$x$方向的无粘性通量向量，$F_v$则为相应的粘性通量向量，而$G$，$G_v$则为相应的$y$方向的量。将上式在多边形（或三角形）上积分可得

$$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial t}\mathrm{d}A + \int_{\partial A}(F - F_v)\mathrm{d}y - \int_{\partial A}(G - G_v)\mathrm{d}x = \iint_A S\mathrm{d}A \qquad (C.6.6.18)$$

其中S为方程的源项，而Helmholz压力方程作积分得

$$\iint_A \Omega\delta p\mathrm{d}A - \int_{\partial A} D^{-1}\partial_x\delta p\mathrm{d}y + \int_{\partial A} D^{-1}\partial_y\delta p\mathrm{d}x = -\int_{\partial A} u^{m+\frac{1}{2}}\mathrm{d}y + \int_{\partial A} v^{m+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \qquad (C.6.6.19)$$

而$\frac{\partial}{\partial t}$的计算可以是

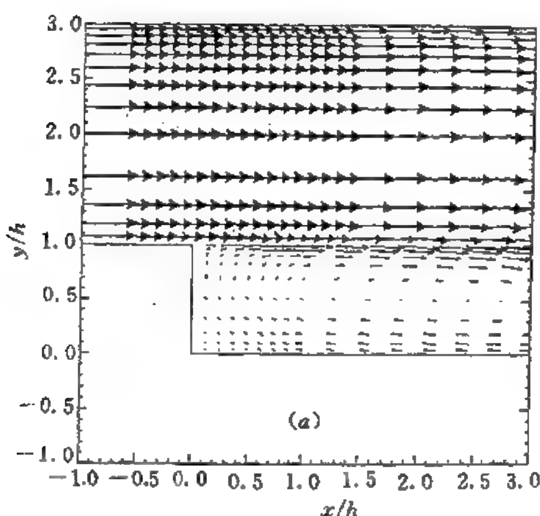
$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{3(\ \ )^{m+\frac{1}{2}} - 4(\ \ )^m + (\ \ )^{m-1}}{2\Delta t} \qquad (C.6.6.20)$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{(\ \ )^{m+\frac{1}{2}} - (\ \ )^m}{\Delta t} \qquad (C.6.6.21)$$

而D^{-1}可取为Δt，在计算定常问题时，ω，Ω^{-1}可以取与Δt同量级的量。计算表明，压力会出现一种非物理的波动，为此可以加上一个阻尼项，即在（C.6.6.13）式右端加上

$$-\varepsilon_p\sum 0.5(\gamma_{ii} + \gamma_i)[\nabla^2 p_{ii} - \nabla^2 p_i]$$





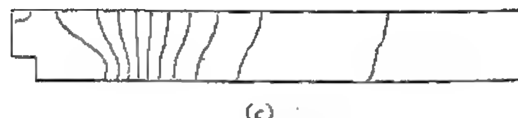
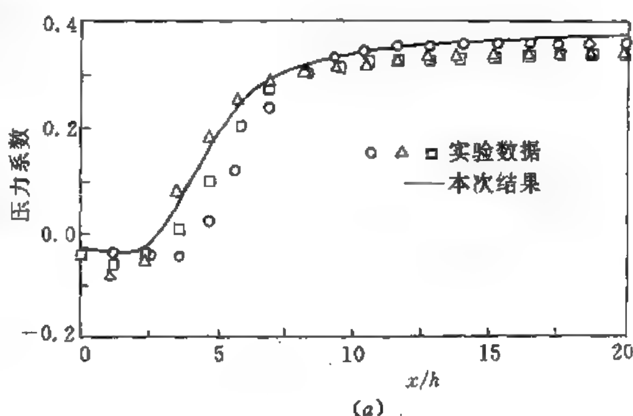


图 C.6.32

(a) 计算的速度向量 (b) 速度剖面 (c) 等压线



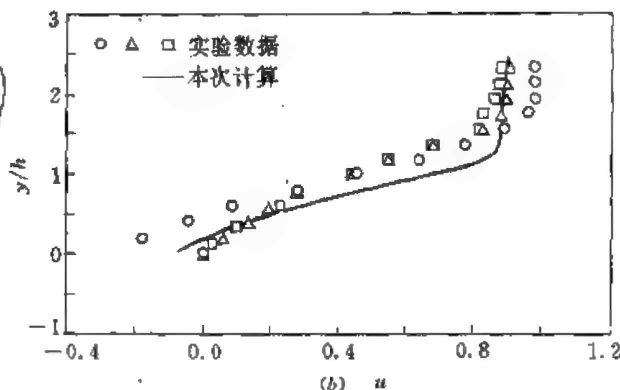


图 C.6.33

(a) 台阶压的压力分布 (b) $x/h=5.2$处的速度剖面

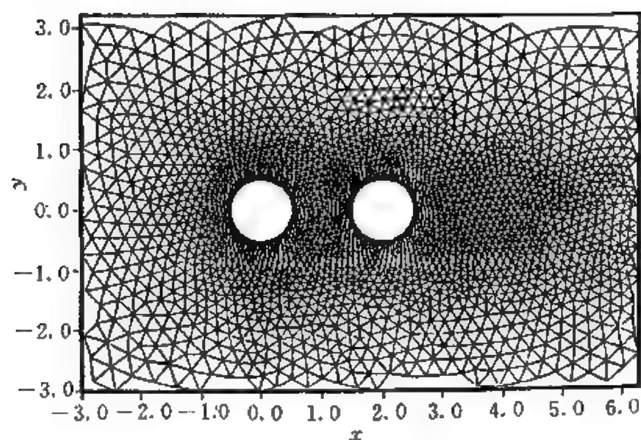


图 C.6.34 计算双圆柱绕流时的无结构网格

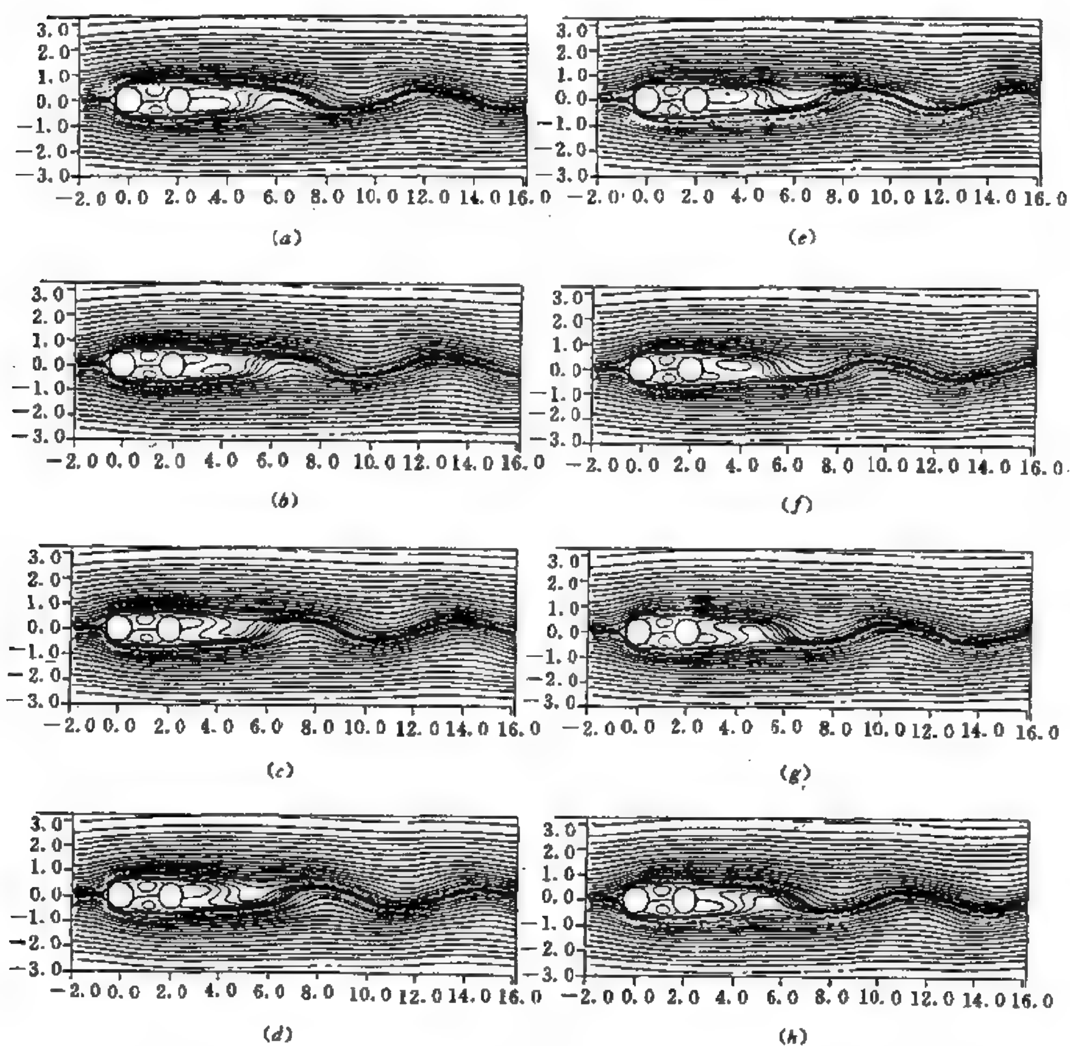


图 C.6.35

不同时刻的流线图，$Re=100$，$Pr=0.71$，$Gr=0$，$g^*=1$

(a) $t=531.616$ (b) $t=532.681$ (c) $t=533.737$ (d) $t=534.803$

(e) $t=535.869$ (f) $t=536.936$ (g) $t=537.991$ (h) $t=539.056$

其中 $\epsilon_p \sim 0.04$，γ 为几何权数，i 为所求的点，il 是与 i 紧密相连的点，γ 值选取有一定的经验性。应当指出，消除波动的方法并不是最好的，对于无结构网格还要进一步摸索，Williams 用以上的方法计算了一个后台阶的流场，取 $\omega=0.05$，$\Omega=20$，网格点分别为1137，1816，3353个点。从下面的图中可以看出，得到的结果可以与实验相比。当然这一方法应用于不可压缩粘性流动还要进一步研究和探索，但它是一个有希望的方法。

小　结

随着计算机技术的迅速发展，数值模拟方法在流体力学中得到越来越广泛的应用。本章介绍了一些有应用前景的新方法，虽然它们只是新的计算方法和技巧中的一部分，但足以说明随着被模拟的问题越来越复杂，新的计算方法将不断涌现。

TVD 和 ENO 方法在气体动力学中有广泛的应用，特别是对激波的捕捉。

自适应网格是一种新的技巧，很有实用前景。多重网格法时求解椭圆型方程有重要意义。

寻找更快更好的计算方法仍然是流体力学中面临的紧迫问题，向量化和并行计算可以使计算速度大大提高，因此应当尽可能使程序向量化。程序向量化实际上是一个技巧问题而不是理论问题，因为在计算流体力学中本来就存在大量可以向量化的运算。

作为教材不可能将最近的进展全面地反映出来，事实上本书介绍的方法在深度和广度上都在不断地发展，而方法本身所存在的一些问题也有待于深入研究和解决。作为一个计算流体力学工作者来说，应当注重实践，计算方法只有在应用过程中加深认识，加深理解，才有可能提出新的方法，改进现有的方法。同时也要密切注意新方法的发展动向，要善于吸收各种方法的优点来改进自身的方法。比如目前出现的无结构网格方法就是集有限单元法和有限体积法之优点而发展起来的新方法，尽管在格式精度的提高等方面还要深入研究，但不失为一个有希望的方法。

作者希望读者在学习本章后能开拓思路，在实践的基础上创造更好的计算方法。

参考文献

1 Crandall M G. Monotone Difference Approximations for Scalar Conservation Laws. Math. Comp, 1980 vol. 34, No. 149: 1—21

2 Collela P. A Direct Eulerian MUSCL Scheme for Gas Dynamics. SIAM J. Sci. Stat. Computations, 1985 Vol. 6, No. 1

3 Colleia P. Multidimensional Upwind Methods for Hyberbolic Conservation Laws. J. of Comp. Physics, 1990 vol. 87: 171—200

4 Harten A. A High Resolution Scheme for the Computation of Weak Solutions of Hyperbolic Conservation Laws. J. of Comp. Phys, 1983, vol. 49: PP 357—393

5 Harten A. ENO Schemes with Subcell Resolution. J. of Comp. Phys. 1989, vol. 83: 148—184

6 Harten A, Osher S. Uniformly High-Order Accurate Nonoscillalory Schemes I. SIAM J. Numer. Anal, 1987 vol. 24: 279—309

7 Harten A, Chakravarthy S. Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillalory Schemes Ⅱ. J. of Comp. Phys. 1987 vol. 71: 231—303

8 Harten A. Preliminary Results on the Extension of ENO Schemes to Two-Dimensional Problems, Proceed-

ings of the Interna Conf. on Hyperbolic Problems, Saint-Etienne, 1986, 23—40

9 Harten A. Self Adjusting Grid Methods for One-Dimensional Hyperbolic Conservation Laws, J. of Comp. Phys, 1983, vol. 49

10 Lax P D. Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations, Comm. Pure Appl. Math. 1954, vol 7: pp 143—159

11 Rose P L. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes. J. of Comp. Phys. 1981, vol. 43

12 Roe P L. Discrete Models for the Numerical Analysis of Time-Dependent Multidimensional Gas Dynamil. J. of Comp. Phys. 1986, vol. 63: 458—476

13 Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Schemes V. A Second-Order Sequel to Godunovs Method. J. of Comp. Phys. 1979, vol. 32: 101—136

14 Shu, Chi-Wang. Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-Capturing Schemes Ⅱ. 1989, J. of Comp. Phys, vol 83: 32—78

15 Shu, Chi-Wang. Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-Capturing Schemes, J. of Comp. Phys 1988, vol. 77: 439—471

16 Osher S. High Resolution Schemes and the Entropy Condition, SIAM J. Num. Anal, 1984, vol. 21, No. 5: 955—984

17 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式.空气动力学学报, 1988, vol. 6, No. 2: 143—165

18 Sod G A. Numerical Methods in Fluid Dynamics-initial and Initial Boundary-Value Problem. Cambridge University Press, 1986

19 Brandt A. Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary Value Problems. Math. of Comp. 1977, vol. 31, No. 138

20 Brandt A. Multi-Level Adaptive Computations in Fluid Dynamics. AIAA Paper 79—1455, 1979

21 Book D L. Finite-Difference Techniques for Vectorized Fluid Dynamics Colculations. Springer-Verlag, 1981

22 Boris J P. New Directions in Computational Fluid Dynamics. Ann. Rew. Fluid Mech, 1989, 345—385

23 苏铭德, 朱方林. 非结构网格的生成和自适应方法. 空气动力学学报 1995

24 Steve L Kavman Jr., Gregory S. Spragle. Development of an Unstructured CFD Method AIAA-91-0019 (paper)

25 Morgan Williams. The Solution of the 2-D Inampressible Flow Equations on Unstructured Triangular Meshes

Numerical Heat Transfor Part B. vol. 23 309—335 (1993)

附录　流场的图像显示

流场的图像显示是数值模拟不可缺少的部分。

随着人们研究的流场问题日益复杂和深入，计算结果也越加繁琐，如果仅以数字报表形式输出，由于难以把握，这样的东西可能类似于废纸一堆。人们只有将这些数据化作各种各样的图像才能有效地判断计算结果的正确性和特性，进而了解流场的各种特性。随着计算机图像显示系统及相应软件的发展，流场的显示方式也越来越丰富，效果越来越逼真。

目前计算机图形学、图形显示的高分辨图形仪及相应的软件得到了很大的发展，但是用于流场的数值模拟和显示还需要做大量工作，有赖于流体力学工作者与计算机图形工作者的密切配合。

本附录中介绍计算机图形学一些基本知识和流场显示的一些常用方法，供读者深入开展这一方面的工作时参考。关于计算机的显示系统和绘图系统这里不再介绍，有兴趣的读者可以参考有关文献。

I　绘图的数学基础

本节介绍一些与流场显示有关的预备知识。

I.1　图形变换

在流场显示中常常需要对图形作诸如平移、转动、缩放、投影、透视等变换，这些变换实质上都可归结为坐标变换，而不同坐标间的变换最后都能用矩阵形式表示。

为清晰起见，首先介绍二维的情况，三维显然只是二维的推广。

1. 放大变换

以下约定流场或物理场的坐标为 (x, y)，计算机图像显示器上的坐标记作 (x', y')。

若放大系数为 a，则放大变换为：$x'=ax$；$y'=ay$ 记作矩阵形式有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{I.1}$$

2. 仿射变换

若坐标只在一个方向上作放大或缩小，而另一方向上不变，这种变换为仿射变换。如 $x'=x$；$y'=ay$，这时变换可以写为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{I.2}$$

3. 对称变换

若需要作一与已知图形某一直线对称的图形，则需要将坐标系作对该直线的对称变换，如对 y 轴对称，则 $x'=-x$，$y'=y$，矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{I.3}$$

对 x 轴对称，则为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{I.4}$$

对 $y=ax$ 直线对称的变换将 (x, y) 点变换到 (x', y') 点，由于是对称的，故有

$$\frac{y'-y}{x'-x} = -\frac{1}{a}, \quad \frac{y'+y}{x'+x} = a$$

或 $x' = \frac{1-a^2}{1+a^2}x + \frac{2a}{1+a^2}y$；$y' = \frac{2a}{1+a^2}x + \frac{a^2-1}{1+a^2}y$，或

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2} & \frac{2a}{1+a^2} \\ \frac{2a}{1+a^2} & \frac{a^2-1}{1+a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{I.5}$$

4. 错切（剪切）变换

当图形发生剪切变形时需要错切（剪切）变换。若在 x 方向上产生剪切变形，则 $x'=x+by$，$y'=y$，或

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{I.6}$$

若在 y 方向产生剪切变形，则 $x'=x$，$y'=cx+y$，或

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{I.7}$$

5. 旋转变换

当图形绕坐标原点转动时，需要旋转变换，设反时针方向转过 θ 角为正，则为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{I.8}$$

以上几种变换，坐标原点都不发生变换。

6. 平移变换

可记作

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} \tag{I.9}$$

为以后讨论方便起见，可以引入扩展矩阵

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:c} a & b & l \\ c & d & m \\ \hdashline p & q & s \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{I.10}$$

其中 a，b，c，d 所构成的变换为坐标原点不变的变换，l，m 为 x，y 方向平移量，p，q，s 则用来实现齐次变换，这一点解释如下。

在原物理场中为 x，y 及 $z=1$的平面，所得的 x'，y'，z'是变换后的空间，如果 x，y 本身不作变换，则有

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline p & q & s \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{I.11}$$

于是 $z'=px+qy+s$，这相当于 $(x, y, 1)$ 平面上的点投影到 $z'=px+qy+s$ 平面上的点，这是一种轴测投影。如果同时有缩放则为透视投影。

以上变换均可在图 I.1和 I.2中得以表示。

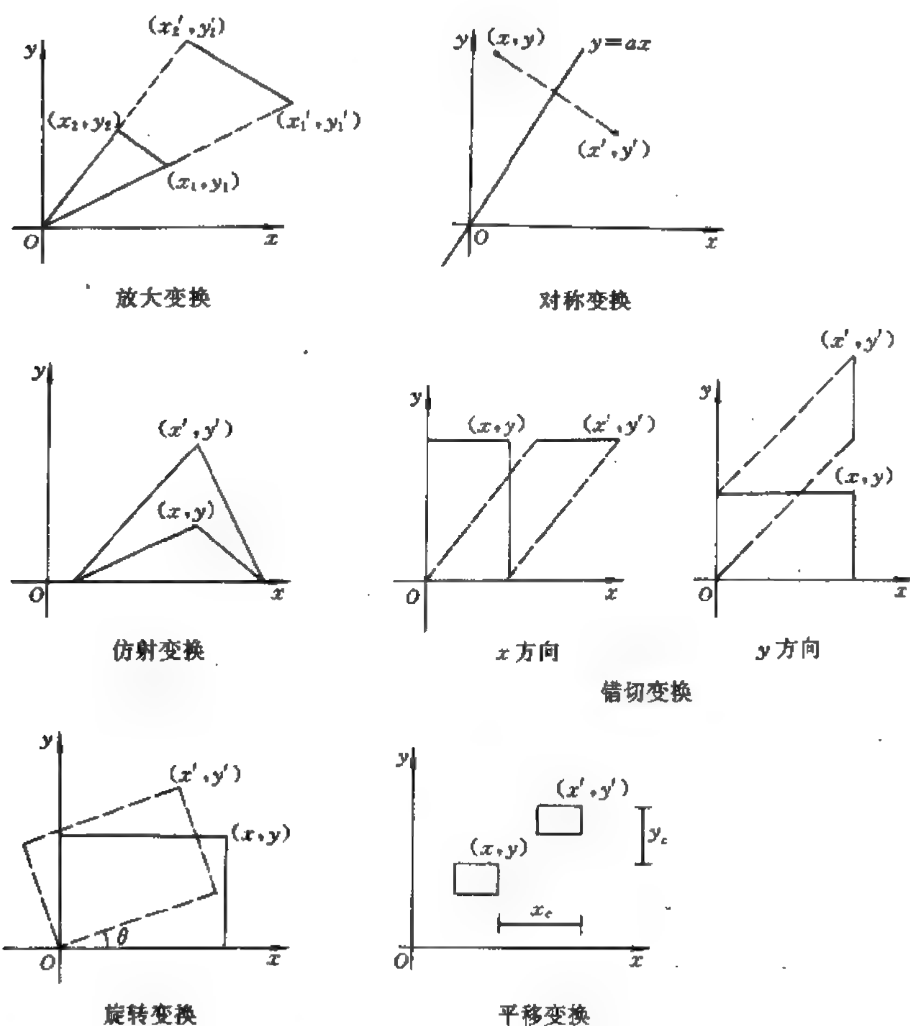


图 I.1

以上变换推广到三维问题中情况如下。

1. 放大变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{I.12}$$

2. 仿射变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{I.13}$$

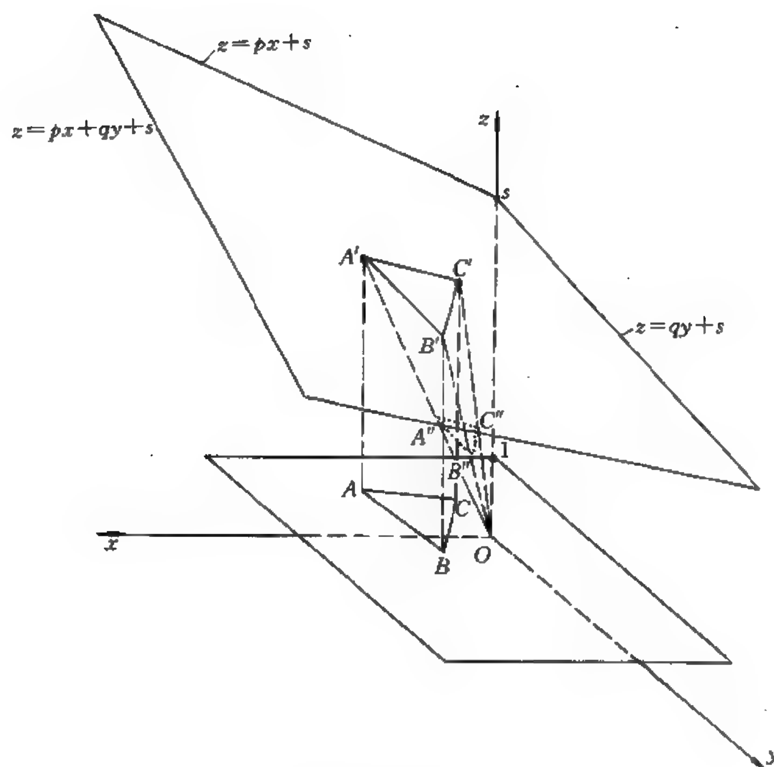


图 I.2

3. 对称变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{I.14}$$

这里对 (x, y)，(y, z)，(x, z) 坐标面作对称变换。

4. 错切变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ d & 1 & f \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{I.15}$$

5. 旋转变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 + (1 - n_1^2)\cos\theta, & n_1 n_3(1 - \cos\theta) - n_3\sin\theta, & n_1 n_3(1 - \cos\theta) + n_3\sin\theta \\ n_1 n_2(1 - \cos\theta) + n_2\sin\theta, & n_2^2 + (1 - n_2^2)\cos\theta, & n_2 n_3(1 - \cos\theta) - n_1\sin\theta \\ n_1 n_2(1 - \cos\theta) - n_2\sin\theta, & n_2 n_3(1 - \cos\theta) + n_1\sin\theta, & n_3^2 + (1 - n_3^2)\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{I.16}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
n_1 &= \sin\theta_1\cos\theta_2 \\
n_2 &= \sin\theta_1\sin\theta_2 \\
n_3 &= \cos\theta_1 \\
\theta &= \theta_3
\end{aligned}\right\}
$$

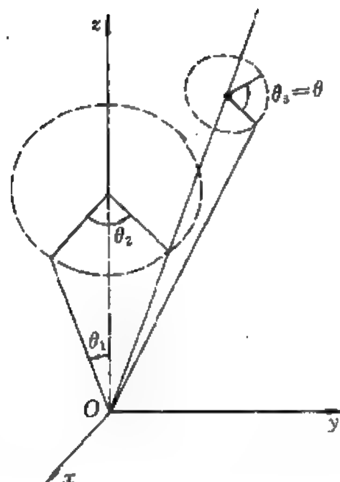


图 I.3

θ_1，θ_2，θ_3的定义如图 I.3所示。

6. 平移变换

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \qquad (\text{I}.17)
$$

所有的变换可以统一写成 $X'=\{x', y', z', 1\}$和 $X=\{x, y, z, w\}$之间的关系

$$
X' = TX \qquad (\text{I}.18)
$$

其中 T 为扩展矩阵，是4×4方阵，左上方3×3阵为坐标原点可变的变换，右上3×1列阵为平移变换时的平移向量。

一般的变换可以分解为若干个变换的组合，即

$$
X' = T_1 T_2 \cdots T_n X = TX; \quad T = T_1 T_2 \cdots T_n \qquad (\text{I}.19)
$$

I.2 二次圆锥曲线

圆锥曲线由圆锥体与平面相交得到，它的一般形式为

$$
ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (\text{I}.20)
$$

其中 $b^2-4ac=0$为抛物线；$b^2-4ac<0$为椭圆线；$b^2-4ac>0$为双曲线，下面给出一些适于计算机计算用的表达式。

1. 圆

$$
\left.\begin{aligned}
x &= x_0 + R\cos\phi \\
y &= y_0 + R\sin\phi
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{I}.21)
$$

或

$$
\left.\begin{aligned}
x'_{i+1} &= x'_i\cos\Delta\phi - y'_i\sin\Delta\phi \\
y'_{i+1} &= x'_i\sin\Delta\phi + y'_i\cos\Delta\phi
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{I}.22)
$$

其中 $x'_i=x_i-x_c$，$y'_i=y_i-y_c$，$\phi_i=i\cdot\Delta\phi$，$\Delta\phi$ 为一定值，在 $\cos\Delta\phi$ 和 $\sin\Delta\phi$ 一次计算后只用加减乘法即可，以减少计算量

2. 椭圆

$$
\left.\begin{aligned}
x &= x_c + a\cos\phi\cos\alpha - b\sin\phi\sin\alpha \\
y &= y_c + a\cos\phi\sin\alpha + b\sin\phi\cos\alpha
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{I}.23)
$$

参数形式为

$$
\left.\begin{aligned}
& x' = a\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad y' = \frac{2bt}{1+t^2} \\
& x = x_c + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\
& y = y_c + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha
\end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \qquad (\text{I}.24)
$$

其中 a，b 为椭圆的两个轴的半长，α 为 a 轴与 x 轴的夹角。

3. 抛物线

抛物线如图Ⅰ.4所示

极坐标方程为
$$\rho=\frac{2a}{1-\cos\phi} \tag{Ⅰ.25}$$

直角坐标的参数方程为
$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi + a = \frac{a}{\operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}} \\ y &= \rho\sin\phi = \frac{2a}{\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{Ⅰ.26}$$

或
$$x=\frac{2at^2}{(1-t^2)^2},\quad y=\frac{4at}{1-t^2}\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

4. 双曲线

它的标准形式为
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{Ⅰ.27}$$

参数形式为
$$\left.\begin{aligned} x &= \pm a\sec\theta \\ y &= \pm b\operatorname{tg}\theta \end{aligned}\right\} \tag{Ⅰ.28}$$

或
$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\frac{a(1+t^2)}{1-t^2} \\ y &= \pm\frac{2bt}{1-t^2} \end{aligned}\right\}\quad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{Ⅰ.29}$$

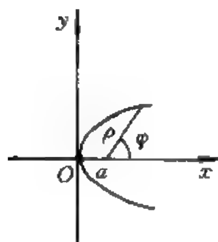


图 1.4

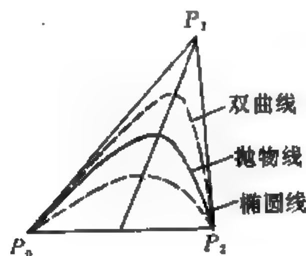


图 1.5

5. 三点定义的圆锥曲线

如图Ⅰ.5所示 P_0，P_1，P_2为3个点，由它们定义的二次曲线通过 P_0，P_2点且与 P_0P_1及 P_1P_2线相切。根据这些条件可设二次曲线方程为
$$\boldsymbol{P}(t)=\frac{\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1t+\boldsymbol{A}_2t^2}{1+e_1t+e_2t^2}\qquad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{Ⅰ.30}$$

其中
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}_0 &= \boldsymbol{P}_0 \\ \boldsymbol{A}_1 &= -2\boldsymbol{P}_0+(2+e_1)\boldsymbol{P}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 &= \boldsymbol{P}_0-(2+e_1)\boldsymbol{P}_1+(1+e_1+e_2)\boldsymbol{P}_2 \end{aligned}\right\} \tag{Ⅰ.31}$$

$\boldsymbol{P}_0$，$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$是3个点的矢向量，e_1，e_2为两个常数。下面讨论 e_1，e_2在不同值时得到的曲线。

(1) $e_1^2-4e_2=d=0$时为抛物线。当 $e_1=e_2=0$时为一通过 $\Delta P_0P_1P_2$的 $\overline{P_0P_2}$边中线的中点的抛物线，即 $t=\frac{1}{2}$时

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{P}_1+\frac{\boldsymbol{P}_0+\boldsymbol{P}_2}{2}\right) \tag{I.32}$$

(2) $e_1^2-4e_2=d>0$时为双曲线。

(3) $e_1^2-4e_2=d<0$时为椭圆线。

由于 $\boldsymbol{P}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4+2e_1+e_2}\boldsymbol{P}_0+\frac{2e_1}{4+2e_1+e_2}\boldsymbol{P}_1+\frac{1+e_1+e_2}{4+2e_1+e_2}\boldsymbol{P}_2$ (I.33)

故引入定义

$$\lambda=\frac{\overline{Q_0Q_1}}{\overline{Q_0P_1}}=\frac{\boldsymbol{P}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_0)}{\boldsymbol{P}_1-\frac{1}{2}(\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_0)} \tag{I.34}$$

这时要求

$$e_1=-e_2=\frac{4\lambda-2}{1-\lambda} \tag{I.35}$$

圆锥曲线为

$$\left.\begin{aligned}&P(t)=\frac{A_0+A_1t+A_2t^2}{1+e(t-t^2)}\\&e=\frac{4\lambda-2}{1-\lambda}\\&d=e^2+4e=\frac{2(4\lambda-2)}{(1-\lambda)^2}\end{aligned}\right\} \tag{I.36}$$

可见 $\lambda>\frac{1}{2}$ 时 $d>0$为双曲线；

$\lambda=\frac{1}{2}$ 时 $d=0$为抛物线；

$\lambda<\frac{1}{2}$ 时 $d<0$为椭圆线。

I.3 样 条 曲 线

为作光滑曲线通过给定点，一般采用逐段三次的样条曲线，它起源于绘图员用样条来拟合曲线的思想。将样条视为有弹性的被固定在给定点上的金属条，该金属条所成的曲线就是样条曲线（见图 I.6）。

在二固定点之间的金属条的受力如图 I.7所示，由材料力学弯曲理论知，金属条形状应满足方程

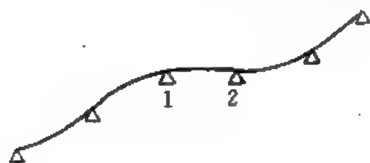


图 I.6

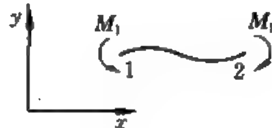


图 I.7

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M}{EJ}=\frac{M_1+F_1(x-x_1)}{EJ}=ax+b \tag{I.37}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=ax+b$$

积分得

$$y=\frac{1}{6}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx+d \tag{I.38}$$

由 $y(x_1)=y_1$ 和 $y(x_2)=y_2$ 可以建立两个确定 a，b，c，d 的方程。另外考虑到相邻两段是光滑连接的，在接点上没有附加的力矩，所以不仅一阶导数是连续的，而且二阶导数也是连续的。根据以上条件在1点和2点可以各建立两个方程，这相当于对于每一段增加两个方程，这样将各段的方程列出，可得到$4N-2$个方程（其中包括边界点位置的条件）。为了使方程封闭，需要附加两个边界条件，一般为给定边界点处的曲线的一阶导数值或二阶导数值。这样就可以得到确定所有系数值的封闭方程。

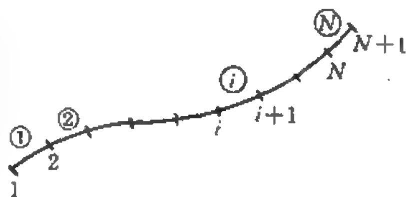


图 I.8

在图 I.8中设有 $N+1$ 个节点，即有 N 段，其中第1和 $N+1$ 为边界点，根据上述条件得到如下方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{6}a^{ⓘ}x_i^3+\frac{1}{2}b^{ⓘ}x_i^2+c^{ⓘ}x_i+d^{ⓘ}=y_i\\&\frac{1}{6}a^{ⓘ}x_{i+1}^3+\frac{1}{2}b^{ⓘ}x_{i+1}^2+c^{ⓘ}x_{i+1}+d^{ⓘ}=y_{i+1}\end{aligned}\right\}\quad(i=1,2,\cdots,N) \tag{I.39}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}a^{ⓘ}x_{i+1}^2+b^{ⓘ}x_{i+1}+c^{ⓘ}=\frac{1}{2}a^{(i+1)}x_{i+1}^2+b^{(i+1)}x_{i+1}+c^{(i+1)}\overset{\text{记作}}{=\!=\!=}m_{i+1}\\&a^{ⓘ}x_{i+1}+b^{ⓘ}=a^{(i+1)}x_{i+1}+b^{(i+1)}\end{aligned}\right\}\quad i=1,\cdots,N-1$$

将上述各式组合简化可得如下方程

$$(1-\alpha_i)m_{i-1}+2m_i+\alpha_i m_{i+1}=\beta_i\qquad(i=2,3,\cdots N) \tag{I.40}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_i=\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}\\&\beta_i=\frac{h_ih_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}^2}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2}\right)\end{aligned}\right\}\quad i=2,\ \cdots,\ N+1$$

$$h_i=x_{i+1}-x_i$$

方程（I.40）共有 $N-1$ 个，而未知的 m_i 有 $N+1$ 个，故还需两个边界条件，它们有以下几种可能：

（1）给定边界处的 m_1，m_{N+1} 值，即曲线在边界上的斜率给定；

（2）给定边界处曲线的曲率或二阶导数，一般取 $y''(x_1)=y''(x_{N+1})=0$ 由于

$$\left.\begin{aligned}&y''(x_1)=-\frac{6}{h_1^2}y_1+\frac{6}{h_1^2}y_2-\frac{4}{h_1}m_1-\frac{2}{h_1}m_2\\&y''(x_{N+1})=\frac{6}{h_N^2}y_N-\frac{6}{h_N^2}y_{N+1}+\frac{2}{h_N}m_N+\frac{4}{h_N}m_{N+1}\end{aligned}\right\} \tag{I.41}$$

这就补充了关于 m 的两个方程。

（3）周期条件，即 $m_1=m_{N+1}$，$y''(x_1)=y''(x_{N+1})$。应当注意必须有 $y_1=y_{N+1}$，否则问题会不自适应。

在 $m_i(i=1,2,\cdots,N+1)$ 确定以后，第 i 段内的 $y(x)$ 为

$$\begin{aligned}y(x)=&\left[\frac{3}{h_i}(x_{i+1}-x)^2-\frac{2}{h_i^3}(x_{i+1}-x)^3\right]y_i\\&+\left[\frac{3}{h_i^2}(x-x_i)^2-\frac{2}{h_i^3}(x-x_i)^3\right]y_{i+1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& - h_i\left[\frac{1}{h_i^2}(x_{i+1}-x)^2-\frac{1}{h_i^3}(x_{i+1}-x)^3\right]m_i \\
& - h_i\left[\frac{1}{h_i^2}(x-x_i)^2-\frac{1}{h_i^3}(x-x_i)^3\right]m_{i+1}
\end{aligned} \tag{I.42}
$$

需要说明的是边界条件不同对于邻近边界点的区段来说会有不同的结果，而对于比较远的区段，影响并不很大。

I.4 曲线光顺

通过平面上给定的几个点作曲线是常见的绘图要求。最简单的方法是用直线段依次将这些点连接起来，形成一折线。当点数足够多和足够密集时折线就和曲线相差无几。当点不够多或比较稀疏时，折线和曲线相距甚远。对于许多物理问题而言，折线变化是不合理的，所以需要用光滑的曲线将这些散离点联接起来。常用的办法是用样条曲线通过这些点；另有一些方法是不通过这些点而只是逼近这些点，如 Bezier 曲线就是其中之一。但在某些情况下会造成曲线波动太多，也不甚合理，这就需要光顺化。下面解释一下上述3个方面问题。

1. 样条曲线联接

在前面讨论的样条曲线要求 x_1，x_2，…，x_{N+1} 是单调递增的，而在实际问题中离散点在平面上的分布可以是随意的。为此可以先将各离散点依次序用直线段联接（见图 I.9），然后从点1出发建立以沿折线的线长为自变量的自然坐标 s，不难看出

$$
\begin{aligned}
& s_1 = 0 \\
& s_i = \sum_{k=1}^{i-1}\Delta_k \quad i = 2,3,\cdots,N \\
& \left.\begin{aligned} x(s_i) &= x_i \\ y(s_i) &= y_i \end{aligned}\right\} \quad i = 1,2,\cdots,N
\end{aligned} \tag{I.43}
$$

由于 s_i，x_i，y_i 均为已知，利用前面讨论的样条曲线建立的方法可以得到样条函数 $x(s)$和 $y(s)$，这就通过参数建立了 x 与 y 的关系，也就确定出通过1，2，…，N 点的样条曲线。

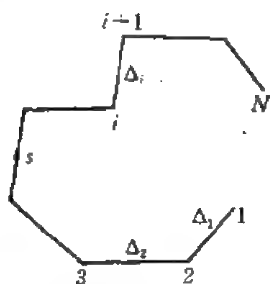


图 I.9

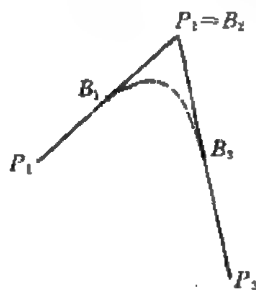


图 I.10

2. Bezier 曲线联接

上述样条曲线联接的方法比较麻烦，而 Bezier 曲线则比较简单。一般的 Bezier 曲线比较繁琐，实际应用并不普遍，这里介绍的二次 Bezier 曲线实际就是由3点定义的抛物线。

设有3点 P_1，P_2，P_3（见图 I.10），联接 P_1P_2及 P_2P_3，取其中点为 B_1，B_3，又设 $B_2=P_2$，于是由 $B_1B_2B_3$定义的抛物线为

$$
B(t) = (1-t)^2B_1 + 2t(1-t)B_2 + t^2B_3
$$

$$
= (t^2, t, 1)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \qquad (\text{I}.44)
$$

所得曲线如虚线所示。对于若干离散点的情况可以如图 I.11所示将它们连接起来。它的优点是方便，但由于不通过这些点，所以不够准确。



图 I.11

3. 曲线光顺化

用样条或 Bezier 方法所得曲线仍然可能由于拐弯很多而不够光顺，还需要光顺化处理。为此首先定义光顺准则：

定义Ⅰ 凡满足下列3个条件的平面曲线为光顺曲线：

(1) 曲线的二阶导数连续；

(2) 没有多余的拐点；

(3) 曲率变化较均匀。

应该说第二、第三个条件是一种整体的和笼统的条件。实际上是指拐点尽可能少以及两个极值点之间的曲率尽可能接近线性变化。

另外还要引入光顺型点列的定义。

定义Ⅱ 对于平面上给定点列 $\{P_i\}$，如果至少能找到一条光顺的插值曲线，就称 $\{P_i\}$ 是光顺型点列。

对于给定的一组点列 $\{P_i\}$，构造一条曲线依次通过每一点，称为插值。假定不是严格通过每一点，只是贴近它们，则称为拟合。利用插值不一定能得到光顺的曲线，而用拟合所得到的曲线在一定条件下又可以是光顺的曲线。

构造光顺曲线的方法有许多种，这里只介绍一种整体修改方法—— 回弹法。这种方法的基本思想是将不光滑处像弹性样条那样回弹后变得光滑。具体作法如下所述。

首先用样条函数将各离散点顺序联接，得到 $y=y(x)$。然后根据要求将整条曲线分成单凹和单凸的（即无拐点的）区间，分界点即为拐点，拐点的位置及个数根据要求预先给出。由于采用样条函数，所以在点列的各点处二阶导数值是已知的，而在每一区间内二阶导数最多变号一次，因此根据各点二阶导数的正负值情况即可得知曲线的光顺情况。$y''>0$时为凹，$y''<0$时为凸。若用 P_i 表示 i 点预先给定的二阶导数符号，即预先给定为凸时 $P_i=-1$，凹时 $P_i=1$，显然，当

$$
P_i \cdot y''(x_i) < 0
$$

时为不光顺的点，称作坏点。有些情况虽然满足上式条件，但由于 $y''(x_i)$ 的绝对值很小 ($<\varepsilon$)，则也可认为是光顺的。所以坏点条件应改为

$$
P_i \cdot y''(x_i) < 0 \wedge |y''(x_i)| > \varepsilon \qquad (\text{I}.45)
$$

一般取 $\varepsilon=10^{-4}$。

有时上述光顺条件满足，但是在两个 y'' 符号相同的点之间曲线存在两个以上极值点时也不能认为是光顺的。也就是说，若

$$
(y''(x_{i+1}) - y''(x_i)) \cdot (y''(x_i) - y''(x_{i-1})) < 0 \qquad (\text{I}.46)
$$

时曲线是不光顺的，只是要求更为精细一些罢了。

光顺化时首先找出满足（I.46）式的坏点，并依坏的程度排队，从最坏点开始修改。如果把样条看作一个梁，根据材料力学的观点，当一组力作用于梁上时，其集中载荷最大处，挠曲率的变化最严重，故外力最大的点即为“最坏点”。设 i 点为所找到的点，其上的集中外力为

$$\begin{aligned} N_i &= y'''_{i右} - y'''_{i左} \\ &= \frac{y''_{i+1} - y''_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y''_i - y''_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \end{aligned} \tag{I.47}$$

最坏点即 N_i 值在所有 N_1，N_2，…，N_n 个值中绝对值最大。这时将这一点去掉，然后在同样边界条件下重新建立样条函数，而 $y(x_i)$值由 y 在（x_{i-1}，x_{i+1}）区间内的样条函数在 i 点的值给出，有时为了不使修改量过大，可以用

$$y(x_i) = y(x_i)_{原} + \alpha[y_{新} - y(x_i)_{原}] \tag{I.48}$$

这里 α 为回弹系数，一般 $\alpha=0.3$，当 $\Delta y<0.3$时可以取 $\alpha=1$，反复以上过程可以使曲线达到粗光顺化。

在细光顺化时先找出不满足细光顺的坏点，设为 i 点。然后与前相同，去掉 i 点作样条函数，在（$i-1$，$i+1$）之间形成一三次曲线，于是可求得 i 点新的二阶导数值

$$y''^{*}_i = \frac{h_{i+1}y''_{i-1} + h_i y''_{i+1}}{h_{i+1} + h_i} = \lambda_i y''_{i-1} + \mu_i y''_{i+1} \tag{I.49}$$

其中 $h_i=x_i-x_{i-1}$，$\lambda_i+\mu_i=1$，$\lambda_i=\dfrac{h_{i+1}}{h_{i+1}+h_i}$

由三次样条函数定义有方程

$$\mu_i y''_{i-1} + 2y''_i + \lambda_i y''_{i+1} = d_i \tag{I.50}$$

其中 y''_i 为原来的值，现在新的值应为 y''^{*}_i，故有

$$\mu_i y''_{i-1} + 2y''^{*}_i + \lambda_i y''_{i-1} = d_i^{*} \tag{I.51}$$

其中

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right)$$

$$d_i^{*} = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i^{*}}{h_{i+1}} - \frac{y_i^{*} - y_{i-1}}{h_i}\right)$$

（I.50）—（I.51）得

$$z(y''_i - y''^{*}_i) = \frac{6}{h_i h_{i+1}}(y_i^{*} - y_i)$$

或

$$\begin{aligned} y_i^{*} &= y_i + \frac{h_i h_{i+1}}{3}(y''_i - \lambda_i y''_{i-1} - \mu_i y''_{i+1}) \\ &= y_i + \frac{h_i h_{i+1}}{3}[\lambda_i(y''_i - y''_{i-1}) - \mu_i(y''_{i+1} - y''_i)] \end{aligned}$$

或引入参数 ω，得

$$y''_i = y_i + \omega\frac{h_i h_{i+1}}{3}[\lambda_i(y''_i - y''_{i-1}) - \mu_i(y''_{i+1} - y''_i)] \tag{I.52}$$

ω 一般也为0.3，光顺化的过程如图 I.12所示。

顺便指出，光顺化的曲线是拟合曲线，不再通过每一个点了。

此外拟合曲线的生成还有最常用的方法，是假定曲线具有某种形式，如二次多项式等，其

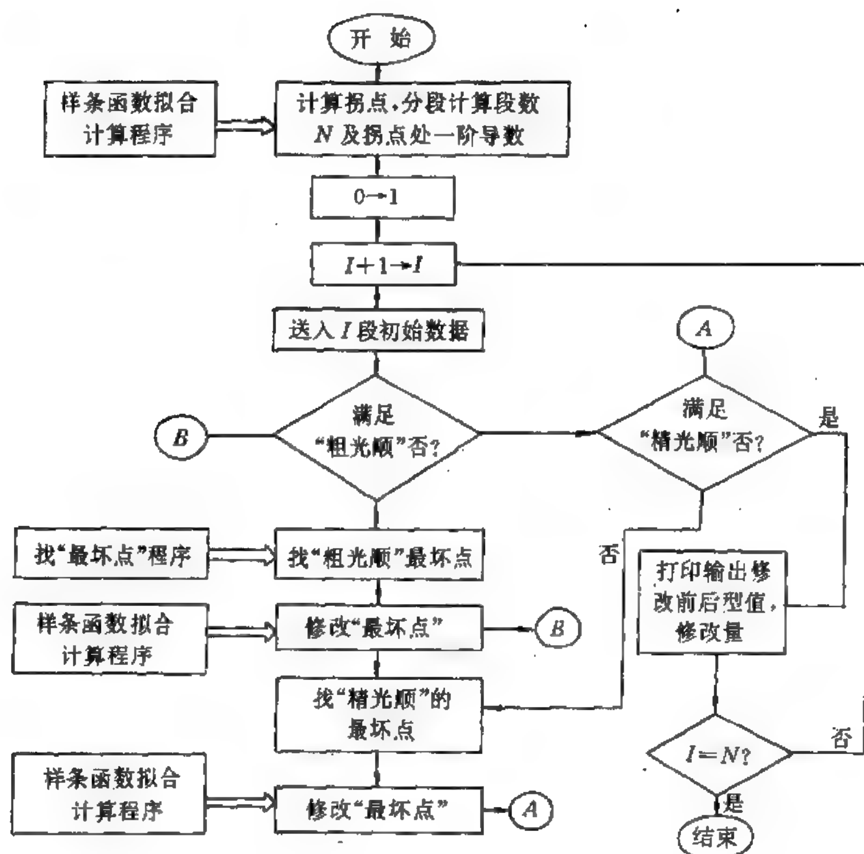


图 Ⅰ.12

中含有一些参数，可写作

$$y = f(x, a_1, a_2, \cdots, a_n) \qquad (\text{Ⅰ}.53)$$

最小二乘法的逼近方法是使

$$\sum_{i=1}^{N}[y_i - f(x_i, a_1, a_2, \cdots, a_n)]^2 \equiv F(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

取极小值，这要求

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

这就构成关于 a_i 的 n 个代数联立方程，求解可得到 a_1，a_2，$\cdots a_n$。于是（Ⅰ.53）就完全确定。

Ⅱ 等值线的绘制

等值线的绘制是最常用的，如流线图，等温线图等都是等值线，在许多软件中所绘制的等值线都限于矩形域，这对于许多问题来说是很不理想的。在本节介绍一种构思简单而适应性很强的等值线绘制方法。

设 $f(x, y)$ 是定义在 Ω 域上的函数。对于已知函数形式的情况，等值线的绘制很方便，这里不讨论。这里所关心的是函数形式事先并不知道，但在一些离散点上给出函数值，即 $z_i = f(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, \cdots n)$ 其中点的位置 (x_i, y_i) 和相应的函数值 z_i 都是已知的。对于数值求解所得的结果来讲正是这样的，因为解都是定义在已知其位置的节点

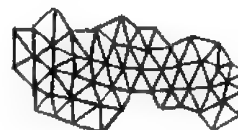


图 Ⅱ.1

上的。

下面讨论等值线的绘制过程。

(1) 将给出函数值的点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) …，(x_n, y_n) 以尽可能短的线联接起来，形成许多三角形单元（如图Ⅰ.1所示），这些三角形单元的顶点上的函数值都是已知的。

(2) 以△123为例，3个顶点对应的函数值为 f_1，f_2，f_3，设三角形内函数 f 为线性变化，故图Ⅰ.2中的 F 平面即

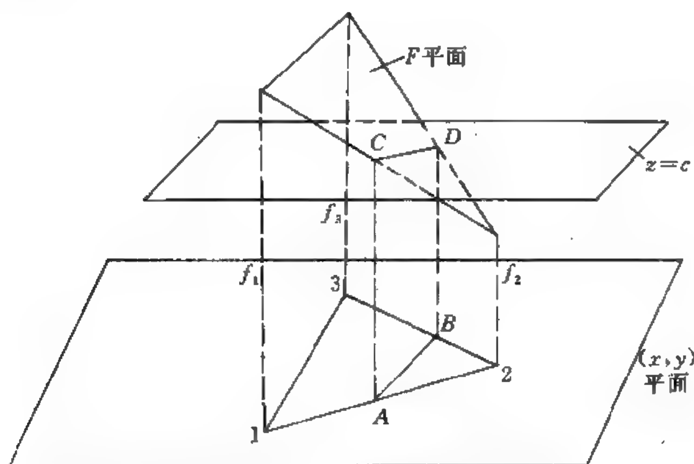


图 Ⅰ.2

代表了三角形域上 f 的变化曲面，设 W 平面为 $z=c$，它与 F 平面交于 CD 线，该线在 x，y 平面上的投影为 AB，不难看出，AB 即为 (x, y) 平面上△123域内 $f=c$ 的等值线。A，B 的坐标为

$$\left.\begin{aligned} x_A &= x_1 + \frac{c-f_1}{f_2-f_1}(x_2-x_1) \\ y_A &= y_1 + \frac{c-f_1}{f_2-f_1}(y_2-y_1) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_B &= x_2 + \frac{c-f_2}{f_3-f_2}(x_3-x_2) \\ y_B &= y_2 + \frac{c-f_2}{f_3-f_2}(y_3-y_2) \end{aligned}\right\} \qquad (\text{Ⅰ}.1)$$

显然这里 $f_2<c<f_1$；$f_2<c<f_3$，一般地说，当 c 落在 (f_1, f_2, f_3) 的最大和最小值之间，在△123域内可以找到等值线，如果 c 在其范围之外，则三角形域内不存在等值线，这里只画三角形域内的等值线。

对于每一个三角形域用上述方法寻找等值线，就可以得到封闭的或起始于边界的等值线。这种等值线是折线，不光滑（图Ⅰ.3）。

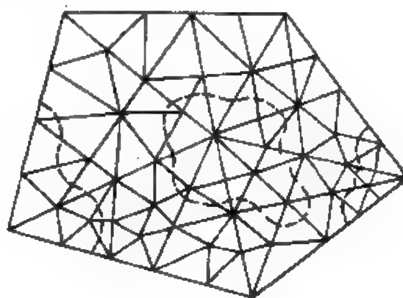


图 Ⅰ.3

(3)曲线光滑化。由于上述等值线是按三角形次序寻找的，所以找到的线段并不依一定次序首尾相接，另外还需要将它们按封闭曲线或首尾和边界相邻的曲线进行分组，然后各组又按首尾相接的原则联接起来，得到等值线上的离散点组：

封闭等值线离散点组：

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n), (x_1, y_1)$$

首尾与边界接壤等值线离散点组：

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$$

然后用样条函数将它们连接起来，即构造 $x=x(t), y=y(t)$，以 t 为参数，可以画出等值线，它们是通过各离散点的，在封闭曲线时样条函数建立时的边界条件为周期性条件；在开口曲线时边界条件用 $x''(t)=y''(t)=0$（见图Ⅱ.4）。

考虑到样条函数计算的复杂性，也可以用 Bezier 二次曲线来拟合，曲线是光滑的，但不通过等值点。

另外需要说明的是，在大部分流场计算中，计算用的网格是四边形的，所以在连接成三角形时有两种可能（如图Ⅱ.5所示），这会作出不同的等值线图来，为此将四边形划分成4个三角形单元，其中心点的坐标位置是4个角点坐标值的平均值，函数值也是4个角点上的函数值的平均。这样作出的等值图将是唯一的。图Ⅱ.6就是一个用上述方法作出的流线图。

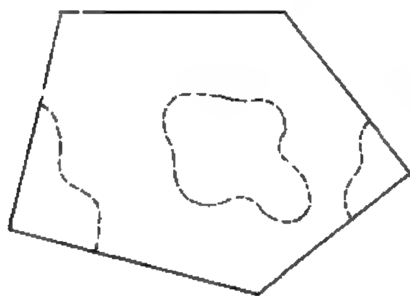
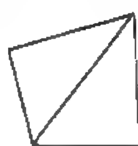
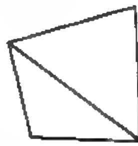


图 Ⅱ.4





二种可能



唯一方法

图 Ⅱ.5

顺便提一下，这一方法可以进一步推广，用来绘制三维空间的等值面图。

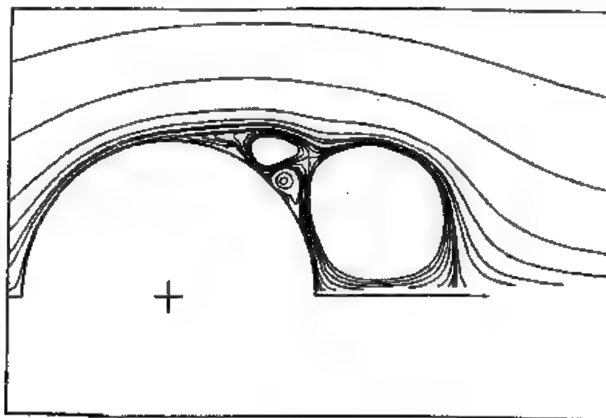


图 Ⅱ.6

Ⅲ 空间曲面的图像显示

曲面的绘制有很多内容，比如空间双样条曲面等，这些内容在计算机图形学专著中均有

介绍，在流场显示中则又很少应用或者使用很不方便，所以不作介绍。在流场显示中应用比较广泛的是以离散形式表示的函数方程 $z=f(x,y)$ 所代表的空间曲面，需要形象地表示出来，比如水波的自由面等，下面介绍将曲面显示出来的方法。这里有二种不同的要求：当曲面为一实体的表面时，曲面的后面部分不仅可能被前面的部分遮挡，还会被实体部分遮挡；当曲面不是实体表面时后面的部分只可能被前面的部分遮挡，在不受前面部分遮挡时仍有可能被看到，因而也必须在图形上显示出来。

下面来讨论曲面图的绘制。

Ⅱ.1 原始数据的给出和处理

像等值线的绘制时一样，首先也要将物理场中所给出函数值 z 的离散点用三角形单元将它们连接起来，每个点的坐标为（$x_i\ y_i\ z_i$）。

首先，根据需要显示的方位，将坐标作变换，一般是平移和旋转以及缩放，可以得到新的坐标值（$x'_i\ y'_i\ z'_i$），作图将在新的坐标系下进行。为书写方便，x'_i 用 x_i 代替，其它亦同。于是以下讨论都在（x，y，z）坐标下进行，应当记住这是变换后的坐标系。

下面将数据按大小排列，为确定起见，这里需要绘制曲面在（y，z）平面上的投影，人们的视线是逆 x 方向的，也就是说对于观察者而言，曲面上 x 值比较小的点在后面，x 值比较大的点在前面。遮挡只可能发生在前面挡住后面的情况下，因此数据的排列如下：

$$y_1<y_2<\cdots<y_n$$

实际上可能出现两个点具有相同 y 值的情况，这时再根据 x 值由大到小排列，即若 $y_i=y_{i+1}$，则要求 $x_i>x_{i+1}$，否则二者对换序号。当然还可能出现 x，y 值都相同的情况，这时再按 z 值由小到大排列。即若 $y_i=y_{i+1}$ 和 $x_i=x_{i+1}$，则要求 $z_i<z_{i+1}$，否则二点对换次序。这样就确定了点的顺序。这里要求没有重合的点，即不存在两个点，它们的3个坐标值均相等。

由于单元的边界是连接二点的线段，所以线段也要编号，设线段 m 连接 P_1^m 和 P_2^m 点，这两个点的点号为 i_1^m 和 i_2^m，在排列之前，首先线段的两个点号要由小到大进行排列，即 $i_1^m<i_2^m$，这样作的目的在于后面给线段排次序时较为方便。线段的编号原则是 $i_1^m<i_1^{m+1}$。如果线段第1

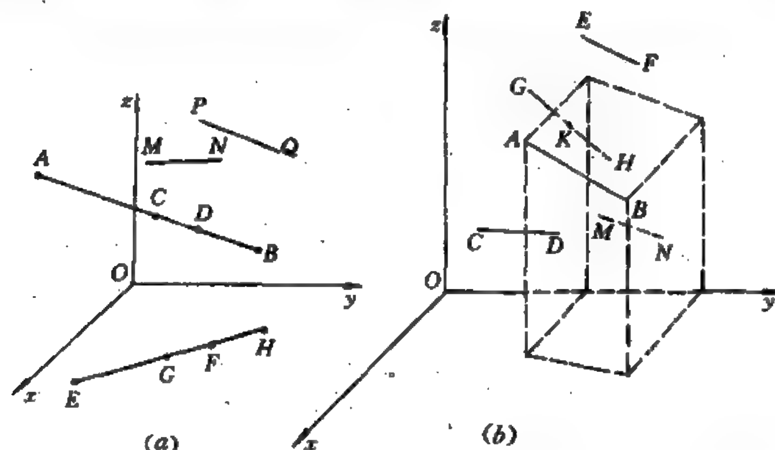


图 Ⅱ.1

(a) CD 在 AB 上是不允许的，EF 和 GH 有重迭，不允许的，MN 和 PQ 是允许的

(b) CD 在前不被遮挡，EF 在上不被遮挡，GH 的 KH 被遮挡，MN 被遮挡

个点的序号相同，则要求第2个点的编号由小到大，即若 $i_1^m=i_1^{m+1}$ 时要求 $i_2^m<i_2^{m+1}$，否则二线段序列序号对换。这样线段的序号就确定了，这里要指出，两个重合的线段也是不允许的。另外在给出原始数据时，两条部分重合的线段也是不允许的，如图Ⅲ.1所示。

在线段排列完成后则需对单元进行排列。首先单元有几个边界，三角形单元有3条边，4边形单元有4条边，每条边是一条线段，它有一个线段的编号 m。现设单元 n 有4条边，它们的线段分别为 L_1^n，L_2^n，L_3^n，L_4^n，编号为 m_1^n，m_2^n，m_3^n，m_4^n。在单元排序以前也首先要求内部由小到大排列，即要求 $m_1^n<m_2^n<m_3^n<m_4^n$。在单元排列中要求 $m_1^n<m_1^{n+1}$，如果第1个线段序号一样时，则要求 $m_2^n<m_2^{n+1}$，否则对换两个单元的序号，如果前两个线段序号相同时再要求第3个线段序号由小到大排列，其余类推。图Ⅲ.2中就显示出排列后得到的点号、线段号以及单元号，这里共有 I 个点、M 条线段和 N 个单元。

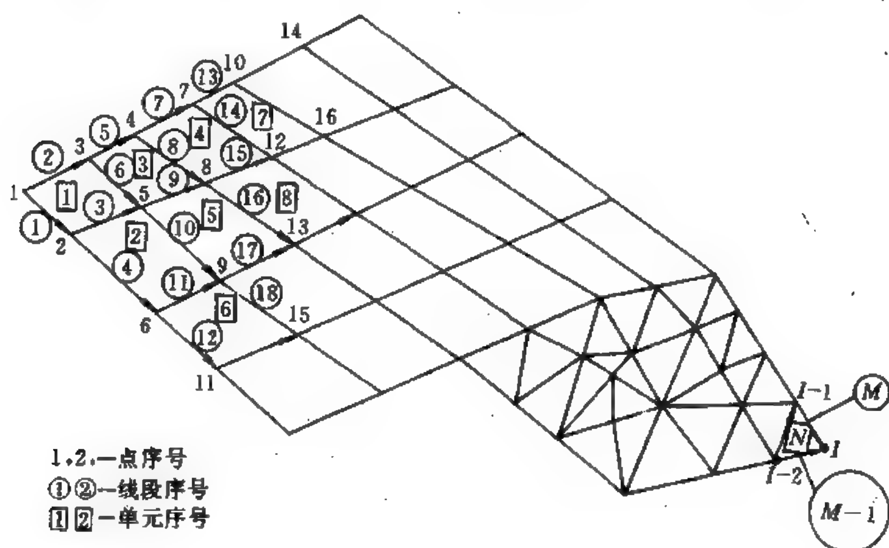


图 Ⅲ.2

Ⅲ.2 条带区的划分

为了便于作图及考虑遮挡，需要将空间划分成若干条带，其作法为将各点的 y 坐标列出为

$$y_1 \leqslant y_2 \leqslant y_3 \cdots \leqslant y_I$$

现将相邻的具有相同值的 y 归并为一个值，这样可以得到新的 y 值系列：

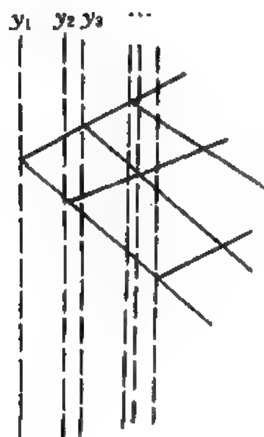
$$y_1 < y_2 < \cdots < y_{s+1}$$

于是 $y_1<y<y_2$ 为第1条条带，$y_2<y<y_3$ 为第2条条带，其余类推，$y_s<y<y_{s+1}$ 为第 s 条条带，共有 s 条条带。

Ⅲ.3 曲面空间图的形成（1）

首先讨论曲面为一实物体的表面的情况，为简单起见，设曲面为实物之上表面，而且曲面上的所有点均为 $z>0$。这一点用平移变换总是可以做得到的。

现在来讨论第 s 条带区内的作图，为此把满足 $y_1^m \leqslant y_{s+1}$ 及 $y_2^m \leqslant y_s$ 的线段挑出来，并将它



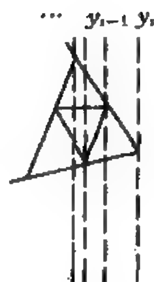


图 Ⅱ.3

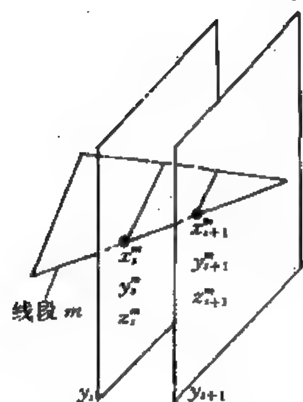


图 Ⅱ.4

们在 s 带内的部分找出来，也就是说将该直线和条带左侧面 $y=y_s$ 的交点 $x_s^m y_s^m z_s^m$ 和右侧交点 x_{s+1}^m，y_{s+1}^m，z_{s+1}^m 找出来，如图Ⅱ.3。它在（y，z）平面上的投影即为（y_s^m，z_s^m）（y_{s+1}^m，z_{s+1}^m）见图Ⅱ.4，如此将这些线段都找出来，如记作 L_1^s，L_2^s，…L_k^s。在作实体表面图时，一般假定原表面只在 z 方向有比较大的起伏，单元平面和（x，y）平面的夹角一般不大于90°，在作变换后也满足这一要求，因此 L_k^s 的排列可以按它们中心点的 x 坐标由大到小进行排列，记 L_k^s 的中心点 x 坐标为 x_k^s，则应有 $x_k^s<x_{k+1}^s$ 在排列次序后，就认为只有序号小的线段可能遮挡序号大的线段，反之则不可能的。

现在来讨论遮挡的可能性，设图Ⅱ.5中 AB 为序号小的线段，比如为 k，CD 为 $k+1$ 线段。这里有4种可能：(1) 当 $z_A<z_c$，$z_B\leqslant z_D$ 时；AB 没有遮挡 CD；(2) 当 $z_A\geqslant z_C$，$z_B\geqslant z_D$ 时，AB

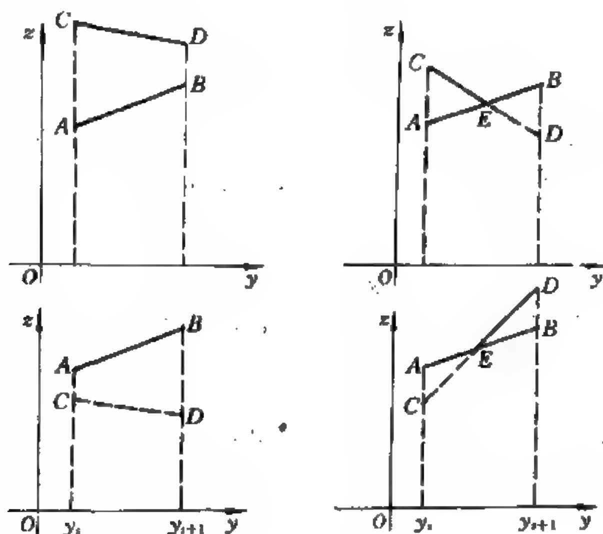


图 Ⅱ.5

挡住了 CD；(3) $z_A \leqslant z_C$；和 $z_B \geqslant z_D$ 时，二者投影相交于 E 点，于是 ED 部分被遮挡；(4) $z_A \geqslant z_c$ 和 $z_B \leqslant z_D$ 时，二者投影相交于 E 点，于是 CE 部分被遮挡，于是作图是这样进行的：先画出线段 L_1^i，然后判断 L_2^i是否被 L_1^i遮挡，如被遮挡则不画出，如不被遮挡则画出，如部分遮挡，则画出不被遮挡的部分，并即将条带分成两部分，即 y_i 和 y_E 之间及 y_E 和 y_{i+1}之间两个条带。在 (y_i, y_E) 条带中设第2线段未被遮挡，则第3线段在这一条带内的线段和第2线段作比较。若该条带内第2线段被遮挡，则与第1线段比较，即与在此之前最后一条未被遮挡的线段作比较。若它们又相交，则条带需进一步剖分，其余类推，可以将同一条条带内的未被遮挡的线段全部画出，然后对一下条带重复上述过程，全部条带内上述过程重复后即可以得到曲面的图形了，如图Ⅲ.6所示。

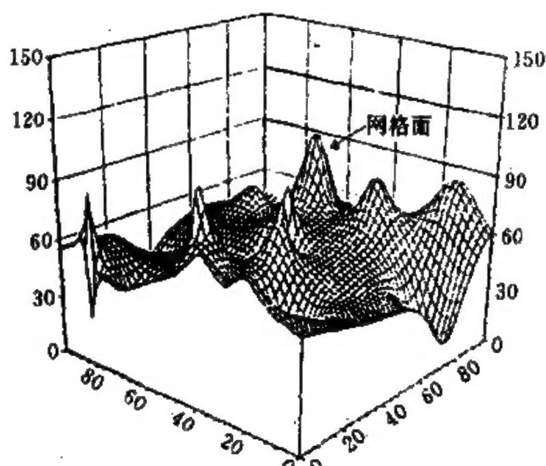


图　Ⅲ.6

这一过程要求曲面的旋转角不能太大。下面讨论的则可以转动任意角度。在下面方法讨论以后，读者可以用下面讨论的方法回头再应用到这一问题的讨论，从而得到任意实体表面的作图而且也不受旋转角度大小的限制。

Ⅲ.4　曲面空间图的形成（2）

上面讨论的方法对坐标的旋转有限制，为此这里讨论更一般的情况，这里为简单起见，讨论曲面本身的空间图，即它不是实体的表面。这里的遮挡是在前面的面元有可能遮挡后面的部分面元，只要后面的面元的这部分在 (y, z) 平面上的投影落在前面这一面元在 (y, z) 平面的投影域内，如图Ⅲ.7所示。而如果后面面元在 (y, z) 平面上的投影并不在上述投影响域内，则就并不被遮挡，这与实体表面的遮挡是不同的，下面来讨论曲面空间图的形成。

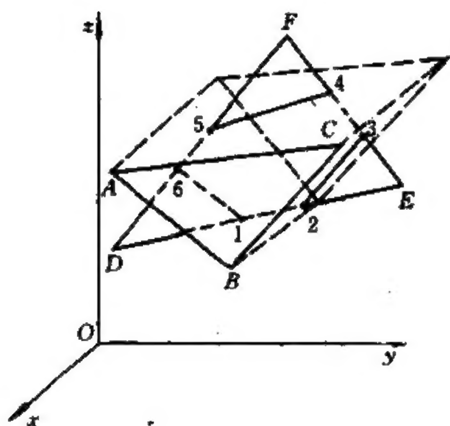


图　Ⅲ.7

首先也要将曲面所在的空间划分成条带，但 y_i 不只包含所有节点的 y 坐标值，而且还包括各线段在 (y, z) 平面上的投影的交点的坐标值。但需说明的是交点必须位于二相交线段上而不能在它们其中之一或二者的延长线上（见图Ⅲ.8)。这样得到的 y 值排列后得到

$$y_{min} = y_1 < y_2 < \cdots < y_n = y_{max}$$

其中极大极小值是指曲面各节点的 y 坐标值的最大和最小值，于是空间可以分成 $n-1$个条带区。取 $y_{s+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(y_s + y_{s+1})$，$(s=1,2,\cdots,n-1)$。现在来讨论 $(y_s y_{s+1})$ 条带内的情况。在这一条带内的部分如图Ⅲ.9所示，这里单元在条带两个侧面之间的部分为一小面元，它们的边界除了

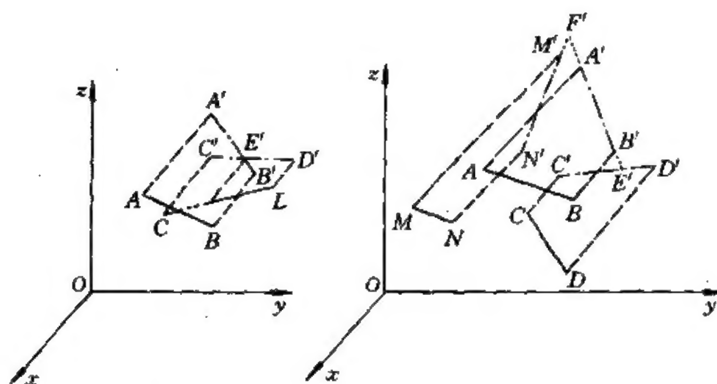
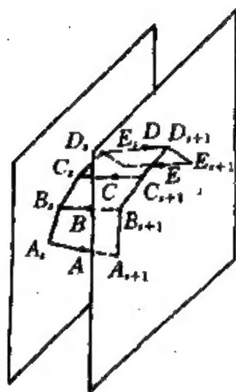


图 Ⅱ.8

位于 $y=y_i$ 和 $y=y_{i+1}$ 上的线段外还有交接线或边界线，即图中的(A_i,A_{i+1})，(B_i,B_{i+1})…，不难知道这些线在（y，z）平面上的投影是不相交的，至少不在条带区间内相交（可能相交于 $y=y_i$ 或 y_{i+1} 处）。因此判断它们是否被遮挡是方便的。首先将 $y=y_{i+\frac{1}{2}}$ 平面与这些单元的交线在（x，z）平面上的坐标计算出来，它们为（x_A z_A），（x_B z_B），…，如图Ⅱ.9所示。显然，A，B 是最前的面，不被遮挡，C 点是否被遮挡可以由 z_c 是否在 min（z_A，z_B）和 max（z_A，z_B）之间确定。若 z_c 落在上述范围之内则被遮挡，否则不被遮挡。如图中所示 A、B、C、D 不被遮挡，E 被遮挡，这时在（y，z）平面上将 A、B、C、D 这几个不被遮挡的点所在的线段（A_i，A_{i+1}），（B_i，B_{i+1}），（C_i，C_{i+1}），（D_i，D_{i+1}）画出，而（E_i，E_{i+1}）线段不画出。

另外为了判断哪一条线被遮挡并不一定先要找出那一条线在最前面，可以用下面的方法加以判断。如图Ⅱ.10中设 P_1P_2 为一线段（在（x，z）平面）Q 为其上的一个点，又设 $z_{P_1}\leqslant z_{P_2}$，当 $z_Q<z_{P_1}$ 或 $z_Q>z_{P_2}$ 时 Q 不被遮挡，当 $z_{P_1}<z_Q<z_{P_2}$ 时可计算 S 值：

$$S=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_{P_1} & x_{P_2} & x_Q\\ y_{P_1} & y_{P_2} & y_Q\end{vmatrix}$$



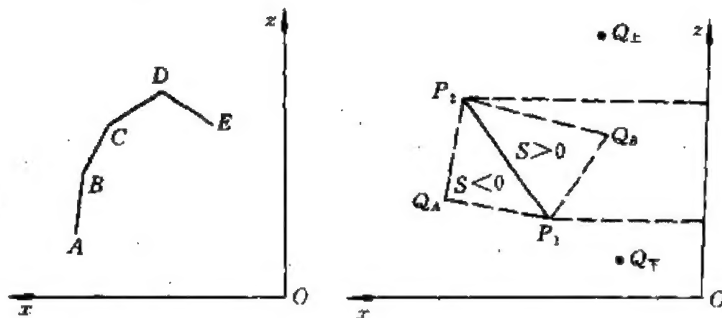


图 Ⅱ.9

图 Ⅱ.10

当 $S \leqslant 0$ 时 Q 不被遮挡，$S > 0$ 时 Q 被遮挡，因此在 $A, B, \cdots$ 等被确定后只要判断各点是否被某一线段所挡，一旦被某一线段遮挡即可判断不用画出，若所有线段都不遮挡它，它才是真正不被遮挡，于是需要把相应的线段画出。如此可得 $(y_i\ y_{i+1})$ 条带内的图案。将每一条带进行上述过程就可以得到曲面的空间图。

这个方法是一个相当通用的方法，对于曲面的形状，坐标旋转的角度方位几乎没有什么限制。缺点是计算比较复杂，绘图时间比较长，因此对程序设计的技巧要求比较高。图Ⅲ.11为用本方法得到的空间曲面图。

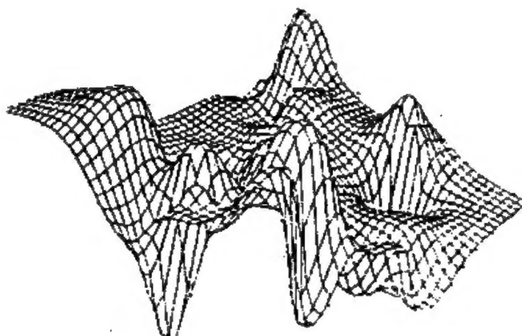


图 Ⅲ.11

Ⅳ 流体质点踪迹显示和动态显示

利用流线图可以形象地看到流动中的一些涡的情况，即涡结构，利用空间图形可以形象地了解物理量的分布，但是在流场可视化实验中人们显示流场的一个重要的方法是氢泡实验，即在流场中设置一氢泡丝（一般用钨或钼制成），在其上施加脉冲电压，在水中形成氢泡，氢泡随着流体流动，在不太长的时间内可以把氢泡运动情况看作随氢泡的流体质点的运动情况（即可以略去浮力对氢泡的作用）。通过这种观察可以看到流场中涡结构、相干结构等等。

数值模拟利用图像显示也可以用来模拟这种运动，达到流场显示的目的。这里需要显示质点运动的情况，这不难实现。设 $t=0$ 时质点在某一指定位置，在该处流体的速度为 $\boldsymbol{V}$，在下一时刻 Δt，质点运动到 $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{V}\Delta t=\boldsymbol{r}_{\Delta t}$，在该处的速度是 $\boldsymbol{V}_{r_{\Delta t},\Delta t}=\boldsymbol{V}_{\Delta t}$，再过 Δt 时间间隔后流体质点运动的位置为 $\boldsymbol{r}_{\Delta t}+\boldsymbol{V}_{\Delta t}\Delta t=\boldsymbol{r}_{2\Delta t}$，余此类推，就得到质点的不同时刻的位置，其中 $\boldsymbol{V}$ 速度可以由空间插值的方法得到（因为质点位置一般不在计算网格的节点上）。插值可以用有限元方法中介绍的等长元方法得到。

如果质点初始位置是在一条给定的直线上，给出的质点有一组，则以后不同时刻的位置就相当于这一氢泡丝在 $t=0$ 时刻产生的氢泡在以后时刻中的运动情况；如果每隔 Δt 在这一直线上产生新的质点，在以后时刻显示的图形就是氢泡运动的照片，如果把不同时刻的图形按一定次序显示出来就可以得到一个动态图形，可与氢泡试验的录相相比拟，这样数值模拟在一定程度上可以替代实验。它的优点是有重复性，也可以定量地分析流场。图Ⅳ.1中给出的就是数值模拟得到的流场质点运动的图案。

最后简单地介绍动态图的生成。目前由于许多强有力的图形软件不断问世，作为流体力学工作者没有必要去开发新的图形软件。但目前图形软件用来动画显示都有各种各样的限制，比如图形本身比较简单，图形运动时图形本身无实质性变化等等。这对于流场显示来说过于受限制，无法使用。因此流场显示用的动态图应当这样来实现：首先将不同时刻的流场的图像用拷屏幕的方式记录在计算机的储存器里，然后用幻灯片的方式在计算机上连续地显示出来，人们可以控制图形在屏幕上显示的时间及图形间的间隔时刻，可以达到快动或慢动或停留在某一画面上的目的，这样流体力学工作者可以反复地和有足够充分的时间来观察和分析流场。

相信在计算流体力学工作者和计算机图形工作者的通力合作下，用计算机形象地模拟流

场的流动这一美好的理想不久即将实现。

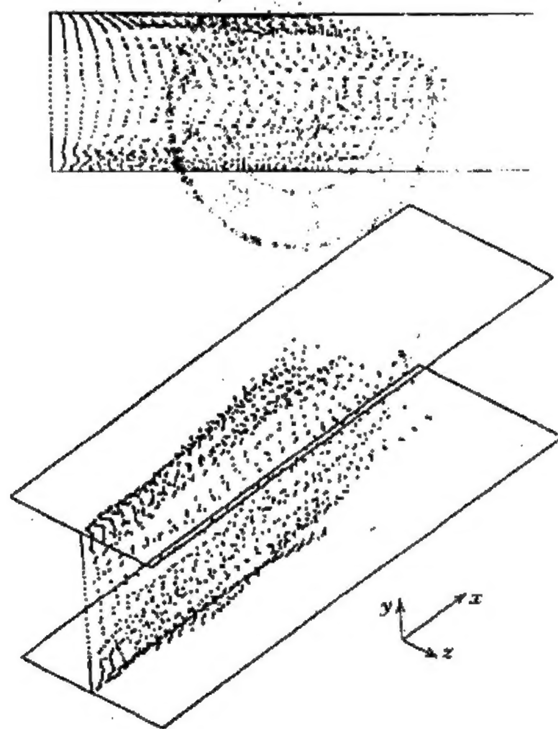


图 Ⅳ.1